

$\boldsymbol{x}'(t) = -\alpha[1 - |\boldsymbol{x}(t)|^2]R(\theta)\boldsymbol{x}(t - \tau)$ の星形周期解について

大阪府立大学工学部数理教室 原 惟 行
(Tadayuki Hara)

1 はじめに

スカラー微分差分方程式

$$(1.1) \quad x'(t) = -\alpha[1 + x(t)]x(t - 1),$$

$$(1.2) \quad x'(t) = -\alpha[1 - x^2(t)]x(t - 1)$$

に対して次の定理が成立することが知られている.

Theorem A [1:pp.341 ~ 348, Th.4.2 and Th.5.2]

$\alpha > \frac{\pi}{2} \implies (1.1) \text{ も } (1.2) \text{ も non-zero periodic solution をもつ.}$

この Theorem A の成立には次の良く知られた定理が深くかかわっている.

Proposition 1 $y'(t) = -\alpha y(t - 1)$ の零解が漸近安定 $\iff 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2 Introduction と予想

2次元微分差分方程式系

$$(2.1) \quad \boldsymbol{x}'(t) = -\alpha[1 - |\boldsymbol{x}(t)|^2]R(\theta)\boldsymbol{x}(t - 1)$$

を考える. ここで

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \alpha \in R, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\theta \neq 0),$$

$|\boldsymbol{x}|^2 = x^2 + y^2$ とする. (2.1) に対して次の問題を考える.

問題 1 (2.1) に対して Theorem A のような定理が成立するか？

i.e. $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0 \implies$ (2.1) は non-zero periodic solution をもつか？

Proposition 1 に対応するものとして次の結果がある.

Proposition 2 [2] $y'(t) = -\rho R(\theta)y(t-1)$ の零解が漸近安定 $\iff 0 < \rho < \frac{\pi}{2} - |\theta|$.

Proposition 2 に関連して次のこともわかっている.

Proposition 3 $\rho = \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ のとき $y'(t) = -\rho R(\theta)y(t-1)$ は周期解 (円軌道) をもつ.

この Propositions 2 と 3 により $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ の場合

$$(2.1) \quad x'(t) = -\alpha[1 - |x(t)|^2]R(\theta)x(t-1)$$

は $\alpha[1 - |x|^2] = \frac{\pi}{2} - |\theta|$ の時 周期軌道の存在が予想される. このとき

$$|x|^2 = 1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \quad \text{だから}$$

(2.1) は半径 $\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)}$ の周期軌道をもつのではないかと考えられる.

実際 $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ のとき

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)}, \quad \omega = |\theta| - \frac{\pi}{2}$$

とすると (2.1) は

$$(2.2) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{pmatrix} & (\theta > 0) \\ \begin{pmatrix} x(t) = r \cos(-\omega t) \\ y(t) = r \sin(-\omega t) \end{pmatrix} & (\theta < 0) \end{cases}$$

という周期解 (円軌道) をもつことが容易に確かめられる. 故に次の定理が得られる.

Theorem 1 $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0 \implies$ (2.1) は non-zero periodic solution をもつ.

問題 1 は簡単に肯定的に解決されたわけであるが、それでは次のような問題を考えよう.

問題 2 $\alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0$ のとき (2.1) は周期軌道 (2.2) 以外に周期軌道をもつか?

(2.1) の critical points は $(0, 0)$ 及び $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ の各点であることを注意しておく.

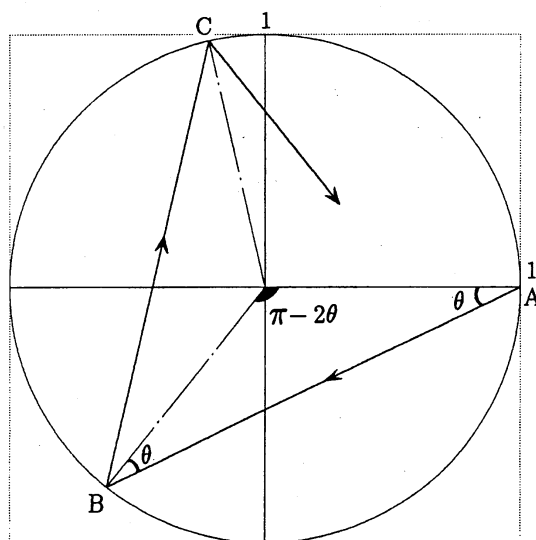
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として (2.1) を成分表示すると

$$(2.1)' \quad \begin{cases} x'(t) = -\alpha[1 - |\mathbf{x}(t)|^2] \cdot \{\cos \theta \cdot x(t-1) - \sin \theta \cdot y(t-1)\} \\ y'(t) = -\alpha[1 - |\mathbf{x}(t)|^2] \cdot \{\sin \theta \cdot x(t-1) + \cos \theta \cdot y(t-1)\} \end{cases}$$

であるから 初期時刻を $t_0 = 0$, 初期関数を $\begin{cases} \phi(t) = 1 - \epsilon & (\epsilon > 0 \text{ は十分小}) \\ \psi(t) = 0 & \text{for } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$ とすると $t \in [0, 1]$ では

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

となり 初期点 $A = (1 - \epsilon, 0)$ からの打ち出し角度は θ となる.



α をある程度大きくすると (2.1) の解の速度は大きくなることに注意しよう. 点 A から B まで解が移動するのにかかる時間が 1 秒以内となるように α を大きくしておくとき解軌道は直線 AB 上を A から B まで移動することになる. B 点は $x^2 + y^2 = 1$ に十分近いから B 点の近傍に解軌道が近づくと解の速度はほとんど 0 に近くなる. (円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の各点は critical point だから B 点は円 $x^2 + y^2 = 1$ の内側にある.) 以下考え方の荒筋を述べることにする. B 点に解軌道が 1 秒以上留まっているならば先程の議論と同様に B 点からの打ち出し角度はほぼ θ となり解軌道は直線 BC 上を B から C まで移動す

ることになる。A から出発して k 回はね返って元の A 点に戻ってくれば、それが周期軌道になるわけである。すなわち $\exists m \in \mathbf{N} : k(\pi - 2\theta) = 2\pi m$ となる m が存在すれば周期軌道があることになる。

$$\theta = \frac{\pi}{n} \text{ の場合を考えると } k\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi m. \quad i.e.$$

$$(2.3) \quad k = \frac{2nm}{n-2}.$$

という関係式を得る。 n が有理数ならば、(2.3) をみたす最小の自然数 m が存在する。即ち、 n が有理数ならば、(2.3) をみたす k -星形周期軌道の存在が予想される。実際の解軌道は B 点で直線的に折り返すわけではなく、B 点の近傍で解軌道は U ターンするので上の議論は証明にはなっていないことを注意しておく。

以上をまとめると次の Conjecture が得られる。

Conjecture

$$\exists \alpha_0 > \frac{\pi}{2} - |\theta| > 0;$$

(i) $\alpha_0 \geq \alpha > \frac{\pi}{2} - |\theta| \implies (2.2)$ は (2.1) の唯一の安定な周期解。

(ii) $\alpha > \alpha_0 \implies (2.2)$ は (2.1) の不安定周期解。さらに $\theta = \frac{\pi}{n}$ (n は有理数) ならば、(2.2) 以外の (2.1) の解は (2.3) をみたす k -星形周期解に漸近する。(ただし初期関数 $(\phi(t), \psi(t))$ は $\phi^2(0) + \psi^2(0) < 1$ をみたすものとする)

以下に Conjecture を illustrate するいくつかの (2.1) の解軌道図を掲げておく。

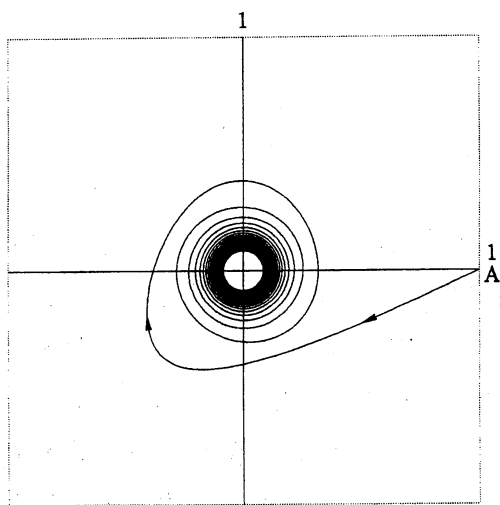


図 1. $\alpha = 1.13, \theta = \frac{\pi}{7}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

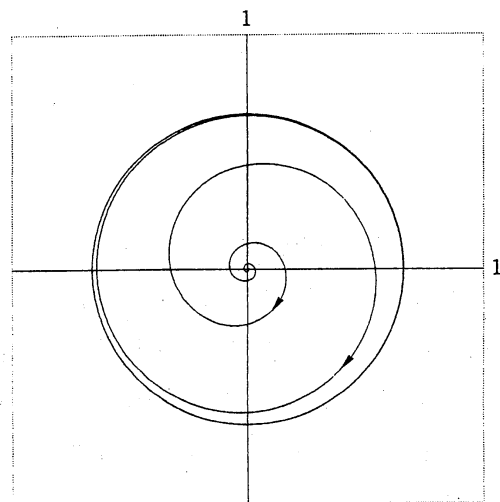


図 2. $\alpha = 2, \theta = \frac{\pi}{7}$
 $\phi(t) = 0.01, \psi(t) = 0$

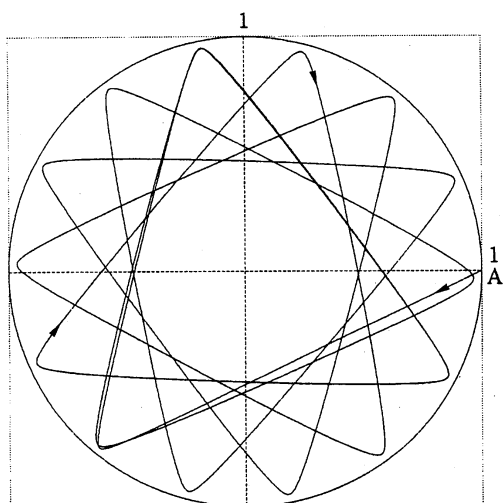


图 3. $\alpha = 3, \theta = \frac{\pi}{7}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

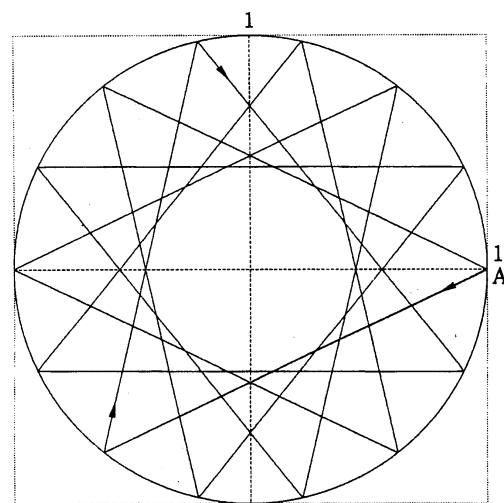


图 4. $\alpha = 5, \theta = \frac{\pi}{7}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

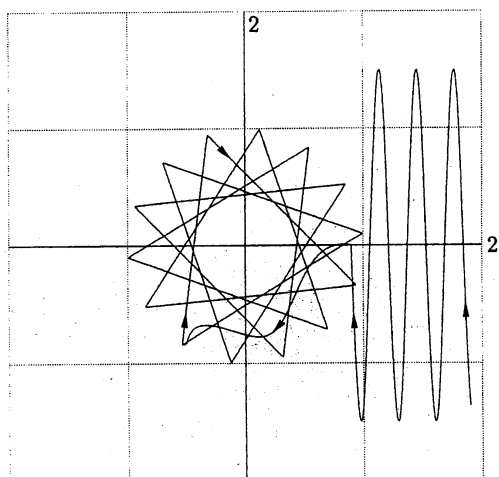


图 5. $\alpha = 5, \theta = \frac{\pi}{7}$
 $\phi(t) = 0.9 - t$
 $\psi(t) = 1.5 \sin(20t)$

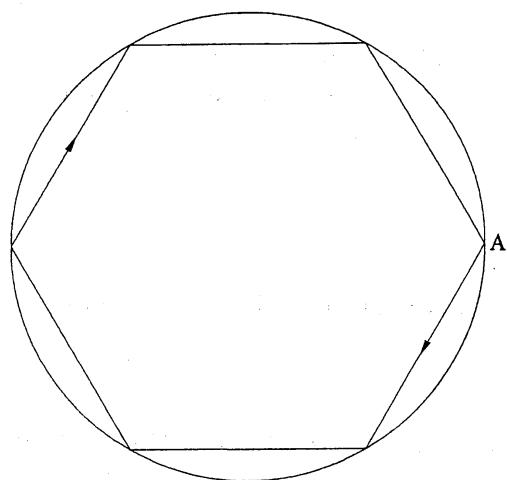


图 6. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{3}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

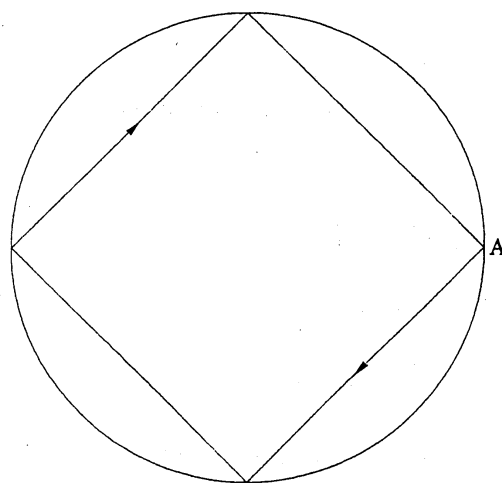


图 7. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{4}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

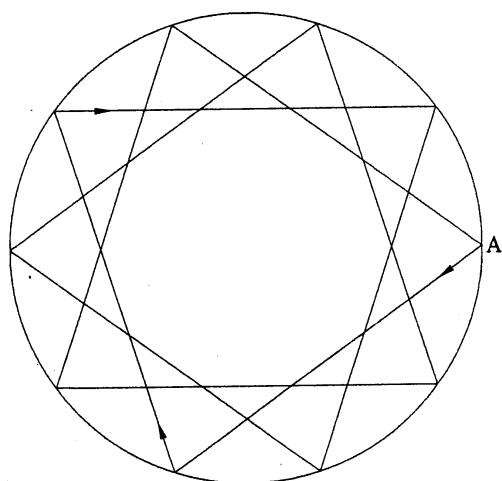


图 8. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{5}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

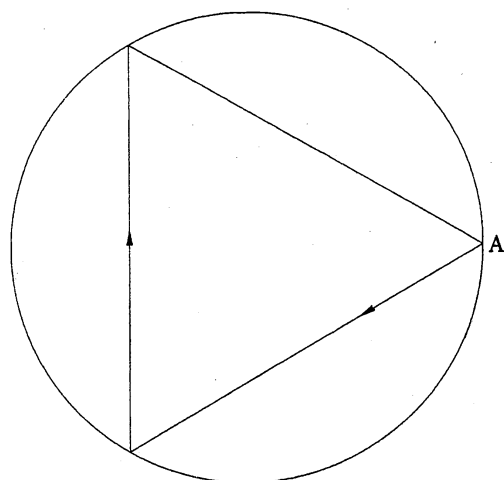


图 9. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{6}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

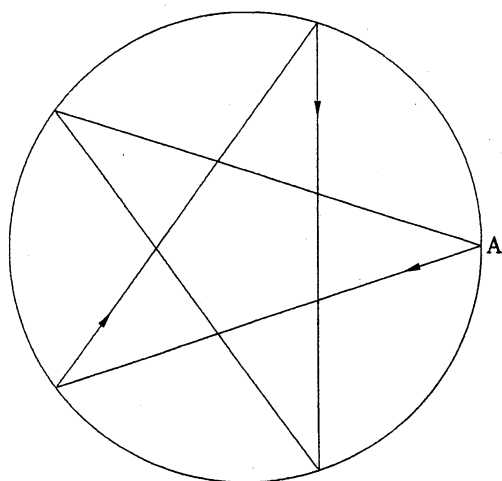


图 10. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{10}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

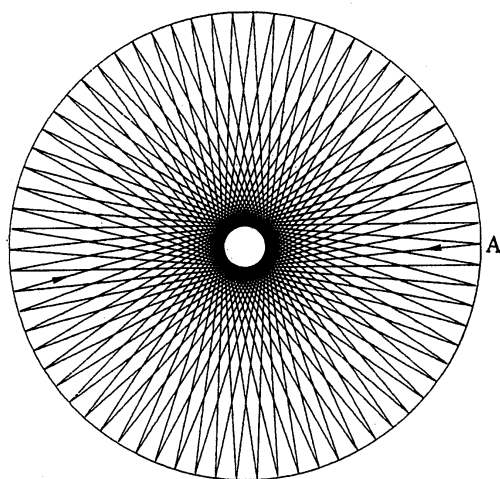


图 11. $\alpha = 10, \theta = \frac{\pi}{35}$
 $\phi(t) = 0.999, \psi(t) = 0$

参考文献

- [1] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, 1993, Springer-Verlag.
- [2] T. Hara and J. Sugie, *Stability region for systems of differential-difference equations*, to appear.