

Near Miss abc -Triples in General Number Fields (要約)

河口祐輝

互いに素な有理整数の 3 つ組 (a, b, c) で $a + b + c = 0$ を満たすものを abc 3 つ組という。 abc 予想の主張は、任意の $\varepsilon > 0$ についてある $C_\varepsilon > 0$ が存在し任意の abc 3 つ組 (a, b, c) について

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} < C_\varepsilon \left(\prod_{\substack{p: \text{素数} \\ p|abc}} p \right)^{1+\varepsilon}$$

が成り立つことである。Masser 等はニアミス abc 3 つ組と呼ぶべき、漸近的にこの不等式の反例に近い振る舞いをする abc 3 つ組の列を構成した。

本論文では一般の数体について Masser による結果と類似の性質を満たす (定義を拡張した) abc -3 つ組の列を構成した。さらに例外を除いた (Galois 群を用いて特徴づけられる) クラスの数体について、その列に現れる abc 3 つ組を、真の部分体の abc -3 つ組の定数倍としないように取ることができることを証明した。

定義 0.1. L を数体とする。 $a, b, c \in L$ について (a, b, c) が強 abc 3 つ組であるとは a, b, c が L の整数環の単位イデアルを生成する非零元であり $a + b + c = 0$ を満たすことをいう。強 abc 3 つ組 (a, b, c) についてその導手を

$$P_L(a, b, c) = \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}^{\text{non}}(L) \\ \|abc\|_v < 1}} N_L(\mathfrak{p}_v)$$

で、また高さを

$$H_L(a, b, c) = \prod_{v \in \mathbb{V}^{\text{arc}}(L)} \max\{\|a\|_v, \|b\|_v, \|c\|_v\}$$

で定義する。ここで $\mathbb{V}^{\text{non}}(L), \mathbb{V}^{\text{arc}}(L)$ はそれぞれ L の有限素点の集合、無限素点の集合、 $\|\cdot\|_v$ は v に付随する正規化された L 上の絶対値、 $\mathfrak{p}_v$ は有限素点 v に付随する L の整数環の素イデアル、 $N_L(\cdot)$ は L におけるイデアルノルムを表す。

本論文の主定理は以下である。

Theorem 0.1. L を虚 2 次体とし、唯一の L の無限素点により L を $\mathbb{C}$ の部分体とみなす。 $\gamma < \frac{1}{2}$ なる正の実数 γ, P_0 について、次を満たす強 abc 3 つ組 (a, b, c) が存在する：

- $P_L(a, b, c) > P_0$;
- $|abc|^2 > P_L(a, b, c)^3 \exp\left((\log P_L(a, b, c))^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)$.

Theorem 0.2. L を数体とし、 u_0 を 1 の冪根でない L の単数とする。 $\delta < 1$ なる正の実数 δ, P_0 について、次を満たす正整数 l が存在する： $a = -1, b = u_0^l, c = 1 - u_0^l$ とすると

- (a, b, c) は強 abc 3 つ組である;
- $P_L(a, b, c) > P_0$;
- $H_L(a, b, c) > P_L(a, b, c)(\log P_L(a, b, c))^{1-\delta}$.