

Dirichlet L-函数について

東大教養学部教授 竜沢周雄

k を正整数, χ を次の条件をみたし整数全体を定義域とする函数とする。(1) $(n, k) > 1$ ならば $\chi(n) = 0$, (2) $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$ ならば $\chi(n_1) = \chi(n_2)$, (3) $\chi(n_1 n_2) = \chi(n_1) \chi(n_2)$.

このとき, χ を $\text{mod } k$ の剰余指標という。 $(n, k) = 1$ ならばつねに $\chi_0(n) = 1$ となる剰余指標 χ_0 を $\text{mod } k$ の principal character という。 χ を $\text{mod } k$ の剰余指標, f が k の約数で

$$\left[\begin{array}{l} (n, k) = 1, \quad n \equiv 1 \pmod{f} \text{ なる } n \text{ だけ} \end{array} \right] \chi(n) = 1$$

が成立するとき, χ は $\text{mod } f$ で定義されるという。 χ を定義する最小正整数の f を χ の conductor という。 χ の conductor が k 自身るとき, χ は $\text{mod } k$ の primitive character という。 χ_0 の conductor は 1 である。 χ の conductor を f とし, $(k, n) = 1$ なる n だけ $\chi^0(n) = \chi(n)$ となる $\text{mod } f$ の剰余指標 χ^0 を χ に属する一つの原始指標という。 ζ を 1 の原始 n 乗根とし

$$G(a, \chi) = \sum_{n \pmod{k}} \chi(n) \zeta^{an}$$

をつくり, Gauss の和という。 $(b, k) = 1$ ならば $G(ab, \chi) = \bar{\chi}(b) G(a, \chi)$,

χ が $\text{mod } k$ の primitive character $(a, k) > 1$ ならば

$G(a, \chi) = 0$, χ が $\text{mod } k$ の primitive character ならば $G(a, \chi)$

$= \bar{\chi}(a) G(1, \chi)$, χ を mod k の primitive character ならば

$$|G(1, \chi)| = \sqrt{k}$$

$s = \sigma + it$ を複素変数とし, $\sigma > 1$ では $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^s$ によって定義される解析関数を $L(s, \chi)$ で表す。この Dirichlet 級数は $\sigma > 1$ では確かに正則であり, Euler の乗積公式

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

を満足する。 χ^0 を χ の一つの原始指標とすると

$$L(s, \chi) = \prod_{p|k} (1 - \chi^0(p)p^{-s}) L(s, \chi^0)$$

が成立つ。特に

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p|k} (1 - p^{-s}) \zeta(s)$$

で, $\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数となる。 χ を mod k の原始指標とする。 $L(s, \chi)$ は $k=1$ ならば $\zeta(s)$ となり $s=1$ で 1 次の pole をもつほか, その他のすべての s で正則となり, $k \neq 1$ ならばすべての s で正則となる。また $\chi(-1) = 1$ 或 -1 にならうて $a=0$ 或 1 と定めると

$$\phi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$

とするとき, 函数等式

$$\phi(s, \chi) = \varepsilon(\chi) \phi(1-s, \bar{\chi})$$

が成立つ。ただし,

$$\varepsilon(\chi) = \frac{(-i)^a}{\sqrt{k}} G(1, \chi)$$

Γ 函数の公式を利用して

$$L(s, \chi) = 2(\pi)^{s-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1-s}{\sin} \xi(\chi) \frac{\sin}{\cos} \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(1-s) L(1-s, \bar{\chi})$$

($a=0$ のとき $\sin$, $a=1$ のとき $\cos$)

と表わける。したがって、 $L(s, \chi)$ の零々は $\sigma > 1$ にはなく

$\sigma \leq 0$ では次のようにある。

$k=1$ の場合 $-2, -4,$

$k > 1$ の場合 ($a=0$) $0, -2, -4, \dots$

$k > 1$ の場合 ($a=1$) $-1, -3, -5, \dots$

したがって、 $0 < \sigma < 1$ にある $L(s, \chi)$ の零々は ρ で表わすとき、

Hadamard の定理によつて、

$$(s-1) L(s, \chi) = \frac{e^{A+B\delta}}{\delta \Gamma(\frac{\delta}{2})} \prod_p \left(1 - \frac{\delta}{p}\right) e^{\frac{\delta}{p}} \quad k=1$$

$$L(s, \chi) = \frac{e^{A+B\delta}}{\Gamma(\frac{\delta}{2})} \prod_p \left(1 - \frac{\delta}{p}\right) e^{\frac{\delta}{p}} \quad k > 1 \quad a=0$$

$$L(s, \chi) = e^{A+B\delta} \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\delta)} \prod_p \left(1 - \frac{\delta}{p}\right) e^{\frac{\delta}{p}} \quad k > 1 \quad a=1$$

対数微分をとれば

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\delta) = B - \frac{1}{\delta-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\delta}{2} + 1 \right) + \sum_p \left(\frac{1}{\delta-p} + \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{L'}{L}(\delta, \chi) = B - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\delta+a}{2} \right) + \sum_p \left(\frac{1}{\delta-p} + \frac{1}{p} \right)$$

(χ primitive, $k > 1$)

なる公式がえられる。ただし B は χ に関係するある定数。

算術級数による素数分布の定理を証明する場合, mod k に關する剰余指標 χ から $L(s, \chi)$ をつくり それを利用するので Dirichlet 以来の伝統になっている. このとき $L(1, \chi) \neq 0$ の証明ができればあとは簡単なことば, 次の Shapiro の方法(多少かえり)をみても知る. $L(1, \chi) \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{d|n} \chi(d) \log \frac{x}{d} = \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d)}{d} \log \frac{x}{d} = O(\log^2 k) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} = \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m} = \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} (L(1, \chi) + O(\frac{k}{x})) \\ &= L(1, \chi) \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} + O(k) \quad \text{より} \quad \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} = O(\frac{k}{L(1, \chi)}) \end{aligned}$$

$L(1, \chi) = 0$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{d} = \sum_{d \leq x} \left(\sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{d} + \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} \right) \frac{\chi(n)}{n} \\ &= \log x + \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} \quad \text{一方左辺} = \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d) \chi(d)}{d} \log \frac{x}{d} = \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m} \\ &= O\left(\sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \log \frac{x}{d} \cdot k \frac{d}{x}\right) = O(k) \quad \text{より} \quad \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} = -\log x + O(k) \end{aligned}$$

χ は mod k の $\varphi(k)$ 個の剰余指標を動くとき N 個の χ について $L(1, \chi) = 0$ と仮定するとすれば上記により

$$\begin{aligned} \varphi(k) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} \\ &= \log x + (-N) \log x + O(1) \quad (\text{この } O(1) \text{ は } k \text{ に depend}) \end{aligned}$$

と仮定するとより, $L(1, \chi) = 0$ と仮定することであっても χ は real な場合しかも一つだけということになる. したがって, χ を real primitive character mod k として $L(1, \chi) \neq 0$ が証明され

よ、よ、よ。 Section 12 では Kronecher の記号を使って

$$\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=1) \quad \text{or} \quad \left(\frac{-k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=-1)$$

より、fundamental discriminant $\pm k$ の二次体の class number を h とするとき

$$\chi(-1)=1 \text{ のとき } h = \frac{\sqrt{k}}{2 \log \eta} h(1, \chi), \quad \eta = \frac{a+b\sqrt{k}}{2} (>1) \text{ は fundamental unit}$$

$$\chi(-1)=-1 \text{ のとき } h = \frac{w\sqrt{k}}{2\pi} h(1, \chi) \quad w=6 (k=3), 4 (k=4), 2 (k>4)$$

とかける (Hecke)。 $\eta - \eta^{-1} = a \text{ or } b\sqrt{k} \geq 1$ より $\eta + \eta^{-1} \geq \sqrt{5}$

$$\text{よって } \eta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ よって } \chi\left(\frac{1}{-1}\right) \text{ のとき } h(1, \chi) \geq 2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{また } \chi(-1)=-1 \text{ ならば } h(1, \chi) \geq \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ となる。 } L(1, \chi) \neq 0$$

の外ならず下からの h に関するおさえを作ることは、素数定理を深める際更に重要となる。

上記は Dirichlet の L 函数には有効であるが、Hecke の L 函数に対しても有効な Fuchs の方法を簡単に紹介しておく。

$$\sigma > 1 \text{ とき } \zeta(\sigma) h(\sigma, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \text{ とする と 良く知られてい}$$

$$\text{る ように } a_n = \sum_{d|n} \chi(d), \quad a_1=1, \quad a_n \geq 0, \quad a_{n^2} \geq 1. \quad \text{Mellin 変換に}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-nx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{1-\delta} \Gamma(\delta-1) \zeta(\delta) h(\delta, \chi) d\delta$$

$1 > c > 0$ と L 積分路をうつして

$$= (-h(1, \chi) \log x + h'(1, \chi)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{1-\delta} \Gamma(\delta-1) \zeta(\delta) h(\delta, \chi) d\delta$$

$$C = \frac{1}{\log k} \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$= (-h(1, \chi) \log 2 + h'(1, \chi)) + O\left(x^{1-\frac{1}{\log k}} k^{\frac{1}{2}} \log^2 k\right)$$

$$x = k^{-a}, \quad \frac{1}{2} k^{-a} \quad \text{と} \quad \text{おいて} \quad \text{差を} \quad \text{作る}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left(e^{-\frac{n}{2k^a}} - e^{-\frac{n}{k^a}} \right) = h(1, \chi) \log 2 + O\left(k^{\frac{1}{2}-a} \log^2 k\right)$$

$$\text{よ} \quad \text{う} \quad \text{に} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{の} \quad \text{とき}$$

$$e^{-x}(1-e^{-x}) \geq \frac{1}{2} x(1-x)$$

$$\text{よ} \quad \text{う} \quad \text{に}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\geq \frac{1}{2} \sum_{n \leq k^a} \frac{a_n}{n} \left(1 - \frac{n}{2k^a} \right) \geq \frac{1}{8} \frac{1}{k^a} \sum_{n \leq k^a} a_n \\ &\geq \frac{1}{8 k^a} \sqrt{k^a} = \frac{1}{8 k^{\frac{a}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{よ} \quad \text{う} \quad \text{に}$$

$$h(1, \chi) \log 2 > \frac{1}{8 k^{\frac{a}{2}}} - O\left(\frac{\log^2 k}{k^{a-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\text{よ} \quad \text{う} \quad \text{に}$$

$$a = 1 + \frac{4 \log \log k}{\log k} + \frac{b}{\log k}$$

$$\text{よ} \quad \text{う} \quad \text{に}, \quad b \quad \text{を} \quad \text{十} \quad \text{分} \quad \text{大} \quad \text{に} \quad \text{す} \quad \text{れ} \quad \text{ば}$$

$$h(1, \chi) > \frac{C}{\sqrt{k} \log^2 k} \quad (C \text{ は } k \text{ に 無関係な定数})$$

これらの結果を更に深めたものとして Siegel の定理があるが筆者流に多少変形して述べる。 χ を mod k の剰余指標とし $k|m$ とする。このとき χ から

$$\chi^*(m) = \chi(m) \quad (n, m) = 1, \quad 0 \quad (n, m) \neq 1$$

として mod m の剰余指標をつくることもできる。 χ_1, χ_2 がそれぞれ mod $k_1, \text{ mod } k_2$ の character, $k_1|m, k_2|m$ のとき上記

のように χ_1, χ_2 から $\text{mod } m$ の 剰余指標 χ_1^*, χ_2^* をつくり

$$\chi^*(n) = \chi_1^*(n) \chi_2^*(n)$$

により $\text{mod } m$ の character χ^* を作られる。これは χ_1, χ_2 の積という。特に χ_1, χ_2 をそれぞれ $\text{mod } k_1, \text{mod } k_2$ の real primitive character で $\chi_1 \neq \chi_2$ とする。 $k_1 | m, k_2 | m$ なる m をとって χ_1, χ_2 の積である $\text{mod } m$ の real character χ^* を作る。と当然のことながら決して principal character にはならぬ。 $k_1 = k_2$ のときは $\chi_1 \neq \chi_2$ であるから あきらかであるから $k_1 \neq k_2$ とし証明しよう。 $(k_1, k_2) = k$ とし、たとえは " $k | k_1, k \neq k_1$ " としよう。 仮定により

$$(n, k_1) = 1, \quad n \equiv 1 \pmod{k}, \quad \chi(n) \neq 1$$

なる n がある。そこで

$$l \equiv n \pmod{k_1}, \quad l \equiv 1 \pmod{k_2}, \quad (l, m) = 1$$

なる l を求める。それは m の素因子で " k_1, k_2 に含まれぬもの" があったらその積を q とし $l \equiv 1 \pmod{q}$ とでもすればよい。 求めるときは

$$\chi_1(l) = \chi_1(n) \neq 1, \quad \chi_2(l) = 1, \quad \chi^*(l) = \chi_1(l) \chi_2(l) \neq 1$$

となつて χ^* は principal ではない。(Takagi)

χ, χ_1 をそれぞれ $\text{mod } k, \text{mod } k_1$ に属する real primitive non-principal character かつ $\chi \neq \chi_1$ とする。このとき $\text{mod } k k_1$ の character $\chi \chi_1$ をつくり

$$F(s) = \zeta(s) L(s, \chi) \quad G(s) = \zeta(s) L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_1)$$

$$2 < \sigma < \frac{7}{8}, \quad \frac{7}{8} < \sigma < 1 < \sigma < 2$$

$$(1) \quad F(s) \geq \frac{1}{2} - \frac{c_1 L(1, \chi)}{1-s} K^{8c(1-s)}$$

$$(2) \quad G(s) \geq \frac{1}{2} - \frac{(c_1 L(1, \chi) L(1, \chi_1) L(1, \chi_1)) (K K_1)^{4c(1-s)}}{1-s}$$

$$F(s), G(s) \leq \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad 2 < \sigma < 2 \quad a_1 = 1, \quad a_n \geq 0, \quad \psi(s) \text{ は } s=1$$

$$z=1 \text{ の pole を } t \text{ として } \text{residue } \lambda \text{ は } \text{それ} \text{ ぞれ } L(1, \chi), L(1, \chi) L(1, \chi_1)$$

$$L(1, \chi_1), \quad |s-2| < 2 \quad z$$

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (s-2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - \lambda) (s-2)^m$$

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log^m n}{n^2 m!}, \quad b_0 \geq 1, \quad b_m \geq 0$$

$$z \text{ Taylor 展開すれば, } |s-2| = \frac{3}{2} \text{ 上 } z \text{ 付近上}$$

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \begin{cases} O(K^{2c}) & \psi(s) = \zeta(s) L(s, \chi) \\ O((K K_1)^c) & \psi(s) = \zeta(s) L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_1) \end{cases}$$

$$z \text{ 評価してよく, } \text{これから Siegel (これは Siegel-Estermann) のよ}$$

$$うに計算して, \quad \frac{7}{8} < \sigma < 1 < \sigma < 2$$

$$\psi(s) \geq 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^m C K^A - \lambda \frac{(2-s)^n}{1-s}$$

$$A \text{ は } \psi(s) = F(s) \text{ のとき } 2c, \quad \psi(s) = G(s) \text{ のとき } c < 2 \text{ である また}$$

$$\text{それ} \text{ ぞれ } K = K, \quad K = K K_1, \quad \text{よって } z$$

$$n = \left\lceil \frac{\log 8 C K^A}{\log \frac{4}{3}} \right\rceil + 1$$

$$z \text{ および (1), (2) が成り立つ。} \quad \text{上記 } C \text{ は } C \geq \frac{1}{2} \text{ のよ}$$

うにうつておく。そのとき $0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda}$ とすれば $\frac{\varepsilon}{8C} < \frac{1}{8}$

(1) によって

$$F\left(1 - \frac{\varepsilon}{8C}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{8C_1C}{\varepsilon} h(1, \lambda) k^\varepsilon$$

これより

$$h(1, \lambda) < \frac{1}{16C_1C} \frac{\varepsilon}{k^\varepsilon}$$

ならば $\lim_{\delta \rightarrow 1-0} F(\delta) = -\infty$ に注意して, $1 - \frac{\varepsilon}{8C} < \delta < 1$ に少くとも

一つの $h(\delta, \lambda)$ の零点がある。そこで $a \equiv \frac{1}{16C_1C}$ なる a と

1, $h(1, \lambda) \leq a \frac{\varepsilon}{k^\varepsilon}$, $h(1, \lambda_1) \leq a \frac{\varepsilon}{k_1^\varepsilon}$ が同時に成立した

としてどうなるかを試してみる。上記考察の結果

$$1 - \frac{\varepsilon}{8C} < \delta < 1$$

に $h(\delta, \lambda)$ と $h(\delta, \lambda_1)$ の零点が少くとも一つずつ存在する

から $G(\delta)$ は δ に少くとも2つの根をもつ。(2)により

$\frac{7}{8} < \delta < 1$ で

$$G(\delta) \geq \frac{1}{2} - H(\delta), \quad H(\delta) = \frac{C_2 h(1, \lambda) h(1, \lambda_1) h(1, \lambda \lambda_1)}{1 - \delta} (kk_1)^{4C(1-\delta)}$$

より

$$\delta_1 = 1 - \frac{\eta}{\log k k_1}, \quad \delta_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{8C}$$

と置く。もし $G(\delta_1) > 0$, $G(\delta_2) > 0$ ならば $H(\delta)$ は $0 < \delta < 1$ で

convex function であるから $\delta_2 \leq \delta \leq \delta_1$ or $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$ で

$G(\delta) > 0$ となる。したがって

$$1 - \frac{\eta}{\log k k_1} < \delta < 1$$

に $G(\delta)$ は少くとも2つの根をもつが, η が十分小にできる

仮らば, Page の理論により不可能なことになる。したがって
適当な正数 a に対しては高々一つの例外を除き

$$(3) \quad L(1, k) > a \frac{\varepsilon}{k \varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$$

となる。 a をどの程度小さくすればよいかを調べてみる。

$$L(1, k_1) \leq c_+ \log k k_1$$

であるから

$$\begin{aligned} H(\delta_1) &< c_2 \frac{\log k k_1}{\eta} \cdot a^2 \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} c_+ \log(k k_1) (k k_1)^{\frac{4c_2 \eta}{\log k k_1}} \\ &= \frac{a^2 c_2 c_+}{\eta} e^{4c_2 \eta} \log^2(k k_1) \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} \end{aligned}$$

一般に $x > 0, \varepsilon > 0$ ならば $\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon^2} \geq \frac{e^2}{4} \log^2 x$ かつ $x = k k_1 \leq 1$

$$H(\delta_1) < \frac{a^2}{\eta} c_2 c_+ e^{4c_2 \eta} \frac{4}{e^2}$$

右辺は η がどんなに小さくあっても a を十分小さくすれば $\frac{1}{2}$ 以下となり $G(\delta_1) > 0$ が保証される。

$$\begin{aligned} H(\delta_2) &< c_2 \frac{8c_+}{\varepsilon} a^2 \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} c_+ \log(k k_1) (k k_1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= 16 a^2 c_2 c_+ \log(k k_1) \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{(k k_1)^{\frac{\varepsilon}{2}}} \end{aligned}$$

一般に $x > 0, \varepsilon > 0$ ならば $\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} \geq e \log x$ かつ $x = k k_1 \leq 1$

$$H(\delta_2) < \frac{16 a^2 c_2 c_+}{e}$$

よって a を十分小さくすれば右辺 $\frac{1}{2}$ 以下にて $G(\delta_2) > 0$ 。

以上により (3) が証明された。

以上を前置きとして, Linnik 第2基本定理 (Prachar, Primzahlverteilung, 1957, X, §2) の Turan-Knapowski 流による簡明化を紹介する。以下 Knapowski の絶筆となった論文

On Siegel's theorem, Acta Arithmetica, Bd 14 (1968), 417-424 の紹介であり幾分簡明化し幾分ふかめた。 χ は real non-principal primitive character mod. k とし $h(\delta, \chi)$ は exceptional zero $\beta = 1 - \delta$ を持つとする。Page の理論により絶対定数 C が存在して

$$0 < \delta < \frac{C}{\log k}$$

χ_1 は primitive character mod k_1 とする, $a > 1$ を任意に与え $\varepsilon > 0$ を $\frac{1}{C} > \varepsilon$ なるように与える。このとき

主定理 $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ とし $h(\delta, \chi)$ は exceptional zero $\beta = 1 - \delta$ を持つとする。 $k_1 \leq k$ なる $h(\delta, \chi_1)$ は $\beta \neq 1$ はない zero $\beta_1 + i\delta_1$ を

$$1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 \quad e^{k^{a\varepsilon}} \geq |\gamma_1|$$

なる範囲に少なくとも一つもてば

$$\delta \geq \frac{1}{k^{(a+2\log a + c_0)\varepsilon}} \quad (c_0 \text{ はある絶対定数})$$

注意 仮定により $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} > e^{\frac{C}{\varepsilon}}$ よって $\log k > \frac{C}{\varepsilon}$,

したがって $\varepsilon > \frac{C}{\log k} > \delta$

以下証明に入るが, 数段に分れる。

χ_1 が principal なときは

$$f(s) = L(s, \chi_1) L(s+\delta, \chi_1 \chi)$$

または, χ_1 が principal のときは

$$f(s) = L(s, \chi_1) L(s-\delta, \chi_1 \chi)$$

または $f(s)$ は 整函数である。 $s = \sigma + it$ とし $\sigma > 1 + \delta$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{f'(s)}{f(s)} &= \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} + \frac{L'(\delta \pm \delta, \chi_1 \chi)}{L(\delta \pm \delta, \chi_1 \chi)} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n) \Lambda(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi \chi_1(n) \Lambda(n)}{n^{\delta \pm \delta}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \Lambda(n)}{n^s} \quad b_n = \chi_1(n) (1 + \chi(n) n^{\mp \delta}) \end{aligned}$$

ただし, $\Lambda(n)$ は Mangoldt の函数で

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

そこで Rodoskii に よつて 導入された 次の積分を考える。

$y > 0$, a 任意実数, $s = a + it$, $\beta = 2ay - \log n$ とし

$$\begin{aligned} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{-s^2 y} ds &= i n^{-a} e^{a^2 y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y t^2 + i \beta t} dt = i n^{-a} e^{a^2 y} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \beta^2} \\ &= i \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 n} \end{aligned}$$

そこで n の代り $n e^{-z}$ とする

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{y s^2 + z s} ds = i \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 (n e^{-z})}$$

よつて

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b_n}{n^{s+3\varepsilon}} e^{y s^2 + z s} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 (n e^{-z})} \frac{b_n}{n^{1+3\varepsilon}}$$

$a \geq 4\varepsilon$ ならば (この a は (3) の a とは不同, 主定理 a と異なる)

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'(s)}{f(s)} (\delta+1+i\delta_1-3\varepsilon) e^{y\delta^2+z\delta} ds = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)(1+\chi(n)n^{\frac{7}{8}\delta})N(n)}{n^{1+i\delta-3\varepsilon}}$$

$$\times e^{-\frac{1}{4y} \log^2(ne^{-z})}$$

したがって

$$|I| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}y} \sum_n \frac{\lambda(n)(1+\chi(n)n^{\frac{7}{8}\delta})}{n^{1-3\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2(ne^{-z})}$$

ここで ω は後に定める正整数とし

$$y = A\omega, \quad z = B\omega, \quad A = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad B = \frac{30}{\varepsilon}$$

とおき, そのときの I を I_ω とおく。始めに右辺の和を場合によりけて評価する。

1) $n < e^{\frac{B\omega}{2}}$ のとき このとき

$$e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(ne^{-B\omega})} \leq e^{-\frac{1}{4A\omega} \left(\frac{B\omega}{2}\right)^2} = e^{-\frac{900}{16}\omega} < e^{-56\omega}$$

$$|I_\omega| \text{ への contribution } \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} e^{-50\omega} \sum_{n < e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{n^{1-4\varepsilon}} \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} e^{4\omega}$$

$$\times \sum_{n < e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{n} \ll \frac{(B\omega)^2}{\sqrt{A\omega}} e^{4\omega} \ll \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} e^{4\omega} \ll \frac{e^{5\omega}}{\varepsilon}$$

2) $n > e^{2B\omega}$ のとき このとき

$$|I_\omega| \text{ への contribution } \ll \frac{1}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{2B\omega}}^{\infty} \frac{\log x}{x^{1-4\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(xe^{-B\omega})} dx$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{2B\omega}}^{\infty} \frac{\log u}{u^{1-4\varepsilon}} e^{-\frac{\log u}{4A\omega}} du \quad (xe^{-B\omega} = u \text{ とおいた})$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{B\omega}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4A\omega} + 4\varepsilon t} dt \quad (\log u = t \text{ とおいた})$$

$$t \geq B\omega \text{ より } t \leq \frac{36}{\varepsilon} \omega \leq \frac{144}{5} \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{144}{5} \varepsilon A \omega \quad \text{よって}$$

$$4\varepsilon t - \frac{t^2}{4A\omega} \leq -\frac{t^2}{9A\omega}$$

よって $|I_\omega|$ の contribution は

$$\leq \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{B\omega}^{\omega} t e^{-\frac{t^2}{9A\omega}} dt = \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} e^{-\frac{B^2\omega^2}{9A\omega}} 5A\omega$$

$$\ll \sqrt{A\omega} e^{120\omega} e^{-100\omega} \ll \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

以上をまとめると

(4) $f(s)$ は前述のようには定義し,

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'}{f} (s+1+i\delta_1-3\varepsilon) e^{A\omega s^2+B\omega s} ds \quad (a \geq 4\varepsilon)$$

とする。 $A = \frac{1}{\varepsilon^2}$, $B = \frac{36}{\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < 1$), ω 正整数, χ real character

mod k とする

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} \sum_{e^{\frac{B\omega}{2}} \leq n \leq e^{2B\omega}} \frac{N(n)(1+\chi(n)n^{\mp\delta})}{n^{1-3\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(ne^{-B\omega})} \right|$$

$$> |I_\omega| = c_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon} \quad (\text{以下 } c_1, c_2, \dots \text{ はある絶対定数})$$

最初の2のべた Hadamard の定理より, $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2} < 17$

$$\frac{f'}{f}(s) = \frac{h'}{h}(s, \chi_1) + \frac{h'}{h}(s \pm \delta, \chi, \chi)$$

$$= \sum_{|\delta_1 - t_1| < 1} \frac{1}{s - \delta_1} + O(\log k_1(1+|t_1|))$$

$$+ \sum_{|\delta - t_1| < 1} \frac{1}{s \pm \delta - \delta} + O(\log k(1+|t_1|))$$

左に、 $\rho_i = \beta_i + i\delta_i$, $\rho = \beta + i\delta$ はそれぞれ $h(\delta, \chi_1)$, $h(\delta, \chi_1)$ の zero 点とする。この証明はかんたんではないが後に同じような手法を使うところがあるから省略しておく。基本となることは $0 < \beta_i < 1$, $|1 - \delta_i| < 1$ をみたす $h(\delta, \chi_1)$ の zero 点の個数が $O\{\log(k_1(1+|\delta_1|))\}$ となることだけ注意しておく。

一般に $\sigma > 1$ として

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u^{\sigma}} du < 1 + \left[\frac{\log u}{(1-\sigma)u^{\sigma-1}} \right]_1^{\infty}$$

$$-\int_1^{\infty} \frac{du}{(1-\sigma)u^{\sigma}} = 1 + \frac{1}{(\sigma-1)^2} \quad \text{また} \quad \frac{1}{\sigma-1} < S(\sigma) \text{ より}$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \sigma - 1 + \frac{1}{\sigma-1} \quad (\text{Landau})$$

$\delta = 1 + 3\varepsilon + i\delta_1$ とおいて

$$\Re \frac{h'}{h}(\delta, \chi_1) + \Re \frac{h'}{h}(\delta \pm \delta, \chi_1) \leq \sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon}} + \sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon \pm \delta}}$$

$$\leq 2 \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon) \right) \leq 2 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq \frac{4}{\varepsilon}$$

また $1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta$, $|1-\delta_1| \leq 30\varepsilon$ 内にある $f(\delta)$ の zero ρ_i, ρ のみ考えその個数の total を N とすれば

$$\Re \frac{1}{\delta - \rho_i} = \frac{\Re(\delta - \rho_i)}{|\delta - \rho_i|^2} \geq \frac{2\varepsilon}{36\varepsilon^2 + 900\varepsilon^2} = \frac{1}{468\varepsilon}$$

$$\Re \frac{1}{\delta \pm \delta - \rho} = \frac{\Re(\delta \pm \delta - \rho)}{|\delta \pm \delta - \rho|^2} \geq \frac{\varepsilon}{49\varepsilon^2 + 900\varepsilon^2} = \frac{1}{949\varepsilon}$$

以上より

$$\frac{4}{\varepsilon} \geq \frac{N}{1000\varepsilon} + O(\log k(1+|\delta_1|))$$

$$\text{or} \quad \frac{4}{\varepsilon} + C_2 \log k(1+|\delta_1|) \geq \frac{N}{1000\varepsilon}$$

$$\text{or} \quad N \leq 4000 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} C_2 (\log 2k + k^{a\varepsilon}) \right)$$

これより

- (5) $K: 1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta, |t-\delta_1| \leq 3C\varepsilon$ 内にある $f(s)$ の零点の個数を N とすれば

$$N \leq c_3 k^{a\varepsilon} \quad (a \geq 1)$$

この a は主定理の a で (4) の a とは意味がちがう。したがって $a \geq 1$ 。つまりぬこことあるが、ここで次のことを使った。それは後にも使うのであげておく

$$(6) \quad x \geq e^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{ならば} \quad \eta x^{\eta} \geq \frac{1}{6} \log x$$

$$(7) \quad x \geq e^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{ならば} \quad x^2 \geq \frac{1}{24} (\log x)^2$$

いずれも学生の演習問題程度。

次の 2 つは Knapowski の方法の中でもすぐれたものといえる。

$$(8) \quad 1-3\varepsilon \leq \exists \theta \leq 1-2\varepsilon, \quad |t-\delta_1| \leq 21\varepsilon$$

$$\text{such that } \left| \frac{f'}{f}(\theta + it) \right| \leq c_4 k^{(2a+1)\varepsilon}.$$

$$(9) \quad 20\varepsilon \leq \exists \theta' \leq 21\varepsilon, \quad 1-3\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta+\varepsilon$$

$$\text{such that } \left| \frac{f'}{f}(\sigma + i\delta_1 + i\theta') \right| \leq c_5 k^{(2a+1)\varepsilon}.$$

同じようながら (8) を証明する。(5) の矩形 K において strip $(1-3\varepsilon, 1-2\varepsilon)$ を縦割, 等間隔 $(1/N)$ 等分する。その 1 つのせまい strip には zero がないようにできるから, その strip の中間に縦線をひき実数部分を θ とする。ここで $s = \theta + it$ として, 再び前の Hadamard の公式を使って

$$\begin{aligned}
\frac{f'}{f}(\delta) - \frac{f'}{f}(2+it) &= \frac{h'}{h}(\delta, \chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it, \chi_1) \\
&\quad + \frac{h'}{h}(\delta \pm \delta, \chi \chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it \pm \delta, \chi \chi_1) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\delta+a_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+it+a_1}{2}\right) + \sum_{f_1} \frac{2-\sigma}{(\delta-f_1)(2+it-f_1)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\delta \pm \delta + a}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2 \pm \delta + it + a}{2}\right) + \sum_{f'} \frac{2-\sigma}{(\delta \pm \delta - f')(2 \pm \delta + it - f')} \\
&= O(\log(|t|+2)) + \sum_{f_1} + \sum_{f'}
\end{aligned}$$

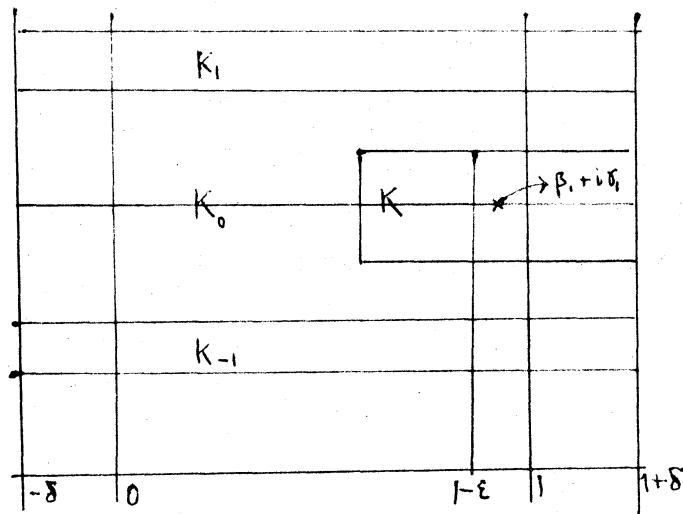
そこで strip $(-\delta, 1+\delta)$ を次のような区間の矩形にわけよう。

$$K: \quad 1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta \quad (\varepsilon \text{ 定義})$$

$$K_0 + K: \quad -\delta \leq \sigma \leq 1+\delta, \quad |t-\delta_1| \leq 30 \quad (\varepsilon \text{ によって } K_0)$$

$$K_j, K_{-j} (j \neq 0): \quad -\delta \leq \sigma \leq 1+\delta, \quad (2j+1) \leq |t-\delta_1| \leq (30+j)$$

右図の $\rho_1 + i\delta_1$ は
主定理 12 のべられ
た $h(\delta, \chi_1)$ の zero
で $h(\delta, \chi_1)$ の一般
的 zero の意味
ではない。 ρ は
 ρ_1 が $K_j (j \neq 0)$ に
あるとき



$$\left| \frac{2-\sigma}{(\delta-f_1)(2+it-f_1)} \right| \leq \frac{2}{h^2} \quad h = |\delta \rho_1 - t|$$

が成立する。なぜなら $\rho_1, \delta, 2+it$ のつくる二等辺三角形の
3辺を $a = |\rho_1 - \delta - it|$, $b = |t - 2|$, $c = |\rho_1 - \delta|$, b を底辺とし

高さ h の正三角形の等辺の長さを d , 頂角を α とする

$$\left| \frac{z - \sigma}{(\delta - \rho_1)(z + it - \rho_1)} \right| \leq \frac{b}{ac} \leq \frac{b}{d^2} = \frac{b \sin 2\alpha}{d^2 \sin 2\alpha} \leq \frac{2b \sin \alpha}{bh} \leq \frac{2 \tan \alpha}{h}$$

$$\leq 2 \frac{\frac{b}{2}}{h} \frac{1}{h} = \frac{b}{h^2} \leq \frac{2}{h^2}$$

このことから

$$\sum_{j \neq 0} \sum_{\rho \in K_j} \ll \sum \log k (|\delta_1| + |j| + 30) \cdot \frac{1}{j^2} \ll k^{a\epsilon}$$

また

$$\sum_{\rho \in K} \ll \frac{k^{a\epsilon}}{\epsilon} k^{a\epsilon} \ll k^{(2a+1)\epsilon} \quad (k \geq e^{\frac{1}{\epsilon^2}} \text{ 又 } k^\epsilon \gg \log k \geq \frac{1}{\epsilon})$$

$\approx k^{12}$

$$\sum_{\rho \in K_0} \ll \frac{1}{\epsilon} k^{a\epsilon} \ll k^{(a+1)\epsilon}$$

以上により (8) がえられる。

さて $4\epsilon + \delta + i\omega$

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{4\epsilon + \delta - i\omega}^{4\epsilon + \delta + i\omega} \frac{f'}{f} (\delta + 1 + i\delta_1 - 3\epsilon) e^{A\omega\delta^2 + B\omega\delta} d\delta, \quad A = \frac{1}{\epsilon^2}, B = \frac{3\sigma}{\epsilon}$$

$$\frac{f'}{f}(\delta) = \frac{h'}{h}(\delta, \chi_1) + \frac{h'}{h}(\delta \pm \delta, \chi \chi_1)$$

において積分路を移動し留数の定理を用い

$$I_\omega = I_1 + I_2 + I_3 + (K^* \text{ における } \text{residue})$$

と分ける。こゝに I_j, K^* は次のように

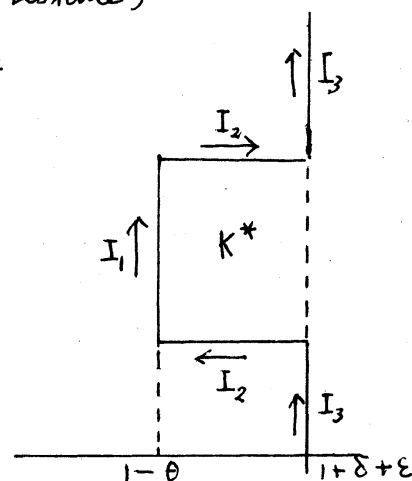
して定まる。

$$I_1: \delta = \theta - 1 + 3\epsilon + it, \quad |t| \leq \theta'$$

$$I_2: \delta = \sigma \pm i\theta', \quad \theta - 1 + 3\epsilon \leq \sigma \leq 4\epsilon + \delta$$

$$I_3: \delta = 4\epsilon + \delta + it, \quad \theta' \leq |t| < \infty$$

以下 I_j の評価。



$$I_1 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega\varepsilon^2 + B\omega\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}$$

$$I_2 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega(4\varepsilon^2 - \theta'^2) + B\omega 4\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{4\omega - 400\omega + 120\omega} \\ = k^{(2a+1)\varepsilon} e^{-240\omega}$$

$$I_3 \ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} \log^2 k (|t|+2) e^{A\omega(25\varepsilon^2 - t^2) + B\omega 5\varepsilon} dt \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} \leq \log k\right)$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t) e^{A\omega(25\varepsilon^2 - \frac{1}{2} 400\varepsilon^2 - \frac{1}{2} t^2) + 150\omega} dt$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t) e^{-25\omega} e^{-\omega \frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \quad (t = 20\varepsilon u)$$

$$\ll \int_1^{\infty} (\log^2 k + \log^2 20\varepsilon + \log^2 u) e^{-25\omega} e^{-200\omega u^2} 20\varepsilon du$$

$$\ll e^{-25\omega} \log^2 k \ll e^{-25\omega} k^\varepsilon \ll k^{a\varepsilon} e^{-25\omega}$$

おくと

$$I_\omega = \sum_{p \in K^*} \left\{ e^{A\omega(p_1 - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)^2 + B\omega(p_1 - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)} \right. \\ \left. + e^{A\omega(p - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)^2 + B\omega(p - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)} \right\} \\ + O(k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega})$$

{ } 内の各項を x_j とおくと $p_1 = \beta_1 + i\delta_1$ が K^* 内にあるから

x_j の set は空ではない、よって

$$\max |x_j| \geq e^{A\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)^2 + B\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)} \\ > e^{4A\varepsilon^2 + 2B\omega} = e^{64\omega}$$

こゝで有名な Turan の基本定理を使う。

Turan の基本定理: z_j complex, $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$
 g, M positive, N は M より小なる正整数。これを与えたと
 とき次のような正整数 ω が存在する

$$g \leq \omega \leq g + M$$

$$|z_1^\omega + z_2^\omega + \dots + z_N^\omega| \geq \left(\frac{M}{8(g+M)} \right)^M |z_1|^\omega$$

この定理を上記 $I\omega$ の右辺に適用するため

$$g = d\varepsilon \log k, \quad M = d\varepsilon \log k$$

とおく。 $d > 1$ は後で適当に条件のつけられる定数とする。

$$|I\omega| > e^{61\omega} \left(\frac{1}{16} \right)^{d\varepsilon \log k} - C_6 k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}$$

よって

$$d\varepsilon \log k \leq \omega \leq 2d\varepsilon \log k$$

であるから

$$|I\omega| > k^{\varepsilon 61d} - k^{\varepsilon(2a+1 + \log C_6 - 62d)}$$

$$\text{よって } C_6 = e^{\log C_6} \leq e^{\varepsilon \log k \cdot \log C_6} = k^{\varepsilon \log C_6} \text{ 故に}$$

$$61d \geq 2a+1 + \log 2C_6 - 62d, \quad d \geq \frac{2a+1 + \log 2C_6}{123}$$

なるように d をとると

$$|I\omega| > \frac{1}{2} k^{\varepsilon 61d}$$

(4) により

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} \sum_{e^{\frac{3\omega}{2}} \leq n \leq e^{2B\omega}} \frac{\Lambda(n)(1 + \Lambda(n)n^{-\beta\delta})}{n^{1-\beta\delta}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(ne^{-B\omega})} \right|$$

$$> \frac{1}{2} k^{\varepsilon 61d} - C_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

2.5.3.12

$$+C_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon} \leq k^{\varepsilon \log 4C_1 + \varepsilon + 42d\varepsilon} \leq k^{\varepsilon(\log 4C_1 + 1 + 42d)} \leq k^{\varepsilon 61d}$$

$$\text{if } d \geq \frac{\log 4C_1 + 1}{29}$$

2.5.3.13

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}A\omega} e^{2B\omega(\delta+3\varepsilon)} \sum_{\substack{\frac{B\omega}{2} \leq n \leq e^{2B\omega} \\ n=p^m}} \frac{1+\chi(n)n^{-\delta}}{n} > \frac{1}{4} k^{\varepsilon 61d}$$

2.5.3.14

$$\frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} \leq 30\sqrt{\omega}, \quad e^{2B\omega(\delta+3\varepsilon)} \leq e^{60 \cdot 2d\varepsilon \log k} = k^{\varepsilon 120d}$$

2.5.3.15

$$\sum_{\substack{\frac{B\omega}{2} \leq n \leq e^{2B\omega} \\ n=p^m}} \frac{1+\chi(n)n^{-\delta}}{n} > \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{30\sqrt{\omega}} k^{-59d\varepsilon} > \frac{1}{80k^{60d\varepsilon}}$$

2.5.3.16

(10) C_7 is a sufficiently large absolute constant ε, a is fixed ε $d \geq \frac{a}{60} + C_7$

2.5.3.17

$$\sum_{k^{15d} \leq p^m \leq k^{120d}} \frac{1+\chi(p^m)p^{-m\delta}}{p^m} > \frac{1}{80k^{60d\varepsilon}}$$

2.5.3.18

$$\delta \leq \frac{1}{k^{6\varepsilon}}$$

2.5.3.19 ε is a sufficiently large absolute constant ε is fixed ε ε

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k^{15d} \leq n \leq k^{120d} \\ \chi(n) = -1 \\ n=p^m}} \frac{1+\chi(n)n^{-\delta}}{n} &= \sum \frac{1-\frac{1}{n^\delta}}{n} \leq \sum \frac{1-e^{-\delta \log n}}{n} \\ &\leq \sum \frac{\delta \log n}{n} \leq \sum \frac{\delta 120d \log k}{n} \end{aligned}$$

$$\leq \delta 120d \log k (120d \log k - 15d \log k + O\left(\frac{1}{k^{15d}}\right))$$

$$\leq \frac{120^2 d^2 \log^2 k}{k^{1+\varepsilon}} \leq \frac{k^\varepsilon (1 + \log(120^3 \cdot 24d^2))}{k^{6\varepsilon}} \cdot \frac{1}{120}$$

$$\leq \frac{1}{120} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}} \quad \text{if } b \geq 60d + 1 + \log(120^3 \cdot 24 \cdot d^2)$$

(10) に よ

$$\sum_{\substack{k^{15d} \leq n \leq k^{120d} \\ n = p^m \\ \chi(n) = 0 \text{ or } 1}} \frac{1 + \chi(p^m) p^{-md}}{p^m} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

周知のよう に $\alpha > 1$ で $\zeta(s) L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ とおくと

$$a_n = \sum_{d|n} \chi(d), \quad n = p^m \text{ のときは } a_n = 1 + \chi(p) + \dots + \chi(p)^m$$

したがって $\chi(p^m) = 0$ 又は 1 ならば

$$a_n \geq 1 \quad (\chi(p) = -1 \text{ なら } \chi(p)^m = 1 \text{ なるため } m \text{ は even})$$

故に

$$\sum_{k^{15d} \leq n \leq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

まとめ

$$(11) \quad b \geq 60d + 1 + \log(120^3 \cdot 24d^2), \quad \delta \leq \frac{1}{k^{6\varepsilon}} \text{ ならば}$$

$$\sum_{k^{15d} \leq n \leq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{480} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

よって 次の式が成立つ。

C は Euler の定数 とすると

$$(12) \quad \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} = h(1, x) (\log x + C) + h'(1, x) + O\left(k \frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$$

一般に $\phi(t)$ は smooth な函数とすると $A(t) = \sum_{n \leq t} a_n$ とし

$$A(x)\phi(x) - \sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = \sum_{n \leq x} \int_n^x a_n \phi'(t) dt = \int_1^x \left(\sum_{n \leq t} a_n \right) \phi'(t) dt$$

と仮定して $x, y \geq 1$ とし

$$\sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = - \int_1^x A(t) \phi'(t) dt + A(x) \phi(x)$$

$$\sum_{y < n \leq x} a_n \phi(n) = - \int_y^x A(t) \phi'(t) dt + A(x) \phi(x) - A(y) \phi(y)$$

これを用いて

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \log n}{n} = -h'(1, x) + O\left(2k \frac{\log x}{x}\right)$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} = h(1, x) + O\left(\frac{2k}{x}\right), \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{2}{x}\right)$$

が導かれる。 $x = x$

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{m} + \sum_{\sqrt{x} < d \leq \frac{x}{m}} \frac{1}{m} \sum_{\sqrt{x} < d \leq \frac{x}{m}} \frac{\chi(d)}{d}$$

と上記の結果を代入し整理すれば (12) がえられる。

(12) に k が十分大ならば

$$\sum_{k^{15d} \leq n \leq k^{120d}} \frac{a_n}{n} \leq 120 d \log k \cdot h(1, x)$$

よって (11) の条件の下に

$$120 d \log k \cdot h(1, x) > \frac{1}{480} \frac{1}{k^{60d\delta}}$$

$$\text{よって } \delta \leq \frac{1}{k^{60\epsilon}} \text{ より}$$

$$\frac{h(1, x)}{\delta} > \frac{k^{60\epsilon}}{120 \cdot 480 d \log k \cdot k^{60d\epsilon}} > \frac{k^{\epsilon(1 + \log(120 \cdot 4d^2))}}{120^2 \cdot 4 d \log k}$$

よって

$$\frac{h(1, x)}{\delta} = \frac{h(1, x) - h(\beta, x)}{1 - \beta} = h'(\alpha, x) \ll c_\delta \log^2 k \quad (1 - \delta < \alpha < 1)$$

よって

$$120^2 + d c_8 \log^3 k > k^{\varepsilon(1 + \log(120^3 + d^2))}$$

$$(6), (7) \text{ によつて左辺は } k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \text{ 以上}$$

$$< 120^2 + d c_8 \cdot 6.29 \varepsilon k^{2\varepsilon} < k^{\varepsilon(2 + \log(120^3 c_8 d))}$$

したがつて d を十分大きくとれば矛盾が生ずる。以上を整理して主定理の結果がえられる。今までの計算を更に細部にわたつて反省してみると次のように述べた方がきまらふ。

主定理の整理した形: χ を non-principal primitive real character to the modulus k . Page の理論によれば絶対定数 c が存在して

$$1 - \frac{c}{\log k} \leq \delta \leq 1 \quad (\text{勿論 } kc < 1)$$

の実軸の部分には $L(\delta, \chi)$ の zero β があるとしても高々 1 つである。そのような zero を exceptional or Siegel zero とする。

そのような zero が存在するとして $\delta = 1 - \beta$ とおく。 χ_1 を primitive character mod k_1 として $k_1 \leq k$. そのような一つの $L(\delta, \chi_1)$ が 3 つはないう zero $\beta_1 + i\gamma_1$ を

$$1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 \quad e^{k^{a\varepsilon}} \geq |\gamma_1|$$

なる範囲に 1 つでもあったとする。 ε は任意に与えられた正数 (たゞし $0 < \varepsilon < 1$), a は十分大きな正数とする。そのとき $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ として

$$\delta > \frac{1}{k^{a\varepsilon}} \quad (a \text{ は絶対定数})$$

この結果が $h(1, \lambda)$ の評価 (下からの) と関連をとつことは次のようにしてわかる。(1) より

$$0 = \zeta(\beta) h(\beta, \lambda) \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{c_1 h(1, \lambda)}{1-\beta} k^{8c_0(1-\beta)} \quad (c \in c_0 \text{ と } \lambda \geq 2)$$

したがって

$$h(1, \lambda) \geq \frac{1}{2c_1} (1-\beta) k^{-8c_0(1-\beta)} \geq \frac{1}{2c_1} (1-\beta) k^{-\frac{8c_0}{\beta} \frac{c}{\log n}}$$

これは $\frac{7}{8} < \beta < 1$ と考えればよいから。よって

$$\frac{h(1, \lambda)}{1-\beta} \geq \frac{1}{2c_1} e^{-8c_0 c}$$

したがって $\delta = 1-\beta > \frac{1}{k^{ae}}$ なら $h(1, \lambda) \geq \frac{1}{2c_1 e^{8c_0 c} k^{ae}}$

最後に Turan の基本定理の証明をつけ加えておく。

(13) α, β complex それを結ぶ閉線分を $[\alpha, \beta]$ とかく。

$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ $\in$ complex coefficients, そのとき

$$\max_{z \in [\alpha, \beta]} |p_n(z)| \geq \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{|\beta - \alpha|}{4} \right)^n$$

proof (Touji)

$$p_n(a \cos x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \dots + a_1 \cos x + a_0$$

$$\text{よ } a_n = \frac{a^n}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} 2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_n(a \cos x)| &= \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_n(a \cos x)| \int_0^\pi |\cos nx| dx \\ &\geq \left| \int_0^\pi p_n(a \cos x) \cos nx dx \right| = \left| a_n \frac{\pi}{2} \right| = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$\text{故 } \max_{z \in [-a, a]} |p_n(z)| \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^n, \quad z - \alpha = (x+a) \frac{\beta - \alpha}{2a} \text{ とおけば}$$

これは $[\alpha, \beta]$ は x について $[-a, a]$ に変換される上より。

(14) (Nörhnd) Γ : Jordan 閉曲線, $g(z)$ は Γ の外部から ∞ へ向いて正則かつ $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, Γ の外部に $l (\geq 2)$ 個の点 $w_1, \dots, w_l$ 次数高々 $l-1$ 次の多項式 $f(z)$ で $f(w_j) = g(w_j) \ (1 \leq j \leq l)$ とおけるものは左に一つ存在するが, それを次の形に表わせる。

$$f(w) = e_0 + e_1(w-w_1) + \dots + e_{l-1}(w-w_1) \dots (w-w_{l-1})$$

$$e_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-w_1) \dots (z-w_{j+1})} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

proof. $2 \leq j \leq l$ に對し

$$\frac{1}{z-w} \left\{ \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{j-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{j-1})} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_j)}{(z-w_1) \dots (z-w_j)} \right\} = \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{j-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{j-1})(z-w_j)}$$

は恒等的に成立つが, それらを加えて

$$\sum_{j=2}^l \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_1} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_l)}{(z-w)(z-w_1) \dots (z-w_l)}$$

$f(w)$ を上記のようになおくと

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \left\{ \frac{1}{z-w_1} + \frac{w-w_1}{(z-w_1)(z-w_2)} + \dots + \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{l-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{l-1})(z-w_l)} \right\} dz$$

上の関係より

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \left\{ \frac{1}{z-w} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_l)}{(z-w)(z-w_1) \dots (z-w_l)} \right\} dz$$

故に

$$\begin{aligned} f(w_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-w_j} dz \quad (1 \leq j \leq l) \\ &= g(w_j) \end{aligned}$$

ただし積分路は時計の針の方向にとる。 $g(z) \rightarrow 0 \ (|z| \rightarrow \infty)$ を利用する。

これらの準備のもとに

(15) P. Turan: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, 1953.

$b_1, b_2, \dots, b_k$ complex, $1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_k|$

$$\max_{m \leq \nu \leq m+n} |b_1 z_1^\nu + \dots + b_k z_k^\nu| \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{8e(m+n)} \right)^n \min_{1 \leq l \leq k} |b_1 + \dots + b_l|$$

$m \geq 0, n \geq k$ is real, ν is integer

proof $P(z) = \prod_{j=1}^k (z - |z_j|)$

$0 < t < 1$ なる t を任意的に与えたいとき (13) により

$$\max_{1-t \leq z \leq 1} |P(z)| \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{4} \right)^k$$

左辺を最大ならしめる z を $\tau = \tau(t)$ とおく。そのような τ が

2つ以上あれば便宜上一番大きいものときめる。そのような

τ に対して, $z_1, \dots, z_k$ の中から任意に一部分をとって

$$Q(z) = \prod (z - z_l)$$

を作る

$$\min_{|z|=\tau} |Q(z)| \geq \prod (\tau - |z_l|) \geq \prod_{j=1}^k (\tau - |z_j|) = |P(\tau)| \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{4} \right)^k$$

あとで極限操作をほどせばよいから

$$1 = |z_1| > \dots > |z_l| > |z_{l+1}| > \dots > |z_k|$$

としてよい。上記 τ はたしかに 1 より小 によって

$$|z_l| > \tau > |z_{l+1}|$$

なる l がある。このとき

$$f_l(z) = (z - z_{l+1}) \dots (z - z_k) = C_0^{(l)} z^{k-l} + C_1^{(l)} z^{k-l-1} + \dots + C_{k-l}^{(l)}$$

$C_0^{(l)} = 1$ とおく。 $f_l(z) = 1$ の場合もありうる。 $|z_j| < 1$ ($l+1 \leq j \leq k$)

であるから

$$|c_j^{(1)}| \leq \binom{k-l}{j} \quad (0 \leq j \leq k-l)$$

(14) によって $z_1, \dots, z_l$ でそれぞれ

$$\frac{1}{z_1^{m+1} f_1(z_1)}, \dots, \frac{1}{z_l^{m+1} f_l(z_l)}$$

なる値をとる高々 $l-1$ 次の多項式 $f_2(z)$ を次のように作れる。

$$f_2(z) = c_0^{(2)} + c_1^{(2)}(z-z_1) + \dots + c_{l-1}^{(2)}(z-z_1) \cdots (z-z_{l-1})$$

$$c_j^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^{m+1} f_1(z)(z-z_1) \cdots (z-z_{j+1})} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

前の $Q(z)$ として $f_1(z)(z-z_1) \cdots (z-z_{j+1})$ を使うと

$$|c_j^{(2)}| \leq \frac{1}{2r} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^{m+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^k} \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

t は適当に定めるが $m=0$ のときは $t=1$ ととることもできる。

$f_2(z)$ を

$$c_0^{(3)} + c_1^{(3)} z + \dots + c_{l-1}^{(3)} z^{l-1}$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned} c_j^{(3)} &= c_j^{(2)} - c_{j+1}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 \leq j+1} z_{r_1} + c_{j+2}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq j+2} z_{r_1} z_{r_2} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{l-j-1} c_{l-1}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{l-j-1} \leq l-1} z_{r_1} z_{r_2} \dots z_{r_{l-j-1}}. \end{aligned}$$

故に

$$|c_j^{(3)}| \leq |c_j^{(2)}| + |c_{j+1}^{(2)}| \binom{j+1}{1} + |c_{j+2}^{(2)}| \binom{j+2}{2} + \dots + |c_{l-1}^{(2)}| \binom{l-1}{l-j-1}$$

上記評価により

$$\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{1}{4}\right)^k} \left\{ 1 + \binom{j+1}{1} + \binom{j+2}{2} + \dots + \binom{l-1}{l-j-1} \right\}$$

一般に

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r}$$

であるから連立帰納法で

$$1 + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n}$$

が証明されるので

$$|c_j^{(3)}| \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^n \left(\frac{t}{4}\right)^k} \binom{l}{l-j-1} = \dots \binom{l}{j+1} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

そこで m を整数とし

$$f_3(z) = z^{m+1} f_1(z) f_2(z) = c_{m+1}^{(4)} z^{m+1} + \dots + c_{m+k}^{(4)} z^{m+k}$$

と置く。作り方は

$$f_3(z_1) = \dots = f_3(z_l) = 1$$

$$f_3(z_{l+1}) = \dots = f_3(z_k) = 0$$

これらの両辺に

$$b_1, \dots, b_l$$

$$b_{l+1}, \dots, b_k$$

をそれぞれ加える

$$c_{m+1}^{(4)} (b_1 z_1^{m+1} + \dots + b_k z_k^{m+1}) + \dots + c_{m+k}^{(4)} (b_1 z_1^{m+k} + \dots + b_k z_k^{m+k}) \\ = b_1 + \dots + b_l$$

$$\text{よって } \{ |c_{m+1}^{(4)}| + \dots + |c_{m+k}^{(4)}| \} \max_{v=m+1, \dots, m+k} |b_1 z_1^v + \dots + b_k z_k^v| \geq |b_1 + \dots + b_l|$$

しからず

$$c_{m+1}^{(4)} + c_{m+2}^{(4)} z + \dots + c_{m+k}^{(4)} z^{k-1} = (c_0^{(1)} z^{k-l} + \dots + c_{k-l}^{(1)}) (c_0^{(3)} + c_1^{(3)} z + \dots + c_{l-1}^{(3)} z^{l-1})$$

であるから

$$\begin{aligned}
& |C_{m+1}^{(4)}| + |C_{m+2}^{(4)}| + \dots + |C_{m+k}^{(4)}| \leq (|C_0^{(1)}| + \dots + |C_{k-1}^{(1)}|) (|C_0^{(3)}| + \dots + |C_{l-1}^{(3)}|) \\
& \leq \left\{ 1 + \binom{k-l}{1} + \dots + \binom{k-l}{k-l} \right\} \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-t)^n \left(\frac{1}{4}\right)^k} \left\{ \binom{l}{1} + \binom{l}{2} + \dots + \binom{l}{l} \right\} \\
& \leq \frac{2^k}{\frac{\pi}{2}(1-t)^n \left(\frac{1}{4}\right)^k}
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
& \max_{\nu=m+1, \dots, m+k} |b_\nu z_\nu^\nu + \dots + b_k z_k^\nu| \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} (1-t)^n t^k \min_{1 \leq l \leq k} |b_l + \dots + b_l| \\
& n \geq 0 \text{ integer}
\end{aligned}$$

故に $m \geq 0$ を任意の real, $n \geq k$ を任意の real とすれば

$$\max_{m \leq \nu \leq m+n} |b_\nu z_\nu^\nu + \dots + b_k z_k^\nu| \geq \max_{[m]+1 \leq \nu \leq [m]+k} | \quad | \geq C \min_{1 \leq l \leq k} |b_l + \dots + b_l|$$

こゝに C は次のようにとれる

$$C = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} \left(\frac{[m]}{n+[m]} \right)^{[m]} \left(\frac{n}{n+[m]} \right)^k & m \geq 1 \quad (t = \frac{n}{n+[m]} \geq \frac{1}{2}) \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} & 1 > m \geq 0 \quad (t = 1 \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$m \geq 1, n \geq k \text{ ならば } \left(\frac{n}{n+[m]} \right)^k \geq \left(\frac{n}{n+m} \right)^k \geq \left(\frac{n}{n+m} \right)^n$$

$$m \geq 1 \text{ ならば } \left(\frac{[m]}{n+[m]} \right)^{[m]} \geq e^{-n}$$

以上より $m \geq 1$ ならば

$$C \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^n} e^{-n} \left(\frac{n}{n+m} \right)^n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{8e(n+m)} \right)^n$$

$$1 > m \geq 0 \text{ ならば } C \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{8e(n+m)} \right)^n$$

Turan の原証明では (13) の代りに古典函数論にてくる

Cartan の lemma を使っている。以上をよむための文献と

しては Prachar の書物のほかに, A. Page: On the number of the

primes in an arithmetic progression; Proc. London Math. Soc. (1935)