

有理関数の **HOLOMORPHIC FAMILY** について

志賀 啓成

(Hiroshige Shiga)

東京工業大学 理学部

有理関数 (次数はつねに 2 以上) の holomorphic family に関する二つの結果を述べる. ただし証明の詳細は準備中の論文に譲り, 結果の報告と略証のみにとどめる.

0. 準備.

複素多様体 W をパラメータ空間とする次数 $d > 1$ の有理関数の holomorphic family $\{R_\lambda\}_{\lambda \in W}$ の分類について述べる. 詳細は[MS]: McMullen-Sullivan “Quasiconformal Homeomorphism and Dynamics III”(preprint) を参考にされたい.

パラメータ空間 W の点で, その点のある近傍 U ではすべての $R_\lambda (\lambda \in U)$ が互いに Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}}$ のある位相写像による共役になっているような点全体を W^{top} と書くことにする. この定義で位相写像として擬等角写像がとれるものを W^{qc} と書くことにする.

これに対して R_λ と $R_{\lambda'} (\lambda, \lambda' \in U)$ が Julia 集合上で ($\hat{\mathbb{C}}$ 上の) 擬等角写像で共役であるとき J-stable (or stable) といい, このようなパラメーター全体を W^{stable} とかくことにする. すなわち W^{stable} とは, 各 $\lambda \in W^{stable}$ に対して, ある W での近傍 U がとれて, 任意の $\lambda' \in U$ に対して $\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像 $f_{\lambda'}$ が

とれて,

$$R_{\lambda'} \circ f_{\lambda'} = f_{\lambda'} \circ R_{\lambda}$$

が R_{λ} のジュリア集合上で成立することである.

次に, postcritically stable parameters の集合, W^{post} を定義する. そのため, まず critical points の orbit relation という概念について説明する.

有理関数 $R_{\lambda}(z)$ の critical points 全体の集合を $\{c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda)\}$ としたとき, 整数の組 (i, j, k, ℓ) が orbit relation であるとは,

$$R_{\lambda}^k(c_i(\lambda)) = R_{\lambda}^{\ell}(c_j(\lambda)) \quad 1 \leq i, j \leq n; 0 \leq k, \ell$$

が成立することとする. この orbit relations が局所的に安定であるような parameters $\lambda \in W$ 全体の集合を W^{post} と書き, postcritically stable parameters の集合と呼ぶ.

これらの間には $W^{qc} \subset W^{top} \subset W^{post}$ なる包含関係があることはすぐ分かるが, 実は

$$W^{qc} = W^{top} = W^{post} \subset W^{stable}$$

であることが知られている[MS].

1. **Attractive な family の境界としての Siegel disk の性質について.**

Caeleson-Gamelin の text に次のような結果が載っている(Complex Dynamics, Springer-Verlag, 1993, p. 86, Theorem 1.4).

Theorem A. $P_{\lambda}(z) = \lambda(z - z^2/2), \lambda = e^{i\theta}$ を考える. このとき, ほとんど至るところの θ に対して P_{λ} は Siegel disk を持ち, かつその境界上に critical point $z = 1$ がある.

この定理は示唆に富んだ結果である. 上の P_{λ} は単位円 $\Delta = \{|\lambda| < 1\}$ をパラメーター空間とする有理関数の family の境界にあると考えられる. しかも, 任意の

$\lambda \in \Delta$ に対して P_λ は $z = 0$ を attracting fixed point に持ち, その multiplier が λ になっている. よく知られているように attractive basin には critical point が含まれているから, 上の定理は attractive basin の極限としての Siegel disk が critical point に関しても極限的な状態にあることを意味している.

一般に Siegel disk の境界に critical point が存在するかというのは問題であるが, Herman がこれに対して反例を構成しているようである. 一方, 最近 Rogers (preprint) によって, 多項式の場合 neutral periodic point の multiplier が Diophantine number より定まる場合は (Siegel disk を持ち), その Siegel disk の境界に critical point が存在することが示されている. Rogers の結果を認めると Theorem A は次のように拡張される.

Corollary. W を平面領域として, $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする多項式の連続な family で W で stable かつ holomorphic なものとする. このとき, もしある $\lambda_0 \in W$ で P_{λ_0} が attracting cycle を含んでいるならば, ほとんど至るところの点 $\lambda \in \partial W$ に対して P_λ はやはり対応する attracting cycle を持っているか, またはその境界上に critical point を含むような Siegel disk を持つ.

ここで family $\{P_\lambda\}_{\lambda \in W}$ が stable とは, $W^{stable} = W$ であるときをいう.

(略証) 簡単のために attracting fixed point の場合に証明する. Holomorphic family が stable という仮定から, Fatou 成分は labelling が可能になる. すなわち, $P_\lambda (\lambda \in W)$ の attracting fixed point $a(\lambda)$ を λ について holomorphic になるように取れる. したがって, $a(\lambda)$ における multiplier $\varphi(\lambda) = P'_\lambda(a(\lambda))$ も λ に関して holomorphic になる. $a(\lambda)$ は attractive であったから,

$$|\varphi(\lambda)| = |P'_\lambda(a(\lambda))| < 1.$$

すなわち, $\varphi(\lambda)$ は W から単位円板 Δ への正則写像になる.

単位円 $\partial\Delta = \{e^{2\pi\theta} \mid 0 \leq \theta < 1\}$ において, θ が Diophantine 数でない集合を E とする. このとき, 正則写像の性質より φ によって E に対応する点は ∂W 上で調和測度が 0 になることが知られている. 換言すれば, ほとんど全ての点での φ の境界値は $\bar{\Delta} - E$ に値を持っている. よって, 上記の Rogers の結果より求める主張が成立する.

有理関数の family に関しては, Theorem A の形で証明することは今のところできていないが, 次のように少し条件をつけた形では証明できる (ただし, ここでは証明はしない).

Theorem 1. $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする有理関数の連続な family で, W で *stable* かつ *holomorphic* なものとする. このとき, もしある $\lambda_0 \in W$ で R_{λ_0} がその *periodic component* に *critical point* を一つしか含まないような *attracting cycle* をもっているならば, ほとんど至るところの点 $\lambda \in \partial W$ に対して *Corollary* と同じ主張が成り立つ.

上の定理では「stable family」という仮定を設けたが, 特別な holomorphic family に関してはこの条件は自動的に満たされる. 例えば次の系が証明できる.

Corollary. $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \overline{W}}$ を $\overline{W}$ をパラメーター空間とする有理関数の連続な family で, 任意の $\lambda \in W$ に対して R_λ はちょうど $(2d-2)$ 個の *attracting cycles* を持っているとは定する. そのとき Theorem 1 と同じ結論が成立する.

(Corollary の略証) 条件より, R_λ に対しては各 *attracting cycle* 内にはただ一つの *critical point* が存在する. その *critical points* を $c_1(\lambda), \dots, c_{2d-2}(\lambda)$ とすると, これらの *critical points* の orbit relation は trivial なものしかない (異なる *critical points* 同士の orbits は異なる). よって $W = W^{post} = W^{qc}$. したがって, この family は *stable* になるので定理 1 の仮定が満たされ, 求める結論が導かれる.

Remark. 実際に上の系の仮定を満たす有理関数は任意の $d > 1$ について構成することが出来る.

2. Riemann surface 上の有理関数の holomorphic family について.

次にパラメーター空間が有限型 Riemann 面 S の場合, 次数 $d > 1$ の有理関数の non-trivial holomorphic family の有限性を考える. ファイバーが有理関数ではなく (有限型) Riemann 面の場合には, このような families の個数の有限性は知られているし, 特別な場合にはその個数の上限を S の複素構造に依らず評価できる. 一方, 有理関数の family については, family に制限をつけなければ無限個存在する.

実際, $\bar{S}$ を任意の compact Riemann 面として, f を $\bar{S}$ 上の非定数有理型関数とする. S を f の zero 点, 極を取り除いた有限型 Riemann 面とする. このとき, 任意の有理関数 $R(z)$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S \ni p \mapsto f^n(p)R(z)$$

および

$$S \ni p \mapsto R(z) + nf(p)$$

などは有理関数の S 上の holomorphic family を定める. ここで, うまく $R(z)$ を選べば (むしろ, ほとんどの $R(z)$ に対して), 上のような holomorphic families は non-trivial で, 異なる n に対しては異なる families が得られることが分かる. したがって, $n = 1, 2, \dots$ を考えれば, 無限個の holomorphic families が得られることが分かる.

一方, McMullen の結果 (Ann. of Math. **135**, 1987) によれば, S をパラメーター空間とする stable holomorphic family は trivial または affine rational maps の family となり有限性の問題は容易に解決される. ここで affine rational map とは, (complex) multiplication から induce される torus の holomorphic

endomorphism で torus の hyperelliptic involution と equivariant なものの projection であるときをいう。

ここでは “stable” よりも弱い条件を考え、このもとで family の有限性を導く。

Theorem 2. S を (g, n) 型の Riemann 面, $d > 1$ を整数とする. このとき S をパラメーター空間とする次数 d の有理関数の separative な families は高々有限個でその個数は g, n, d で (S の等角構造に依らずに) 上から評価される.

ここで family が separative とは以下のように定義する.

Definition 1. 与えられた自然数 n に対して, W を parameter 空間とする次数 $d > 1$ の有理関数の holomorphic family $\{R_\lambda(z)\}_{\lambda \in W}$ が order n の separative family であるとは, 任意の $\lambda_0 \in W$ に対して次の条件を満たす近傍 U が取れることとする.

各 $\lambda \in U$ に対して $\hat{\mathbb{C}}$ 内に n 個の点からなる集合 E_λ が取れて, 以下を満たす.

- (1) $R_\lambda(E_\lambda) = E_\lambda$.
- (2) $E_\lambda = \{a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda)\}$ としたとき, 各 $a_j(\cdot) (j = 1, \dots, n)$ は U 内で解析的である.
- (3) $a_j(\lambda)$ が R_λ のある周期 k の周期点ならば, 周期 k のその他の周期点は全て E_λ に含まれる.

stable ならば, 十分高い order で上の separative 条件を満たす. 実際, stable family $\{R_\lambda\}_{\lambda \in W}$ に対して十分周期の大きい周期点全体を考え, それを E_λ とする. 周期を大きく取っておくと, これらは repelling periodic points からなり, したがって E_λ は R_λ のジュリア集合 $J(R_\lambda)$ に含まれる. また, $\{R_\lambda\}_{\lambda \in W}$ は stable であるから $J(R_\lambda)$ では擬等角写像による共役である. したがって上記の separative 条件を満たすことが分かる. すなわち separative family である.

一方, stable でない separative family は存在する. これは次のように構成する.

X をコンパクト Riemann 面とする. R を degree d の有理関数で Fatou 集合 $F(R)$ が空でないものを取る. ここで R を含む X 上の non-trivial holomorphic (algebraic) family を作る. ただし恒等的に 0 または ∞ となるものを有限個含まれていてもよいとする. ここで, 十分周期の大きな repelling periodic cycles を考えて, それらが separative condition を満たさない点および恒等的に 0 または ∞ となる点を X から除く. このような点は高々有限個しか存在しないから, そのような点を除いて得られる Riemann 面 X' は有限型である. 作り方から X' 上の separative family である. 一方, もしこれが stable ならば, Proposition 1 から affine となるはずである. ところがこの family は $F(R)$ が空でない有理関数を含んでいるから矛盾である. すなわち stable ではない.