

convex function のなす空間の

順序について (Order relation on a space of
convex functions)

北大理学部

越 昭 三 (Shozo Koshi)

1. Introduction Convex function の conjugate function
に関する基本定理に Moreau-Rockfeller の定理がある。
確率的に convex function が与えられたときの平均 function
とその conjugate (dual) function との関係を表わす定
理を作ることを目的とする。

2. 定義 話を簡単にするために, ここで考える
function は実数空間 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への対応とす
る。勿論 ここの議論は大半 $\mathbb{R}$ の代りに separative
locally convex topological vector space 上の function
で考えてよい。

定義 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が convex とは

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1$ かつ $x, y \in \mathbb{R}$ で成立
することである。

定義 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が proper とは $f(x) < +\infty$ となる $x \in \mathbb{R}$ が少なくとも一つ存在すること。更に $\mathcal{D}(f) = \{x; f(x) < +\infty\}$ を f の effective domain と呼び、effective domain は convex set になる。

定義 3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ のとき

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{yx - f(x)\}$$

を f の conjugate function と呼び、 f が convex proper function のとき f^* は同じ性質をみたす。

一般に

$$f(x) \geq f^{**}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

である。

$$f(x) = f^{**}(x)$$

となるための必要十分条件は f が x で lower semi-continuous になることである。一般には高々2つの x の値を除いて $f(x) = f^{**}(x)$ となる。(R の場合)

定義 4. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の proper な convex function の全体を $\mathcal{C}$ で表わす。 $\mathcal{C}$ は convex set でないが

$f \in \mathcal{C}, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{C}$ であり $f, g \in \mathcal{C}, \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$

$\neq \emptyset$ で $\alpha, \beta \geq 0$ ならば $\alpha f + \beta g \in \mathbb{C}$ となる。

3. $\mathbb{C}$ の性質 $\mathbb{C}$ は通常の order で 半順序集合になる。

1) $\mathbb{C}$ は conditionally complete な ordered set である。 $\mathbb{C} \ni f, g$ に對し f と g との最小上界が存在するときは $f \sqcup g$ で表わし, f と g との最大下界が存在するときは $f \sqcap g$ とで表わす。

2) $\mathbb{C} \ni f, g$ に對し, $f \sqcup g$ が存在して $\mathbb{C}$ の要素となるための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x), g(x) < +\infty$$

即ち $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$ となることである。

3) $\mathbb{C} \ni f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に對し, $\bigsqcup_\lambda f_\lambda$ (f_λ の最小上界) が存在するための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \sup_\lambda f_\lambda(x) < +\infty$$

4) つぎの式は もしも 左辺又は右辺が存在したときに成立する。 $f, f_\lambda \in \mathbb{C}$ として

$$f \sqcap \left(\bigsqcup_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcup_\lambda (f \sqcap f_\lambda)$$

$$f \sqcup \left(\bigsqcap_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcap_\lambda (f \sqcup f_\lambda)$$

ここで $\bigsqcap_\lambda f_\lambda$ は $\{f_\lambda\}$ の最大下界を表わす。

5) $f_n \downarrow f \in \mathbb{C}$ のとき, $f_n^* \uparrow f^*$ が成立する。

証明) $f_n(x) \downarrow f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ であるから

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_x \{ yx - f(x) \} = \sup_x \sup_n \{ yx - f_n(x) \} \\ &= \sup_n \sup_x \{ yx - f_n(x) \} \\ &= \sup_n f_n^*(y) \end{aligned} \quad (\text{証明})$$

b) $f_n \uparrow f \in \mathbb{C}$ のとき $f_n^* \downarrow f^*$ は一般に成立しない。しかし $f^* \leq \inf_n f_n^*$ が成立し、高々2点の y を除いて

$$f_n^*(y) \downarrow f^*(y)$$

が成立する。

証明は Fenchel - Moreau の定理を用いて出す。

下記の example は例外点のあるものである。

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq 0 \\ -\frac{1}{n}x & \text{for } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{for } x \geq n \end{cases}$$

のとき $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(0) \neq f^*(0)$$

となる。

7) $f \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$ のとき

$$(\lambda f)^*(y) = \lambda f^*\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$(f + \alpha)^*(y) = f^*(y) - \alpha$$

$f, g \in \mathbb{C}$ に対して, つぎの infimal convolution を定義する。

$$(f \square g)(x) = \inf \{ f(x_1) + g(x_2) ; x_1 + x_2 = x \}$$

このとき, つぎの Moreau-Rockafellar の公式が成立する。 $f \square g \in \mathbb{C}$ である。

$$(f \circ g)^*(y) = (f^* + g^*)(y)$$

$$(f + g)^*(y) \leq (f^* \circ g^*)(y)$$

しかし, 上の式は高々2点の y を除いて, 等号が成立する。

4. Moreau-Rockafellar の定理の一般化

Ω を有限測度空間 (簡単のため一般の測度空間でも或程度成立する), $P(\Omega)$ を Ω から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 値 measurable function のなす空間, $S(\Omega)$ を Ω から $\mathbb{R}$ 値 measurable function のなす空間とする。 $\mathbb{R}$ から $P(\Omega)$ への convex operator F を考える。すなわち

$$F(\alpha x + \beta y) \leq \alpha F(x) + \beta F(y)$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1, x, y \in \mathbb{R}$$

ここで不等号は $P(\Omega)$ の中での順序, すなわち measure zero を除いて一致する $P(\Omega)$ の要素は同一視することとするので, measure zero を除いての大小関係とする。

一般的には, convex operator の値域は vector space を考えるのが普通であるが, Young-Fenchel 変換を考えると, vector space をそのままにしては都合が

思くなるのである。ordered vector space を値域にあるような理論はないわけではないが、理論 (convex analysis) を作るためには若干不備な点がある。

さて、 F の表現定理を作る必要がある。

定理 $F(x) \in S(\Omega)$ となる $x \in \mathbb{R}$ が少なくとも一つ存在したとする。このとき $\mathbb{R} \times \Omega$ 上の函数 $F(x, t)$ がつぎの性質をもつように作ることができる。

i) $\exists$ measure zero set $A \subset \Omega$ があって、 $t \notin A$ ならば函数 $\mathbb{R} \ni x \rightarrow F(x, t)$ が proper な convex function である。

ii) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して、つぎの函数 (Ω 上の)

$$\Omega \ni t \rightarrow F(x, t)$$

は Ω の可測函数である。

iii) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し、 Ω 上の函数としての $F(x, t)$ は

$$F(x, t) = F(x) \quad (P(\Omega) \text{ の要素として})$$

となる。

ここで、 $F(x, t)$ はすべて各 $t \in \Omega$ に対して x の convex function であると仮定することができる。したがって、 F の conjugate function の system $\{F^*(y, t)\}$ が考えられ

る。さて, $F(x, t)$ の平均 convex function と dual の system $\{F^*(y, t)\}$ で表現するための条件を求めることにする。

基本 lemma $f_n \in \mathbb{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}$ のとき, f の effective domain $\mathcal{D}(f)$ に内点があるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(y) = f^*(y)$$

がほぼ2点の y を除いて, 成立する。

注意 $\mathcal{D}(f)$ に内点のないときには, もっと別の $\mathbb{C}$ における位相を考えないと収束に關する必要十分な条件がでない。

この lemma の証明には, つぎの lemma が必要である。

$$\text{lemma} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C} \quad (f_n \in \mathbb{C})$$

$[a, b] \subset \text{Int}(\mathcal{D}(f)) = \{\mathcal{D}(f) \text{ の内点の集まり} \}$ ならば

f_n は f に $[a, b]$ で一様に収束する。

更に $[a, b]$ で一様 Lipschitz である。(この性質は基本 lemma の証明に必要なが, convex function の収束性の一つの特徴を与えている。)

つぎに, 有限個の convex function $f_1, f_2, \dots, f_n$ に対し, その Harmonic sum を定義する。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を正数として

$$\lambda_1 f_1^{\lambda_1} \square \lambda_2 f_2^{\lambda_2} \square \dots \square \lambda_n f_n^{\lambda_n}$$

を一般に $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の $(f_1, \dots, f_n)$ に関する Harmonic sum とおけば、 $\square = \square$

$$f_1^{\lambda_1}(x) = f_1\left(\frac{x}{\lambda_1}\right), \dots, f_n^{\lambda_n}(x) = f_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

とする。

measure space Ω の分割を $A_1, \dots, A_n$ (measurable) とし、 Ω の測度 $\mu(\Omega) = 1$ とし $\mu(A_1), \dots, \mu(A_n) > 0$ とする。 $\lambda_k = \mu(A_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) とし、system $\{F(x, t)\}$ の近似 Harmonic sum は $t_k \in A_k$ とし

$$\lambda_1 f_1^{\lambda_1}(\cdot, t_1) \square \lambda_2 f_2^{\lambda_2}(\cdot, t_2) \square \dots \square \lambda_n f_n^{\lambda_n}(\cdot, t_n)$$

を考へるとかゝるとき、分割を細かにしたときの極限が存在するとき

$$\int_{\Omega} \square F(x, t) d\mu(t)$$

又は

$$\bigoplus_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$$

で表わすことをする。この x の函数を limiting Harmonic sum w. r. to a measure space (Ω, μ) (今の場合は $\mu(\Omega) = 1$ だから probability space) という。

以上の準備より Moreau-Rachafeller の定理の積分化定理を示すことにする。

定理 F を $\mathbb{R}$ から $P(\Omega)$ への convex operator とし、
2つの異なる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対して $F(x_1), F(x_2) \in L^1(\Omega)$
とする。このとき、 $F(x)$ の平均は convex function
 $f(x) = \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$ に対して、その conjugate

function $f^*(y)$ は 高々二点の y のとき

$$f^*(y) = \bigoplus_{\Omega} F^*(y, t) d\mu(t)$$

が成立する。

この定理は convex function の system の積分によって定義される convex function の conjugate function を system の conjugate function の組の Harmonic sum の極限で本質的に与えられることを示したものである。

証明は基本 lemma から直ちに得られる。基本 lemma の証明はこれ程 trivial ではない。

References

- (1) A.D.Ioffe and V.M.Tihomirov: Theory of Extremal Problems, North-Holland Pub. Company, (1978)
- (2) S.Koshi and N.Komuro: A generalization of the Fenchel-Moreau theorem, Proc. Japan Acad. 59(1983) 178-181
- (3) R.T.Rockafellar: Network flows and monotropic optimization John Wiley (1984)
- (4) J.V.Tiel: Convex analysis, John Wiley (1984)
- (5) J.Zowe: A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices, J.Math.Anal.Appl., 50 (1975) 273-287
- (6) S.Koshi, H.C.Lai and N.Komura: Convex programming on spaces of measurable functions (in preparation, will be published in Hokkaido Mathematical Journal)