

振動積分の L^2 有界性

千葉経済短期大学 浅田 健嗣 (Kenji Asada)

§ 0. 序

振動積分変換を波束 (局在する波) との関連で考える。

Cotler-Stein の補題によって、Calderón-Vaillancourt [C-V] は擬微分作用素の L^2 有界性を証明した。またその補題をもちいて Fourier 積分作用素、振動積分変換についても L^2 有界性を証明できる [A-F]。§1 で Córdoba-Fefferman の波束変換 [C-F] を用いる振動積分変換の L^2 有界性の別証明を与える。

また、振動積分変換は波束型の積分作用素としても表されることを §2 で示そう。応用として、§3 で調和振動子の解を波束を用いて表してみる。

§ 1. 振動積分変換の L^2 有界性の別証明

[1] 振動積分変換 [A-F]

$$R(v)f(x) = I^v(a, \phi)f(x) = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n+N}} e^{iv\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) f(y) dy d\theta$$

を次の仮定で考える。

(Φ-1) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ で実数値関数

(Φ-2) ϕ の 2 階以上の各微分係数が有界

(Φ-3) $|\det D(\phi)(x,y,\theta)| \geq \delta > 0$

ここで、

$$D(\phi)(x,y,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x y} \phi(x,y,\theta) & \frac{\partial^2}{\partial x \theta} \phi(x,y,\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta y} \phi(x,y,\theta) & \frac{\partial^2}{\partial \theta \theta} \phi(x,y,\theta) \end{pmatrix}$$

(A-1) $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ とその各微分係数は有界

定理([A-F]) $\|A(v)\| \leq C_{n,N,m} |a|_m, v \geq v_0$

ここで、 $|a|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha a|, m \geq m_0$

[2] 波束関数・波束変換の定義 ([C-F])

Siegel の上半空間: $H^+ = \{g = g_R + \sqrt{-1}g_I; g_R, g_I \text{ は } n \text{ 次実対称行列で, } g_I \text{ は正定値}\}$

波束関数: $\varphi_{(x,\xi,g)}^v(u) = C_g^v e^{iv[\xi^T(u-x) + \frac{1}{2}(u-x)^T g(u-x)]}$

ここで、 $C_g^v = \left(\frac{v}{\pi}\right)^{n/4} \sqrt[4]{\det g_I}$. このとき、 $\|\varphi_{(x,\xi,g)}^v\| = 1$.

波束変換: $W_g^v f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi_{(x,\xi,g)}^v(v)} f(v) dv$

(左)逆波束変換: $W_g^{v,-1} F(u) = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi_{(x,\xi,g)}^v(u) F(x,\xi) dx d\xi$

性質 (1) $\|\varphi_{(x,\xi,g)}^v\| = 1$

(2) $W_g^{v,-1} W_g^v = I$

(3) $\left(\frac{v}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} |W_g^v f(x,\xi)|^2 dx d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2 du$

[3] 証明 (方針)

(1) $k, g \in H^+$ に対して $\hat{A}_{k,g}^v = W_k^v A(v) W_g^{v,-1}$ とおく。

$\tilde{A}_{k,g}^v: S(R^{2n}) \rightarrow S(R^{2n})$ の積分核は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{k,g}^v(z, \zeta; y, \eta) \\ = \int_{R^{2n+N}} \overline{\varphi_{(z, \zeta, k)}^v(u)} e^{i v \cdot \phi(u, v, \theta)} a(u, v, \theta) \varphi_{(y, \eta, g)}^v(v) du dv d\theta \end{aligned}$$

(2) dilation によって、 $v=1$ の場合を証明すればよい。

(3) $(\tilde{A}_{k,g}^1)^* (\tilde{A}_{k,g}^1)$ の積分核は次で与えられる。

$$\begin{aligned} H(y_1, \eta_1; y_0, \eta_0) \\ = \int_{R^{3n+2N}} \overline{G(v_1, y_1, g) a(u, v_1, \theta_1)} \\ G(v_0, y_0, g) a(u, v_0, \theta_0) e^{i \Phi} du dv_1 d\theta_1 dv_0 d\theta_0 . \end{aligned}$$

ここで、 $G(v, y, g) = c_g^{-1} e^{\frac{i}{2} (v-y)^T g (v-y)}$,

$$\Phi = - \eta_1^T (v_1 - y_1) - \phi(u, v_1, \theta_1) + \phi(u, v_0, \theta_0) + \eta_0^T (v_0 - y_0) .$$

(4) Lax による部分積分の方法、すなわち

$$L = \rho^{-2} (-i \nabla \Phi \cdot \nabla + 1), \quad \text{ここで、} \quad \nabla = \nabla_{(v_1, \theta_1, u, v_0, \theta_0)} ,$$

$$\rho^2 = 1 + |\nabla_{v_1} \Phi|^2 + |\nabla_{\theta_1} \Phi|^2 + |\nabla_u \Phi|^2 + |\nabla_{\theta_0} \Phi|^2 + |\nabla_{v_0} \Phi|^2 ,$$

を用いて、 $H(y_1, \eta_1; y_0, \eta_0)$ の左辺を変形する。

$$\begin{aligned} H(y_1, \eta_1; y_0, \eta_0) \\ = \int_{R^{3n+2N}} (L^*)^m [\overline{G(v_1, y_1, g) a(u, v_1, \theta_1)} \\ G(v_0, y_0, g) a(u, v_0, \theta_0)] e^{i \Phi} du dv_1 d\theta_1 dv_0 d\theta_0 . \end{aligned}$$

よって、次の評価式をえる。

$$|H(y_1, \eta_1; y_0, \eta_0)| \leq c_{n,m,p} |a|_m^2 \int_{\mathbb{R}^{3n+2N}} \rho^{-m} \lambda(v_1 - y_1)^{-s} \lambda(v_0 - y_0)^{-t} du dv_1 d\theta_1 dv_0 d\theta_0$$

ここで、 m, s, t は任意の正整数で、 $\lambda(v) = (1 + |v|^2)^{1/2}$.

(5) ρ の下からの評価 :

$$(a-1) \quad |\nabla_{\theta} \phi(u, v_1, \theta_1) - \nabla_{\theta} \phi(u, v_0, \theta_0)| + |\nabla_u \phi(u, v_1, \theta_1) - \nabla_u \phi(u, v_0, \theta_0)| \geq \delta_0 (|v_1 - v_0| + |\theta_1 - \theta_0|) ,$$

$$(a-2) \quad |\nabla_{\theta} \phi(u_1, v, \theta_1) - \nabla_{\theta} \phi(u_0, v, \theta_0)| + |\nabla_v \phi(u_1, v, \theta_1) - \nabla_v \phi(u_0, v, \theta_0)| \geq \delta_0 (|u_1 - u_0| + |\theta_1 - \theta_0|) .$$

$$(b-1) \quad |\nabla_{\theta_1} \phi| + |\nabla_u \phi| + |\nabla_{\theta_0} \phi| \geq \delta_0 (|v_1 - v_0| + |\theta_1 - \theta_0|) ,$$

$$(b-2) \quad |\nabla_{v_1} \phi| + |\nabla_{\theta_1} \phi| \geq \delta_0 (|x_1 - u| + |\sigma_1 - \theta_1|) - M |y_1 - v_1| ,$$

$$|\nabla_{v_0} \phi| + |\nabla_{\theta_0} \phi| \geq \delta_0 (|x_0 - u| + |\sigma_0 - \theta_0|) - M |y_0 - v_0| ,$$

$$(b-3) \quad |\nabla_{v_1} \phi| + |\nabla_{v_0} \phi| \geq \delta_0 |\eta_1 - \eta_0| - M (|v_1 - v_0| + |\theta_1 - \theta_0|) ,$$

ここで、 $M = \sup |\partial^2 \phi(u, v, \theta)|$.

$$(c-1) \quad \rho \geq \delta_1 \lambda(v_1 - v_0, \theta_1 - \theta_0) \geq \delta_1 \lambda(v_1 - v_0) ,$$

$$(c-2) \quad \rho \geq \delta_2 \lambda(\eta_1 - \eta_0) ,$$

ここで、 $\lambda(z) = (1 + |z|^2)^{1/2}$.

(6) 積分領域を

$$(A) |x_1 - u_1| + |\sigma_1 - \theta_1| \leq 10M\delta_0^{-1} |y_1 - v_1|, \text{ or } (B) |x_1 - u_1| + |\sigma_1 - \theta_1| \geq 2M\delta_0^{-1} |y_1 - v_1| ;$$

$$(C) |x_0 - u_0| + |\sigma_0 - \theta_0| \leq 10M\delta_0^{-1} |y_0 - v_0|, \text{ or } (D) |x_0 - u_0| + |\sigma_0 - \theta_0| \geq 2M\delta_0^{-1} |y_0 - v_0|$$

と 4 領域に分けて、評価をする。その際に、次の不等式を用いる。

(d-1) (B) において、 $\rho \geq \delta_3 \lambda(x_1 - u, \sigma_1 - \theta_1)$,

(d-2) (D) において、 $\rho \geq \delta_3 \lambda(x_0 - u, \sigma_0 - \theta_0)$

(e) $s > p+n, t > p+n$ ならば、

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \lambda(v_1 - v_0)^{-p} \lambda(v_1 - y_1)^{-s} \lambda(v_0 - y_0)^{-t} dv_1 dv_0 \leq M_{s-p} M_{t-p} \lambda(y_1 - y_0)^{-p}$$

が成り立つ。

これらの不等式を用いて、次の評価式を導くことができる。

$$|H(y_1, \eta_1; y_0, \eta_0)| \leq C_{n,N} |a|_m^2 \lambda(y_1 - y_0)^{-q} \lambda(\eta_1 - \eta_0)^{-p}$$

ここで、 $m = p+q+2r > 3n+2N, p > n, q > n, r > N + \frac{n}{2}$.

(5) Schur の補題を適用して、 $(\tilde{A}_{k,g}^1)^* (\tilde{A}_{k,g}^1)$ の L2 有界性が分かる。

(6) $H(v) = W_k^{v,-1} \tilde{A}_{k,g}^v W_g^v$ なので、 $\tilde{A}_{k,g}^v$ の L2 有界性より $H(v)$ の L2 有界性を
知る。

[4] Cotler-Stein の補題を用いて証明された David-Journe の特異積分作用素の L2 有界性について Meyer [Me] は、Wavelet を利用した別証明を与えた。それは、Wavelets によって分解された作用素が Schur の補題の要求する評価式をみたすこと、その結果、その特異積分作用素の L2 有界性がなりたつというものである。波束は wavelet の代表例である [CGT]。振動積分変換の L2 有界性のここでの証明も、同じ方法論によるものといえよう。

§ 2. 波束型作用素と振動積分変換の主要部について

[1] $H(v)$ を [AF] の仮定 $(\Phi-1), (\Phi-2), (\Phi-3)$ と $(A-1)$ をみたす振動積分変換とする。phase 関数 $\phi(x, y, \theta)$ が誘導する正準変換 χ は、 $\chi(y, \eta) = i_1 \circ i_2^{-1}(y, \eta) = (x, \xi)$ で定義される。ここで、

$$C_\phi = \{(x, y, \sigma); \partial_\theta \phi(x, y, \sigma) = 0\}$$

$$i_1: C_\phi \rightarrow R^n \times R^n, \quad i_1(x, y, \sigma) = (x, \xi) = (x, \partial_x \phi(x, y, \sigma))$$

$$i_2: C_\phi \rightarrow R^n \times R^n, \quad i_2(x, y, \sigma) = (y, \eta) = (y, -\partial_y \phi(x, y, \sigma))$$

また、 $g \in H^+$ に対して $\chi(g)$ を次で定義する:

$$\chi(g) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} g + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} g + \frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1}$$

$R(v)$ の主要部を次のように定義する:

$$P(v, g)f(u) =$$

$$= \left(\frac{v}{2\pi} \right)^n \int_{R^{2n}} \phi(\chi(y, \eta), \chi(g))^{(u)} a_0(y, \eta) q(y, \eta, g) e^{iv \phi_0(y, \eta)} \omega_g^v f(y, \eta) dy d\eta$$

ここで、 $a_0(y, \eta) = a \circ i_2^{-1}(y, \eta) = a(x, y, \sigma)$, $\phi_0(y, \eta) = \phi \circ i_2^{-1}(y, \eta) = \phi(x, y, \sigma)$

$$q(y, \eta, g) = i^{\frac{N-n}{2}} \frac{\sqrt[4]{\det g_I}}{\sqrt[4]{\det \chi(g)_I}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial x}{\partial \eta} g + \frac{\partial x}{\partial y}} \sqrt{\det D(\phi)}} \Big|_{(x, y, \sigma) = i_2^{-1}(y, \eta)}$$

[2] 定理 $\|R(v) - P(v, g)\| \leq C v^{-1/2}$, $v \geq v_0$.

[3] 補題

$$(1) \int_{R^n} e^{iv[\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle]} dx = \left(\frac{2\pi i}{v} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{-iv}{2}\langle A^{-1}b, b \rangle}$$

ここで、 A は $\text{Im} A$ が正定値な正方行列、 b は複素ベクトル。

$$\begin{aligned}
 (2) \chi(g) &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} g + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} g + \frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1} \\
 &= \phi_{xx} - \phi_{xy} (\phi_{yy} + g)^{-1} \phi_{yx} \\
 &\quad - [\phi_{x\sigma} - \phi_{xy} (\phi_{yy} + g)^{-1} \phi_{y\sigma}] [\phi_{\sigma\sigma} - \phi_{\sigma y} (\phi_{yy} + g)^{-1} \phi_{y\sigma}]^{-1} \\
 &\quad \quad \quad [\phi_{\sigma x} - \phi_{\sigma y} (\phi_{yy} + g)^{-1} \phi_{yx}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \det \begin{pmatrix} \phi_{\sigma\sigma} & \phi_{\sigma y} \\ \phi_{y\sigma} & \phi_{yy} + g \end{pmatrix} &= \det(\phi_{yy} + g) \det[\phi_{\sigma\sigma} - \phi_{\sigma y} (\phi_{yy} + g)^{-1} \phi_{y\sigma}] \\
 &= (-1)^n \det \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} g + \frac{\partial x}{\partial y} \right) \det D(\phi)
 \end{aligned}$$

[4] 証明の方針:

$$(1) \hat{A}_{k,g}^v = \tilde{I}_{k,g}^v(a, \phi) = \mu_k^v R(v) \mu_g^{v,-1} = \mu_k^v I^v(a, \phi) \mu_g^{v,-1} \text{ とおく.}$$

$\hat{A}_{k,g}^v$ の積分核は

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{k,g}^v(z, \zeta; y, \eta) &= \tilde{J}_{k,g}^v(a, \phi)(z, \zeta; y, \eta) \\
 &= \left(\frac{v}{2\pi} \right)^{\frac{n+H}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2n+H}} \overline{\varphi_{(z, \zeta)}^v(u)} e^{iv \phi(u, v, \theta)} a(u, v, \theta) \varphi_{(y, \eta)}^v(v) du dv d\theta.
 \end{aligned}$$

$\psi(u, v, \theta; y, \eta) = \phi(u, v, \theta)$ の $(x, y, \sigma) = i_2^{-1}(y, \eta)$ における Tayler 展開の 2 次まで

の展開項として、 $\hat{A}_{k,g}^v$ の主要部を

$$\tilde{P}_{k,g}^v = \tilde{I}_{k,g}^v(a_0, \psi) = \mu_k^v I^v(a_0, \psi) \mu_g^{v,-1}$$

と定義すると、その積分核は

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k,g}^v(z,\xi;y,\eta) &= \\ &= \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{R^{2n+N}} \overline{\varphi_{(z,\xi)}^v(u)} e^{iv\psi(u,v,\theta;y,\eta)} a_0(y,\eta) \varphi_{(y,\eta)}^v(v) du dv d\theta . \end{aligned}$$

ここで、 $a_0(y,\eta) = a_2^{-1}(y,\eta)$.

(2) $P_{k,g}^v = \mu_k^{v,-1} \tilde{P}_{k,g}^v \mu_g^v$ とおくと、§1, [2](1) より、次のようになる。

$$\begin{aligned} P_{k,g}^v f(u) &= \left(\frac{v}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} Q_{k,g}^v(u;y,\eta) a_0(y,\eta) \mu_g^v f(y,\eta) dy d\eta , \\ Q_{k,g}^v(u;y,\eta) &= \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{R^{n+N}} e^{iv\psi(u,v,\theta;y,\eta)} \varphi_{(y,\eta)}^v(v) dv d\theta \end{aligned}$$

(3) $Q_{k,g}^v(u;y,\eta)$ に Gauss 積分についての補題 [3](1) を適用し、補題 [3](2) を用いて

$$Q_{k,g}^v(u;y,\eta) = i^{\frac{n+N}{2}} c_g^v \times \frac{1}{\sqrt{\det(\phi_{yy}+g)}} \frac{\exp iv\psi}{\sqrt{\det[\phi_{\sigma\sigma} - \phi_{\sigma y}(\phi_{yy}+g)^{-1} \phi_{y\sigma}]}}$$

$$\Psi = \phi(x,y,\sigma) + \langle u-x, x \rangle + \frac{1}{2} \langle \chi(g)(u-x), u-x \rangle , \quad (x,\xi) = \chi(y,\eta)$$

を得る。補題 3 より、この $P_{k,g}^v$ が $P(v,g)$ となることが分かる。

(4) $\|R(v) - P(v, g)\| \leq C v^{-1/2}$ を示すには、剰余項 $\tilde{R}_{k,g}^v = \tilde{R}_{k,g}^v - \tilde{P}_{k,g}^v$ が

評価式 $\|\tilde{R}_{k,g}^v\| \leq C v^{-1/2}$ を満たせばよい。そのためには、

$$\tilde{S}_{k,g}^v = \tilde{I}_{k,g}^v(a-a_0, \phi) \text{ とおき、}$$

$$\tilde{R}_{k,g}^v = \tilde{I}_{k,g}^v(a-a_0, \phi) + [\tilde{R}_{k,g}^v - \tilde{I}_{k,g}^v(a-a_0, \phi)] = \tilde{S}_{k,g}^v + \tilde{T}_{k,g}^v$$

と分解し、それぞれに次の補題を用いる。

(5) 補題 $a=a(u, v, \theta; y, \eta) \in C^\infty, |\partial_u^\alpha \partial_v^\beta \partial_\theta^\gamma a(u, v, \theta; y, \eta)| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma}$

として、

$$\tilde{R}_{k,g}^{v, (\alpha, \beta, \gamma)} = \tilde{I}_{k,g}^v \left(a(v-y)^\alpha (\partial_v \phi(u, v, \theta) + \eta)^\beta \partial_\theta \phi(u, v, \theta)^\gamma, \phi(u, v, \theta) \right)$$

は次をみたす。

$$\|\tilde{R}_{k,g}^{v, (\alpha, \beta, \gamma)}\| \leq C v^{-\frac{1}{2}(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)}$$

この補題は §1 の振動積分変換の L^2 有界性の定理の証明と同様の方法で証明できる。

§3. 応用

調和振動子の Schrödinger 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{2} x^2 u$$

を考える。初期条件

$$u(0, x) = \exp \frac{i}{\hbar} [(x-y)\eta + \frac{1}{2} g(x-y)^2], \quad (y, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad g \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} g > 0$$

をみたす解は次であたえられる。

$$u(t, x) = a \exp \frac{i}{h} S,$$

古典軌道を

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} S &= S_0 + (x - x_t) \xi_t + \frac{1}{2} g(t) (x - x_t)^2 \\ S_0 &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} \xi_s^2 - \frac{\omega^2}{2} x_s^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} (\eta^2 - y^2 \omega^2) \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + y\eta\omega \frac{\cos 2\omega t - 1}{2\omega} \end{aligned}$$

古典軌道に沿っての作用。

$$g(t) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial \eta} g + \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial \eta} g + \frac{\partial x}{\partial y}} = \frac{g \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{g \frac{\sin \omega t}{\omega} + \cos \omega t}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{g \frac{\sin \omega t}{\omega} + \cos \omega t}}$$

従って、初期値 $f(x)$ の解は、波束変換を用いて、次のように表される。

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi_{x_t}(y, \eta), \xi_t(y, \eta)(x) q(t, y, \eta) e^{\frac{i}{h} S_0(t, y, \eta)} W_g f(y, \eta) dy d\eta$$

参考文献

- [AF] Asada, K., and Fujiwara, D. : On some oscillatory integral transformations, Japan. J. Math., Vol.4, No.2(1978), p.229-361.
- [CF] Cordoba, A., and Fefferman, C. : Wave packets and Fourier integral operators, Comm. in PDE., Vol.3, No.1(1978), p.979-1005.
- [CV] Calderon, A.P., and Vaillancourt, R. : A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., Vol.69(1972), p.1185-1187.
- [CGT] Combes, J.M., Grossmann, A., Tchamitchian, Ph. : Wavelets, Time-frequency methods and phase space, Proc. International Conference, Marseille, Dec. 14-18, 1987, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1989
- [Me] Meyer, Y. : Ondelettes et operateurs II, Operateurs de Calderon-Zygmund, 1990, Hermann