

質量交換型 2 粒子模型のソリトン相互作用への応用 II

富山大・工 角 昌 浩 (Hiroshi Kakuhata), 山埜井 翔吾 (Shogo Yamanoi)
Faculty of Engineering, University of Toyama

1 はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られている [1]。その挙動から、ソリトンを粒子としてとらえ、原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方にたって、これまでにソリトンを粒子として扱うために、ソリトンの相互作用に類似した相互作用をする二粒子系の振る舞いを調べ、その理論形式を考察してきた [3, 4, 5]。

外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [7, 8]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}) \tag{1}$$

のソリトン解は双方向に進行するループソリトンである。ここで、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル、 $\mathbf{J}$ は一定の外部電流ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。それぞれ位相速度 v と $-v$ でソリトンが同一平面内で正面衝突するとき、連立

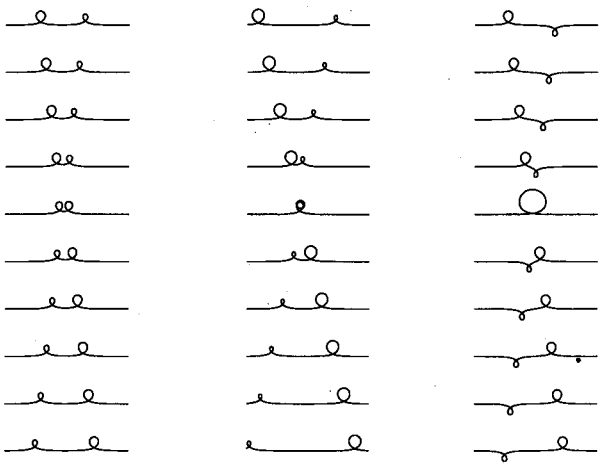


図 1 $v = 0.12,$ $v = 0.24,$ $v = 0.12$

非分散方程式の2ソリトン相互作用には、相対速度 $2v$ と振幅の正負に依存して3つのパターンがある (図1)。

- 正 (負) の振幅同士の衝突のとき、小さい相対速度ではループソリトン同士が重ならず弾くように衝突する。
- 正 (負) の振幅同士の衝突のとき、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。
- 正と負の振幅の衝突のときには相対速度に関わりなく、小さいループが一時的に消え、このとき大きいループがさらに大きくなる。

右に向かうソリトンと左に向かうソリトンの位置をそれぞれ σ_1 と σ_2 とする。同じスピード v でのソリトンの正面衝突のとき二つのソリトンのピーク ($\partial^2 Z = 0; \partial^3 Z > 0$) を求める方程式は $e^{\gamma\sigma}$ ($\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$) の4次方程式になり、厳密解は非常に複雑なので十分遠方での近似解を用いる。二つのソリトンが通過するとき (図1の中央の場合) の衝突前の近似解は

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{v^2[1+2(1-v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1+2(1-v)(2+v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{1+2(1+v)(2-v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1+2(1+v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}} \end{aligned} \quad (2)$$

であり、衝突後の近似解

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{1+2(1-v)(2+v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1+2(1-v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{v^2[1+2(1+v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1+2(1+v)(2-v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}} \end{aligned} \quad (3)$$

である。これらを用い、ソリトンの質量を運動量の z 成分、 $P_z = \int d\sigma \partial_\tau Z$ から定義することによれば、右に進む大きいソリトンと左に進む小さいソリトンの質量はそれぞれ

$$m_1 = 4\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad m_2 = 4\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \quad (4)$$

である。衝突前のそれぞれのソリトンに作用する力の z 成分は $\dot{P}_z$ (記号“ $\cdot$ ”は時間 t による導関数を表す) であるが、正の振幅同士では互いに斥力を及ぼすが、両ソリトンに作用する力 $m_n \ddot{\sigma}_n$ ($n=1,2$) を足してもゼロにならない。これは全運動量が保存せず、並進不変性の破れを意味する。これらのことは、元のソリトン系が並進不変であることと矛盾する。

すなわち、質量を一定とする単純な粒子モデルでは、それぞれのソリトン粒子に作用する力の和を0にすることはできず、作用反作用の法則が成立しない [4]。これは現実のソリトンには遠隔作用で相互作用をしないためと考えられ、遠隔作用に基づくポテンシャルでのみ相互作用するような二粒子系では全運動量が保存しないことになる。すなわち、質量 m_n ($n=1,2$) を定数とするラグランジアン、

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - U(r) \quad (5)$$

で与えられるモデルでは記述できない。ここで、 q_n ($n = 1, 2$) は各粒子の座標で、 r は相対座標 $r = q_2 - q_1$ である。従来のソリトン粒子の相互作用の記述ではこの点が十分考慮されていないようである [9]。図 1 の様に、連立非分散方程式のソリトンは衝突する際には振幅を交換する。ソリトン相互作用において作業仮説として振幅を質量と見なせば、ソリトン粒子の衝突は可変質量の粒子に対する 2 体問題になる。

これまでに、連立非分散方程式のソリトン衝突の挙動を念頭におきながらも、相互作用中の現実のソリトンの軌道を直接フィットする粒子系のモデルを構成するのではなく、質量を交換しながら相互作用する二粒子系のできるだけ簡単に解析解を持つ toy model の定式化を行い、質量を交換する閉じた 2 体系のモデルを具体的に構成することが可能であることを示した [3]。

本稿では、連立非分散方程式のソリトンが通過する解 (図 1 の中央の場合) に最低次の近似でこのモデルを適用しその問題点を探る。

2 質量を交換する二粒子系

これまでにソリトンの相互作用に似た振る舞いをする並進不変な二粒子系を構築した。

1. 全質量は一定であり、
2. 二粒子の質量差が相対速度に比例する拘束条件を持ち、
3. 一定質量の二体モデルの解を利用してポテンシャルを構成した。

ここでは、定式化ではなく運動方程式を中心に述べる。

本節では、質量を交換する二粒子系の概要を述べる。ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - U(r) - V(m) \quad (6)$$

で与えられる系を考える。ここで、 $r = q_2 - q_1$ は相対座標、 $U(r)$ は粒子間の相互作用ポテンシャル、 q_1 と q_2 とともに質量 m_1 と m_2 も力学変数である。ただし m_n ($n = 1, 2$) の和 M は定数として、質量差 $m = m_2 - m_1$ が変数であるとする。 $V(m)$ は

$$V(m) = \frac{1}{M\alpha} \left(\frac{\beta}{2}m^2 - \frac{1}{4} \frac{m^4}{4\alpha} \right) \quad (7)$$

と m の関数であるが m を未定乗数のようにして扱うのでポテンシャルではない。なお、 α と β は運動方程式と初期条件から決める未定の定数である。全質量 M 、重心座標 Q 、換算質量 μ

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2, \\ Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \quad (8)$$

をそれぞれ導入すれば、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}M \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r \right)^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) - V(m)$$

になる。ラグランジアン第1項にある $\dot{m}$ は一定質量の場合には現れない項である。 Q , r のみならず m についても変分をとると、変分原理により Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) &= -\frac{1}{2} \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r \right) \dot{m} - \frac{dU}{dr}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r \right) r \right] &= \frac{m}{4M} \dot{r}^2 + \frac{dV}{dm} \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。重心 Q に対する方程式を積分し、積分定数を P_0 とすれば

$$M \left(\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{2M}r \right) = P_0$$

となり、これを m の運動方程式に代入して

$$P_0\dot{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{2\beta}{\alpha}m - \frac{m^3}{2\alpha^2}$$

を得る。ここで

$$m = \alpha\dot{r}$$

とおけば

$$P_0 = 2\beta$$

を得る。 α を与えることが m の、 β を与えることが P の初期値を与えることにそれぞれ対応する。これらを r に対する運動方程式に用いれば、原理的に通常の手順で運動方程式を解くことができる。また、相対運動に対する運動方程式から相対運動に対するハミルトニアン

$$H = \frac{1}{8} \left[\left(M + 2\frac{\alpha P_0}{M} \right) \dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M} \dot{r}^4 \right] + U(r) \quad (10)$$

を得るので、これらに解を与えればポテンシャルを求めることができる。ポテンシャル $U(r)$ を

$$U(r) = \frac{g_1}{2} \operatorname{sech}^2 r + \frac{g_2}{4} \operatorname{sech}^4 r$$

で与え、 g_1 と g_2 が適切な関係を満たせばソリトンの相互作用に類似した二粒子の衝突が記述できることは以前に示した [3]。 sech^2 ポテンシャルに対する以下の解

- $r = -\sinh^{-1}(\sqrt{1-a} \sinh 2vt)$ ($a < 1$), passage type
- $r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1} \cosh 2vt)$ ($a > 1$), reflection type
- $r = \sinh^{-1}(e^{-2vt})$ ($a = 1$) asymptotically approaching type

を持つ。最後の解を除けば図1のソリトン相互作用と類似の振る舞いをする。

3 モデルの適用

非分散連立方程式のソリトン質量は (4) で定義されるので, 全質量 M と質量差 m は

$$M = \frac{8}{\sqrt{1-v^2}} = 8\gamma, \quad m = -\frac{8v}{\sqrt{1-v^2}} = -8v\gamma = 4\gamma(-2v), \quad (11)$$

になる。これを見ると質量差 m が相対速度に比例していることが判る。従って, 前節で述べたモデルを適用できそうに思える。試みに, 近似解 (2) と (3) で $e^{\pm 2\gamma v\tau}$ を変数と見なして Maclaurin 展開すると相対座標 $\rho = \sigma_2 - \sigma_1$ に対して衝突前の相対座標

$$e^{\gamma\rho} \approx \frac{1}{v^2} [1 + 2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}] e^{-2\gamma v\tau} \quad (12)$$

と衝突後の相対座標

$$e^{-\gamma\rho} \approx \frac{1}{v^2} [1 + 2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}] e^{2\gamma v\tau} \quad (13)$$

を得る^{*1}。これから衝突前の相対速度

$$\dot{\rho} \approx \frac{-2ve^{-2\gamma v\tau}}{e^{-2\gamma v\tau} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12}} \quad (15)$$

と衝突後の相対速度

$$\dot{\rho} \approx \frac{-2ve^{2\gamma v\tau}}{e^{2\gamma v\tau} + 2(1-v^2) \cos \theta_{12}} \quad (16)$$

が得られる。上の二つの相対座標の式を逆に解いて, $e^{\pm 2\gamma v\tau}$ を $e^{\mp \gamma\rho}$ の関数として表し, $\dot{\rho}$ を ρ の関数として表せば, 衝突前の相対速度

$$\dot{\rho}(\rho) \approx -2v + \frac{2}{v}(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-\gamma\rho}$$

と衝突後の相対速度

$$\dot{\rho}(\rho) \approx -2v + \frac{2}{v}(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma\rho}$$

これを ρ の全範囲での $\dot{\rho}$ に拡大すると

$$\dot{\rho} = -2v + \frac{1}{v}(1-v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma\rho$$

になる。これを用い, 運動エネルギーを $2\gamma(2-v^2)v^2$, (11) より $\alpha = 4\gamma$, $P_0 = 8\gamma v^2$, $r = \rho$ とすればハミルトニアン (10) からポテンシャル

$$U = \frac{\gamma}{2v^2} [4(2-v^2)v^4 - f(\rho)^2] \left[8(1+v^2) - \frac{12f(\rho)^2}{v^2} \right]$$

^{*1} $e^{\gamma\rho} \approx \frac{1}{v^2} e^{-2\gamma v\tau}$ と $e^{-\gamma\rho} \approx \frac{1}{v^2} e^{2\gamma v\tau}$ から構成できる解

$$\sinh \gamma\rho = -\frac{1}{v^2} \sinh 2\gamma v\tau \quad (14)$$

が最低次と考えられるが, これは遠方で引力ポテンシャルをもたらす。これは相互作用力の計算と矛盾する。

を得る。これは変形 sech ポテンシャルの

$$f(\rho) = v^2 - (1 - v^2) \cos \theta_{12} \text{sech } \gamma \rho$$

の 4 次多項式である。 $v = 0.12$ と $v = 0.24$ の場合のポテンシャルの形状を図 2 に示した。一見、正常な斥力の sech 型のポテンシャルに見えるが高さは v に依存し、小さな v ではポテンシャルの高さが非常に高く、通過型の解を用いているにもかかわらず通り抜けられそうにない。また、

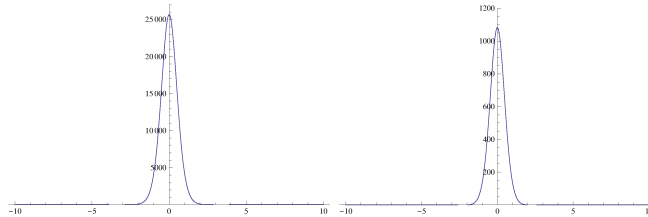


図 2 $U(\rho)$ left: $v = 0.12$

right: $v = 0.24$

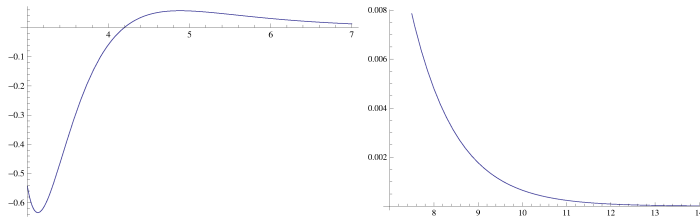


図 3 Potential $U(\rho)$

$\rho < 4.8$ では $\rho \approx 3.2$ を底とする引力ポテンシャルであり (図 3), $\rho > 4.8$ では斥力ポテンシャルである。これより大きな ρ では斥力的である。

4 Discussion

質量交換をする 2 体系の模型を連立非分散方程式に適用することを試みた。通過型の近似解 (12) と (13) から求めたポテンシャルは高過ぎ、小さな v では通過が起きないことがわかった。しかし、(14) とは異なり、十分遠方では斥力が働くので、相互作用力の計算とは矛盾しない。また、ポテンシャルの高さも有意に下がった。近似解の取り方によっては不十分であるが、ポテンシャルの高さを下げることができるので、近似解の扱い方によってはソリトン相互作用と少なくとも定性的に一致するソリトン粒子の力学を作る可能性がある。ポテンシャル $U(\rho)$ が引力から斥力へと波打つのは (17) と (17) の中の $\text{sech } \gamma \rho$ の係数の符号が次数によってかわるからである。このとき拘束条件が $m = \alpha \dot{\rho}$ の他に $m = \alpha \dot{\rho}^3$ のような項があれば状況はまた変わるであろう。これらはこれからの課題である。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, “SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM”, SIAM, 1981.
- [2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, “The Skyrme Model: Fundamentals Methods Applications”, Springer-Verlag, 1993.
- [3] 角畠浩, 「質量交換を伴う二粒子系」, 数理解析研究所講究録 1890 「非線形波動現象の数理と応用」, p.228, 京都大学数理解析研究所, 2014 年
- [4] 角畠浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [5] 角畠浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.1118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [6] 角畠浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1800 「非線形波動現象の研究の新たな進展」, p.120, 京都大学, 2012 年
- [7] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [8] H. Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [9] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.