

氏 名	河 合 隆 裕 かわ い たか ひろ
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 444 号
学位授与の日付	昭 和 48 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (線型微分方程式の実解析解の大域的存在について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 佐 藤 幹 夫 教 授 溝 畑 茂 教 授 松 浦 重 武

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、一つの領域において与えられた線型偏微分方程式が、その領域に関するいかなる条件の下で解析函数の解を許すかという従来久しく困難視されていた深い問題に、近年開発された Micro-local Analysis の方法を駆使して透徹した分析を行ない、決定的な結果を与えたものであって、その内容は略次の通りである。

いま n 変数の定数係数微分作用素、即ち $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ の多項式 $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ が与えられ、また n 次元空間 R^n 内に滑らかな曲面 (C^1 級) で囲まれた有界な領域 Ω が与えられているとして、未知函数 $u(x_1, \dots, x_n)$ 、既知函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対する線型微分方程式 $Pu=f$ を考えると、 f が Ω 上の解析函数である限り常に解としてもやはり Ω 上の解析函数をえらび得るか？換言すれば、 $\mathfrak{U}(\Omega)$ で Ω 上の解析函数の総体を表わすとき、

$$P\mathfrak{U}(\Omega)=\mathfrak{U}(\Omega)$$

が成立するか否か？というのがこの論文の答えようとする問題である。この命題が正しいとき、“微分作用素 P は解析函数のカテゴリー $\mathfrak{U}(\Omega)$ において可解である”といわれるが、そのためには微分作用素 P と領域 Ω とが相互に任意的ではあり得ず、従って P の形に応じて Ω の形状が何等かの条件を満足せねばならぬ。

いま $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ が m 階の微分作用素、即ち $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ の m 次多項式であるとき、その斉次 m 次多項式の部分だけをぬき出したものを $P_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とし、これを主要部あるいは特性多項式という。そして $P_m(\xi_1, \dots, \xi_n)=0$ をみたす 0 でない実数ベクトル $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ を特性的というが、いかなる特性的な $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ においても $\text{grad } P_m(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ であれば、そのような P_m は単一特性的とよばれる。本論文で扱う微分作用素 P は、その主要部 P_m が実数係数の多項式であって、かつそれ自身が単一特性的であるか、あるいは少しく一般に、単一特性的な多項式 Q のベキになっている（即ち重複度一定）と仮定されている。さて、 R^n 内の直線は、その方向余弦が適当な特性的な $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ を採んだ

とき $\text{grad } Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$ に比例するようになっているとき、陪特性的といわれる。これは Ω とは関係なく微分作用素 P に内在的な概念であり、よく知られた波動方程式における光線概念の一般化である。

以上の幾何学的な概念によって、本論文の主要な結果は次のように述べられる：

(主定理) 　いかなる陪特性的直線とも高々一回しか交わらぬような領域 Ω に対しては、可解性が成立する。即ち、微分作用素 $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ は Ω 上の解析函数のカテゴリーで可解である。

この定理に述べられた可解性のための充分条件は極めて reasonable で自然なものである。一例として P がいわゆる D'Alembertian の場合、即ち、方程式 $Pu=f$ が source f をもった波動方程式である場合を考えよう。領域 Ω としては、超光速円錐に漸近するような、即ち、時間軸方向にひしゃげた一葉双曲面の内側をまず採り、‘有界’との仮定を満足させるため遠い過去と未来を滑らかにカットした蕨形の領域を考える。このとき Ω と二回交わるような‘光線’（即ち陪特性的直線）が存在するから、定理の要件はみたされない。これに反し、光速又は亜光速の円錐に漸近する一葉双曲面の場合にはこのような不都合は生ぜず、従って可解性が成立する、というのがこの場合の主定理の内容である。

この間の事情は、方程式 $Pu=f$ において‘ポテンシャル’ないしは‘わき出し’の分布に相当する既知函数 f が、 Ω の境界点ではもはや解析的と限らぬため、その点に発生する特異性がそこから出る陪特性的直線上の、少くともいづれか一方に沿って伝播せざるを得ぬという（広義の）Huygens の原理によってうかがうことが出来る。即ち、定理の要件をみたすときは、伝播方向（波動方程式の場合は進行波又は退行波）を各境界点で適切に調整して解を構成することにより、特異性が Ω の内部に侵入しないように出来るが、これに反し上記の‘ひしゃげた蕨形’のような場合には、一般には特異性の侵入は避けられず、従って解 u はもはや解析函数ではなくなることをまぬがれない。

これらの事象（Huygens 原理など）は、力学での phase space に相当するところの余接球バンドル上での Microfunction による解析、すなわち、‘Microlocal Analysis’によって数学的に明確に記述される。定理の証明もこの方法によって達成されており、前述の意味で‘適切な’方向への特異性の伝播を記述する如き基本解（波動方程式における遅延グリーン函数・先行グリーン函数などの一般化に当る）を用いることにより前述通りの方針で遂行される。（その様な基本解の構成は参考論文 [10], [11] 等でなされた）。

特性的なベクトル $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ が一つも存在しないような微分作用素（例えば Laplacian）は楕円型と言われる。このとき“仮設が常に不成立である命題は正しい”という論理学の規則により、定理の要件は任意の Ω についてみたされている。（この場合の定理は、超函数解についての Harvey の定理と ‘Weyl のレンマ’ から直接にも簡単に証明される。）

従来は、このように P に対する強い制限（楕円型）のある場合（Malgrange の定理）を除けば、反対に Ω に対するきびしい条件（凸領域であること）の下で、しかも解析函数に代るよりゆるい函数のカテゴリーの場合にしか結果が得られなかった。事実、Fourier 変換という非局所的な変換に基づく従来の方法（Ehrenpreis-Palamodov の基本原理など）による限りは、凸領域でない Ω を扱うことは殆ど不可能と考えられる。申請者の開拓した方法はそのような場合にも完全に有効であることを実証したのみならず、更に定数係数でないより一般の微分方程式や、更にそれらの過剰決定系に関しても同様に有効であり、この方向の研究も申請者により進行中である。（参考論文 [20], [24] 等。）

特にそのような一般の変数係数微分方程式系の場合には、問題は参考論文 [13], [14], [18], [23] (以下続刊中) で展開されつつあるコホモロジー群の有限性の問題とも密接に関係して来る。

主定理は楕円型とも双曲型とも限らぬ一般の実・単一特性的微分作用素 (たとえば超双曲型作用素など) に適用可能であるが、一方局所双曲型の微分作用素に関しては、‘単一特性的’の仮定なしに主定理に相当する定理が導かれている (§5)。なおまた、ごく最近の Hörmander の仕事 (未発表) を考慮するとき、たとえ Ω を凸と仮定しても、申請者の課した条件 (実・単一特性的、又は局所双曲型) が可解性の問題を扱う上で殆んど必要条件に近い‘自然’な前提条件であって、証明のための便宜的条件ではないことが示されることに注意する。

参考論文25編のうち、上文にも触れたコホモロジー群の有限性に関する一連のものは、主論文のテーマを更に発展させたものであり、楕円型方程式系のコホモロジー群について従来知られていた有限性定理を全く新しい方向へ拡張できることを示している。

初期の論文 [1] (修士論文), [2] では超函数 (Hyperfunction) 理論における Fourier 変換の理論を土台から建設し、その定数係数偏微分方程式論への応用を詳論している。

参考論文のうち [3], [5], [6], [8], [9], [15], [17] は、方程式の解の特異性・解析性の伝播や可解性を論じたものであって、主論文と同じ思想圏に属するものである。

参考論文 [4] では、柏原正樹氏と共に Microfunction に作用すべき擬微分作用素の概念を導入し、その算法を定め、基本的な定理を与えている。また [12], [16], [21] では、柏原・佐藤とともに、Microfunction および上述の擬微分作用素の理論を組織的に体系づけて Microlocal Analysis の基礎を作り、その上に立って擬微分方程式系の理論を展開し、さらに量子化接触変換の理論 (Hörmander 氏の Fourier 積分作用素に相当する) を援用して、一般な擬微分方程式の Microlocal な構造を決定している。

参考論文 [7] では小松彦三郎氏とともに、超函数 (Hyperfunction) と相対コホモロジーを用いることにより境界値問題が簡明にかつ極めて一般的に定式化されることを述べ、後の相原氏との一連の論文 ([19], [22] 等、以下続刊中) では Microlocal な立場からの境界値問題への一層本質的な掘り下げがなされている。

論文審査の結果の要旨

申請論文 (主論文1編、参考論文25編) の主題は線型偏微分方程式の一般理論に関わるものであって、それは前世紀以来 Cauchy, Kowalewski, Hadamard, Holmgren, Petrowski らにより徐々に開拓されて来たものである。今世紀中頃に至り、Leray, Gårding らによってこの分野の組織的な研究が始まり、以後 Ehrenpreis, Malgrange, Hörmander らを始めとする優れた研究が数多く現われ、急速に体系化が進んで来た。そこで用いられた主な方法は今世紀に発達したいわゆる函数解析的方法であり、また L. Schwartz の Distribution の理論である。即ち問題に応じて函数又は一般化された函数の適当な族、即ち‘函数空間’を設定し、未知函数に対して何等かのアプリオリ評価を導くという方法である。今日この方法は極めてぼう大で精緻な技術に発達しており、多くの研究がこの立場で現在もなお続けられている状況である。

申請者の一連の研究は、こうした従来の方法とは全く異なる方法に基づいている。即ちその方法はまず *Distribution* の代りに *Hyperfunction* と *Microfunction* を基礎にとることに始まり、さらにこれまでの函数解析の方法に替えて殆んど全面的に代数解析の方法に拠っている。即ち、従来の函数空間とアプリアリ評価の方法はこれを全く用いることなく、古典的な陪特性帯の性質に基づく純粋に幾何学的ないし代数的な構造を直接分析することによって、適切な基本解を *Microlocal Analysis* の立場から構成し、さらに擬微分作用素の理論や、*Hyperfunction* と *Microfunction* の脆弱性 (flabbiness) を活用して結果を導いている。なお、この *Hyperfunction* の特有性質 (脆弱性) が、主論文のように *Hyperfunction* と直接関係のない問題においても本質的に有効であることは注目すべき事である。一方、ここで主要な研究手段となるところの余接球バンドル内の陪特性帯等の幾何学的概念は、前世紀において *Lagrange*, *Hamilton*, *Jacobi* などの人々により解析学の中心的テーマとして研究されて来たものであり、この意味において申請者らの研究方法はむしろ極めて古典的・正統的な研究方法と言うべきである。

ここに申請者は、*Microlocal Analysis* の言葉を導入することによって、一般の線型偏微分方程式論においてもまた、この陪特性帯が解の正則性・特異性の真の運び手として決定的に重要な役割を担うものであることを明らかにした (参考論文 [10] など)。これは極めて重要な認識であって、‘*Huygens* の原理’を含む一連の性質の背後にある機構を究極的に分析したものに他ならず、線型偏微分方程式の研究方向に大きな影響を与える基本的な業績である。申請者の主論文を含むその後の仕事においてもこの結果は基礎的であること勿論である。

申請主論文の主題である定数係数単独線型偏微分方程式 $Pu=f$ の実解析的な解の大域的存在の問題は、前記した *Ehrenpreis*, *Malgrange*, *Hörmander* ら現代の指導的研究者によっても今日に至るまで殆んど何等の結果も得られず、従来の方法によっては解決は殆んど絶望的と考えられていたものである。ここに申請者は新しい方法を武器にしてこの問題を徹底的に解析し、論文内容要旨に見るように極めて鮮やかで印象的な仕方で見事な結果を導いている。そこに得られた主定理は、その重要性和単純さによって既にその価値は明らかであるが、なお上述の如き事情をも考えあわせるとき偏微分方程式論において劃期的な成果であることが了解されるものである。それにも拘らず、(あるいは、むしろそれ故に) この論文の内容は全く平明で自然なものであり、晦渋な計算や技巧的な手法は少しも用いられていない点もまた注目に値する。

参考論文もすべてこのような思想に基づき、線型偏微分方程式の一般理論をあざやかに推し進めたものである。例えば、コホモロジー群の有限次元性に関する一連のものは、主論文のテーマを更に発展させたものであり、従来知られていた有限性定理を予想もされなかった方向へ拡張できることを示している。有限性定理は大域的解析学で基本的に重要なものであるが、申請者の仕事はこの方面に新しい地平を拓くものであろう。

また、境界値問題を扱った現在進行中の一連の論文 (柏原正樹氏と共著) は、境界値問題そのものの本質的構造について、これまで何人も達しなかった深い分析と洞見に達している。また、他の諸論文についても、論文内容の要旨に略記したように、その主題は広汎に亘っているが、それらもまた現代の偏微分方程式論において主論文におとらず重要な意義を占有するものであると考えられる。

約言すれば、この一連の申請論文は、申請者の新しい方法論に基づく独創的な研究の最初の成果であって、従来の次第に複雑化を遂げつつある方法を廃し、新しい立場から古典的な幾何学的描像に徹することにより、本質的でない夾雑物を消去し、推論を透明化すると共に、在来の到達点をはるかに超えて本質的な多くの成果を単純明快な形で提示しているものである。

申請者は、若年に拘らずこれらの斬新にしてかつ卓越した業績により既に Gårding, Hörmander, Lewy, Spencer らこの分野の指導的な研究者に深甚の影響を与えている。現在なお多くの研究を進めつつあり、その仕事は内外の注目するところとなっている。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。