

Weyl 垂群と Hamilton 閉路

山根 宏之

富山大学学術研究部理学系

Hiroyuki Yamane

Faculty of Science, Academic Assembly, University of Toyama

Abstract. Weyl 垂群の Hamilton 閉路について解説する。詳しくは、[16] をみよ。[16] において、標数 0 の体上で定義される（有限型の）一般化された量子群に付随する Weyl 垂群の Cayley グラフの Hamilton 閉路の存在性を示した。階数が n ならば、その Cayley グラフは、連結 n -正則グラフである。階数が 1 のときは、その Cayley グラフは、頂点が 2 つで、辺が 1 つであるので、Hamilton 閉路は存在しない。階数が 2 のときは、その Cayley グラフは、連結 2-正則グラフであるので、Hamilton 閉路の存在性は明らかである。[16] ではその存在性を階数が 3, 4 のときは、例を具体的に与える事によって示し、階数が 5 以上のときは、存在性のみを示した。[3] によって有限コクセター群に対して定義される Cayley グラフに Hamilton 閉路が存在する事が示されたが、[16] では本質的に同じ証明法を実行した。

1 Introduction

$x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して、 $J_{x,y} := \{n \in \mathbb{Z} | x \leq n \leq y\}$ とおく。集合 X に対して、 $|X|$ を X の濃度とする。まず、有限グラフと Hamilton 閉路の定義を与える。

有限グラフ

V を空ではない有限集合とする。 $P_2(V)$ を V の部分集合で 2 つの異なる元からなるものを元とするものとする。すなわち、 $P_2(V) := \{X \subset V | |X| = 2\}$ である。 E を $P_2(V)$ の空でない集合とする。組 (V, E) を有限グラフとよぶ。組 $(V, P_2(V))$ を有限完全グラフとよぶ。

Hamilton 閉路

$\Gamma = (V, E)$ を有限グラフとする。ここで、 V と E はそれぞれ頂点と辺の集合である。 $\varphi: J_{1,|V|} \rightarrow V$ を全単射写像とする。 φ が Γ の Hamilton 閉路であるとは、

$$\{\varphi(|E|), \varphi(1)\} \in E \quad \text{および} \quad \forall i \in J_{1,|E|-1}, \{\varphi(i), \varphi(i+1)\} \in E$$

を満たすときにいう。

[3] によって有限コクセター群に対して定義される Cayley グラフに Hamilton 閉路が存在する事が示された。その方法は非常に簡潔なものであって、有限コクセター群のコ

クセターグラフがループを含まない事のみを使って証明している。さらにそれは下記の定理 1.1 と本質的に同じ証明法である。

定理 1.1. (Rapaport-Strasser (1959), [14, Lemma 1] をみよ) G を有限群とする。 $S = \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset G$ を $\langle S \rangle = G$, $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = e$ となるものとする。 $\alpha\beta = \beta\alpha$ を仮定する。このとき Cayley グラフ $\Gamma = \Gamma(G, S)$ は Hamilton 閉路をもつ。

証明: $z \in G$ と $X \subset G$ に対して $\partial_z(X) := \{g \in G \setminus X \mid \exists x \in X, g = xz\}$ とおく。 $H = \langle \beta, \gamma \rangle \subset G$ とおく。 $|H| = 2m$ であって、 $\Gamma(H, \{\beta, \gamma\})$ は Hamilton 閉路

$$e \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \beta\gamma \leftrightarrow \beta\gamma\beta \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (\beta\gamma)^{m-1}\beta \leftrightarrow (\beta\gamma)^m = e$$

をもつ。

帰納法を用いる。 $X_1 = H \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_q = G$ となる列を考える。各 $1 \leq i \leq q$ に対して X_i は閉路をもち、 $X_i = y_{i,1}H \amalg \cdots \amalg y_{i,1}H$ である。 $\partial_\alpha(X_i) = \emptyset$ ならば $X_i = G$ でなければならないので証明は終わる。

$\partial_\alpha(X_i) \neq \emptyset$ と仮定する。 $y \in \partial_\alpha(X_i)$ とする。 $yH \cap X_i = \emptyset$ である。 $(\because \exists h \in H, x := yh \in X_i \text{ と仮定する。} y = xh^{-1} \in X_i \text{ となり矛盾である。})$

$X_{i+1} := X_i \amalg yH$ とおく。 $x \in X_i$ を $y = x\alpha$ となるものとする。 $x = y\alpha$ である。 X_i は閉路をもつので、 $X_i \cap \{x\alpha, x\beta, x\gamma\} \neq \emptyset$ である。 $x\alpha \notin X_i$ であるので、 $X_i \cap \{x\beta, x\gamma\} \neq \emptyset$ である。 $x\gamma \leftrightarrow x \leftrightarrow x\beta$ は、その閉路の部分道である。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \leftrightarrow & x & \leftrightarrow & x\beta & \leftrightarrow & \cdots & (X_i) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & (\cdot\alpha) \\ \cdots & \leftrightarrow & y & \leftrightarrow & y\beta & \leftrightarrow & \cdots & (yH) \end{array}$$

上の図を参考にして、 X_i の閉路から $x \leftrightarrow x\beta$ を取り除き、 yH の閉路から $y \leftrightarrow y\beta$ を取り除いて、 $x \leftrightarrow y = x\alpha$ と $x\beta \leftrightarrow x\beta\alpha = x\alpha\beta = y\beta$ でつないで X_{i+1} の閉路を得る。□

上の定理の証明法と同じ方法で主結果を得た。

主結果 ([16]) 一般化された量子群のワイル亜群の Cayley グラフは Hamilton 閉路をもつ。

2 一般化されたルート系とワイル亜群 (1つ目の) 定義

この節の内容について、詳しい事は [10], [9], [1] を見よ。 I を空でない有限集合とする。 $n := |I| (\in \mathbb{N})$ とおく。 $F_2(I)$ を $I \cup \{e\}$ を生成元とし関係式 $i^2 = e$ で定義される半群と

する。 $F_2(I)$ は群である。 A を $F_2(I)$ が作用する空でない集合とする。 $i, j \in N, a \in A$ とする。

$$\Theta(i, j; a) = \{(ij)^m, (ji)^m | m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。 $\Theta(i, j; a) = \Theta(j, i; a)$ であり $i \cdot \Theta(i, j; a) = \Theta(i, j; a)$ が成り立つ。 $\theta(i, j; a) = |\Theta(i, j; a)| (\in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ とおく。 $(i, j; a)_{(0)} = (i, j; a)^{(0)} = a$ とおき, $(i, j; a)_{(m)} = i \cdot (i, j; a)^{(m-1)}$, $(i, j; a)^{(m)} = j \cdot (i, j; a)_{(m-1)}$ とおく。各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $(i, j; a)_{(m)} \neq (i, j; a)^{(m)}$ であれば $\theta(i, j; a) = \infty$ でありそうでなければ

$$\theta(i, j; a) = \min\{m \in \mathbb{N} | (i, j; a)_{(m)} = (i, j; a)^{(m)}\}$$

である。

I および A を上のものとする。

$$m_{i,j;a} = m_{j,i;a} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\} \quad (a \in A, i, j \in I, i \neq j)$$

とする。 $\theta(i, j; a) \in \mathbb{N}$ かつ $m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$ なら $\theta(i, j; a)$ は $m_{i,j;a}$ を割り切ると仮定する。 $\theta(i, j; a)$ なら $m_{i,j;a} = \infty$ であると仮定する。 $\mathbf{m} = (m_{i,j;a} | i, j \in I, i \neq j, a \in A)$ とおく。半群

$$W = (W, I, A, \cdot, \mathbf{m})$$

を $\{0, e_a, s_i^a\}$ を生成系とし下の定義関係式 (1)-(3) により定義する。

- (1) $00 = e_a 0 = 0e_a = s_i^a 0 = 0s_i^a = 0$, $e_a^2 = e_a$, $e_a e_b = 0$ ($a \neq b$), $e_{i \cdot a} s_i^a = s_i^a e_a = s_i^a$,
- (2) $s_i^{i \cdot a} s_i^a = e_a$,
- (3) $s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \cdots s_{i_{2m}}^{a_{2m}} = e_a$ ($i, j \in N, i \neq j, a \in A, m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$, ここで $m = m_{i,j;a}$, $i_{2k-1} = i$, $i_{2k} = j$ ($k \in J_{1,m}$), $a_t = (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ ($t \in J_{1,2m}$) とおく。)

各 $a \in A$ に対して V_a を n 次元実線形空間とし、 $\pi_a = \{\alpha_i^a | i \in I\}$ を V_a の基底であるものとし、 R_a を $\pi_a \subset R_a$ を満たす V_a の部分集合とする。

$$R_a^+ = R_a \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a), \quad R_a^- = R_a \cap (\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\leq 0} \alpha_i^a)$$

とおく。各 $a \in A, i \in I$ に対して $\sigma_i^a : V_a \rightarrow V_{i \cdot a}$ を線形同型写像とする。各 $a \in A, i, j \in I, i \neq j$ に対して $m_{i,j;a} := |R_a^+ \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^a \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j^a)| (\in J_{2,\infty} \cup \{\infty\})$ とおく。

定義 2.1. データ $R = (I, A, (V_a, R_a, \pi_a, (\sigma_i^a)_{i \in I})_{a \in A})$ が次の (1)-(4) を満たすとき一般化されたルート系とよぶ。

- (1) $R_a = R_a^+ \cup R_a^-$, $\mathbb{R} \alpha_i^a \cap R_a = \{\alpha_i^a, -\alpha_i^a\}$
- (2) $\sigma_i^a(R_a) = R_{i \cdot a}$, $\sigma_i^a(\alpha_i^a) = -\alpha_i^{i \cdot a}$, $\sigma_i^a(\alpha_j^a) \in \alpha_j^{i \cdot a} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^{i \cdot a}$ ($j \neq i$)
- (3) $\sigma_i^{i \cdot a} \sigma_i^a = \text{id}_{V_a}$
- (4) $\theta(i, j; a) \in \mathbb{N}$ かつ $m_{i,j;a} \in \mathbb{N}$ なら $\theta(i, j; a)$ は $m_{i,j;a}$ を割り切る。 $\theta(i, j; a) = \infty$ なら $m_{i,j;a} = \infty$ である。

さらに、 $|R_a| < \infty$ のとき、 R を一般化された有限ルート系とよぶ。 $|R_a| < \infty$ のとき、 $R_a^- = -R_a^+$ である。

この $\mathbf{m} = (m_{i,j;a} | a \in A, i, j \in I)$ に対して定義される $W = (W, I, A, \cdot, \mathbf{m})$ を R のワイル亜群 (Weyl groupoid) とよぶ。

定理 2.2. 公理 (4) は、次の公理 (4)' (または公理 (4)') に取り換えることができる。

(4)' $k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ ($t \in J_{1,k}$), $a \in A$ とする。 $a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ ($t \in J_{1,k}$) とおき、 $\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^a$ とおく。全ての $i \in I$ に対して $\gamma(\alpha_i^a) = \alpha_i^{a_k}$ であるならば $a_k = a$ である。

((4)'' γ を (4)' のものとする。 $\gamma(R_+^a) = R_+^{a_k}$ ならば $a_k = a$ である。)

V を $\{e_i | i \in I\}$ を基底とする $\mathbb{R}$ -線形空間とする。 $\hat{\sigma}_i^a \in \text{GL}(V)$ を $\hat{\sigma}_i^a(e_i) = -e_i$, $\hat{\sigma}_i^a(e_j) = e_j + N_{ij}^a e_i$ ($j \neq i$) で定義する。ここで、 $N_{ij}^a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\sigma_i^a(\alpha_j^a) \in \alpha_j^a + N_{ij}^a \alpha^a$ により定義する。

定理 2.3. $k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ ($t \in J_{1,k}$), $a \in A$ とする。 $a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ ($t \in J_{1,k}$) とおき、 $\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^a$, $\hat{\gamma} := \hat{\sigma}_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \hat{\sigma}_{i_2}^{a_1} \hat{\sigma}_{i_1}^a$, とおく。 $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ を $\hat{\gamma}(e_j) = \sum_{i \in I} d_{ij} e_i$ により定義する。このとき、

$$\gamma(\alpha_j^a) = \sum_{i \in I} d_{ij} \alpha_i^{a_k}$$

が成り立つ。

定理 2.4. $k \in \mathbb{N}$, $i_t \in I$ ($t \in J_{1,k}$), $a \in A$ とする。 $a_t := (i_t i_{t-1} \cdots i_1) \cdot a$ ($t \in J_{1,k}$) とおき、 $\gamma := \sigma_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots \sigma_{i_2}^{a_1} \sigma_{i_1}^a$ とおく。 $c := s_{i_k}^{a_{k-1}} \cdots s_{i_2}^{a_1} s_{i_1}^a (\in W)$ とおく。このとき、

$$\gamma = \text{id}_{V^a} \iff c = e_a$$

が成り立つ。

3 (2つ目の) 一般化されたルート系—1つ目と同値

この節の内容について、詳しい事は [15], [2] を見よ。 $n \in \mathbb{N}$ とする。 $\mathbb{R}^n$ を標準的な n 次元実ベクトル空間とする。 $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底とする。 $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \subset \mathbb{R}^n$ とする。

$\mathbb{R}^n$ の有限部分集合 $\mathcal{R}$ を $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^n$ となるものとする。 $\mathcal{R}$ の部分集合の族 $\mathbb{B}$ を、各 $B \in \mathbb{B}$ が $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ -基であり $\mathcal{R}_B^+ := \mathcal{R} \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}e_n)$ とおいたときに $\mathcal{R} = \mathcal{R}_B^+ \cup (-\mathcal{R}_B^+)$ を満たすものとして定義する。

定義 3.1. 「 $\mathcal{R}$ が一般化された有限ルート系」であるとは、次の (0)-(3) を満たすときにいう。

(0) $\mathcal{R}$ は空でない有限集合であり、 $\mathbb{B}$ は空でない。

(1) $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathbb{B}$

(2) $\forall \alpha \in \mathcal{R}, \mathbb{R}\alpha \cap \mathcal{R} = \{\pm\alpha\}$

(3) $\forall B \in \mathbb{B}, \forall \alpha \in B, \exists B^{(\alpha)} \in \mathbb{B}, (-\mathcal{R}_B^+) \cap \mathcal{R}_{B^{(\alpha)}}^+ = \{-\alpha\}$

このとき

$$\exists N_{\beta, \alpha}^B \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (\beta \in B \setminus \{\alpha\}), B^{(\alpha)} = \{-\alpha\} \cup \{\beta + N_{\beta, \alpha}^B \alpha \mid \beta \in B \setminus \{\alpha\}\}$$

が成り立つ。

定理 3.2. $\mathbb{B}$ を定義 3.1 ものとする。 $B \in \mathbb{B}$ の元に次の性質 (*) を満たすように順序付け $B = \{\alpha_1^B, \dots, \alpha_n^B\}$ を行うことが出来る。

(*) 全単射 $\tau_i : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ ($i \in J_{1,n}$) で次の性質「」を満たすものがある。

$$\lceil \tau_i(B) = B^{(\alpha_i^B)} \text{ であり、} \alpha_i^{\tau_i(B)} = -\alpha_i^B, \alpha_j^{\tau_i(B)} = \alpha_j^B + N_{\alpha_i^B, \alpha_j^B}^B \alpha_i^B \text{ (} j \neq i \text{)} \rceil$$

明らかに

$$\tau_i(\tau_i(B)) = B \quad (B \in \mathbb{B})$$

が成り立つ。

定理 3.3. $B \in \mathbb{B}$ とする。このとき、 $\mathbb{B} = \{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}(B) \mid k \in \mathbb{N}, i_t \in J_{1,n} (t \in J_{1,k})\}$ が成り立つ。

定理 3.4. $B \in \mathbb{B}$ とする。 $1 \leq i \neq j \leq n$ とする。

$$m := m_{ij}^B := |\mathcal{R}_B^+ \cap (\mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j)|$$

とおく。このとき

$$(\tau_i \tau_j)^m(B) = B$$

である。さらに、 m 個の元

$$B, \tau_j(B), \tau_i \tau_j(B), \tau_j \tau_i \tau_j(B), \dots, \underbrace{\cdots \tau_i \tau_j \tau_i \tau_j(B)}_{m-1}$$

は全て異なる。

定理 3.5. 定義 2.1 の R^a は、 $|R^a| < \infty$ であるならば、定義 3.1 の一般化された有限ルート系である。ただし、 α_i^a と e_i を同一視する。逆に、定義 3.1 の $\mathcal{R}$ は、 $A = \mathbb{B}$ とする定義 2.1 の意味での一般化された有限ルート系である。

定義 3.6. グラフ $\Gamma(\mathcal{R}) = (V(\mathcal{R}), E(\mathcal{R}))$ を頂点の集合 $V(\mathcal{R})$ を $\mathbb{B}$ と同一視し、辺の集合 $E(\mathcal{R})$ を $\{\{B, \tau_i(B)\} | B \in \mathbb{B}, i \in J_{1,n}\}$ と同一視することによって定義する。 $(\mathcal{R})$ のワイル重群を W とする。 $\Gamma(\mathcal{R})$ を W の Cayley グラフとよぶ。

Remark 3.7. 一般化された有限ルート系は [5] により分類された。

4 主定理

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。 $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする。写像 $\chi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{K}^\times$ が次の性質を満たすとき bicharacter という。

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \chi(a+b, c) &= \chi(a, c)\chi(b, c), & \chi(a, b+c) &= \chi(a, b)\chi(a, c) \\ (a, b, c &\in \mathbb{Z}^n) \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{Z}^n$ の (順序付き) 基の集合とする。 $B = \{\alpha_1^B, \dots, \alpha_n^B\} \in \tilde{\mathbb{B}}$ に対して

$$q_{ij}^B := \chi(\alpha_i^B, \alpha_j^B) \quad (i, j \in J_{1,n})$$

とおく。 $\tilde{\mathbb{B}}$ の空でない有限部分集合 $\mathbb{B}$ が $\mathfrak{s}$ admissible であるとは、次の条件 (1)-(4) を満たすときにいう。

(1) $\mathbb{B}$ は空でない有限集合である。

(2) 各 $B \in \mathbb{B}$ と、各 $i, j \in J_{1,n}$, $i \neq j$, に対して、次の条件を満たす $N_{ij}^{\chi, B} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。

$$(2-1) \quad q_{ii}^B = 1 \text{ のときは、} N_{ij}^{\chi, B} = 0$$

$$(2-2) \quad q_{ii}^B \neq 1 \text{ のときは、}$$

$$((q_{ii}^B)^{N_{ij}^{\chi, B}+1} - 1)(1 - q_{ij}^B q_{ji}^B (q_{ii}^B)^{N_{ij}^{\chi, B}}) = 0,$$

かつ

$$((q_{ii}^B)^{m+1} - 1)(1 - q_{ij}^B q_{ji}^B (q_{ii}^B)^m) \neq 0 \quad (m \in J_{0, N_{ij}^{\chi, B}-1})$$

(3) 各 $B \in \mathbb{B}$ と、各 $i \in J_{1,n}$ に対して、 $N_{ii}^{\chi, B} := -2$ とおき、

$$\tau_i(B) := \{\alpha_j^{\tau_i(B)} = \alpha_j^B + N_{ij}^{\chi, B} \alpha_i | j \in J_{1,n}\}$$

とおく。 $\tau_i(B) \in \mathbb{B}$ である。

(4) 各 $B \in \mathbb{B}$ に対して、

$$\mathbb{B} = \{B\} \cup \{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}(B) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in J_{1,n}\}$$

である。

定理 4.1. $\mathbb{B}$ を admissible であるものとする。 $\mathcal{R} := \cup_{B \in \mathbb{B}} B$ とおく。 $\mathcal{R}$ は一般化された有限ルート系である。

主定理 ([16]) $n \geq 2$ とする。 $\mathbb{B}$ を admissible であるものとする。 $\mathcal{R} := \cup_{B \in \mathbb{B}} B$ とおく。このとき、有限グラフ $\Gamma(\mathcal{R})$ は Hamilton 閉路をもつ。

Remark 4.2. admissible な $(\chi, \mathbb{B})$ は、[7] により分類された。 $(\mathbb{K}$ の標数は 0 である。Remark 4.2 と下記の Remark 5.10 は同じことを述べている。)

5 一般化された量子群

$\mathbb{K}$ を体とする。 $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x \in \mathbb{K}$ に対して、

$$(n)_x := \sum_{r=1}^n x^r, \quad (n)_x! := \prod_{r=1}^n (n)_x$$

とおく。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in J_{0,n}$, $x \in \mathbb{K}$ に対して、 $\binom{n}{m}_x \in \mathbb{K}$ を

$$\binom{n}{0}_x := \binom{n}{n}_x := 1,$$

$$\binom{n}{m}_x := \binom{n-1}{m}_x + x^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_x = x^m \binom{n-1}{m}_x + \binom{n-1}{m-1}_x \quad (m \in J_{1,n-1})$$

によって定義する。 $(m)_x!(n-m)_x! \binom{n}{m}_x = (n)_x!$ が成り立つ。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in \mathbb{K}$ に対して、

$$(n; x, y) := 1 - x^{n-1}y, \quad (n; x, y)! := \prod_{m=1}^n (m; x, y)$$

とおく。 $x \in \mathbb{K}^\times$ に対して、 $\text{ord}(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$ を

$$\text{ord}(x) := \begin{cases} \infty & (\forall n' \in \mathbb{N}, (n')_x \neq 0 \text{ であるとき}), \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid (n)_x = 0\} & (\exists n'' \in \mathbb{N}, (n'')_x = 0 \text{ であるとき}), \end{cases}$$

により定義する。

$n \in \mathbb{N}$ とし、 $\mathfrak{A} := \mathbb{Z}^n$ 、 $I := J_{1,n}$ 、 $\alpha_i := e_i \in \mathfrak{A}$ ($i \in I$) とする。 $U = U(\chi)$ を bicharacter $\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{K}$ によってきまる一般化された量子群とする。 $U = U(\chi)$ の定義は [2, Theorem 6.1] をみよ。 U は $\mathbb{K}$ 上の結合的代数である。

$$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in U(\chi))$$

とおく。

U の生成元 K_λ, L_λ ($\mu \in \mathfrak{A}$), E_i, F_i ($i \in I$) は次の関係式をみたす。

$$(5.1) \quad \begin{cases} K_0 = L_0 = 1, K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu}, L_\lambda L_\mu = L_{\lambda+\mu}, \\ K_\lambda E_i K_\lambda^{-1} = \chi(\lambda, \alpha_i) E_i, K_\lambda F_i K_\lambda^{-1} = \chi(\lambda, -\alpha_i) F_i, \\ L_\lambda E_i L_\lambda^{-1} = \chi(-\alpha_i, \lambda) E_i, L_\lambda F_i L_\lambda^{-1} = \chi(\alpha_i, \lambda) F_i, \\ [E_i, F_i] = \delta_{ij}(-K_{\alpha_i} + L_{\alpha_i}) \end{cases}$$

U は次の式 (5.2) によってホップ代数 $(U, \Delta, \varepsilon, S)$ とみなせる。

$$(5.2) \quad \begin{cases} \Delta(K_\lambda) = K_\lambda \otimes K_\lambda, \Delta(L_\lambda) = L_\lambda \otimes L_\lambda, \\ \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, \Delta(F_i) = F_i \otimes L_{\alpha_i} + 1 \otimes F_i, \\ \varepsilon(K_\lambda) = \varepsilon(L_\lambda) = 1, \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \\ S(K_\lambda) = K_{-\lambda}, S(L_\lambda) = L_{-\lambda}, S(E_i) = -K_{-\alpha_i} E_i, S(F_i) = -F_i L_{-\alpha_i} \end{cases}$$

$U^0 = U^0(\chi)$ を U の K_λ, L_λ ($\mu \in \mathfrak{A}$) で生成された部分代数とする。 $\{K_\lambda L_\mu | \lambda, \mu \in \mathfrak{A}\}$ は U^0 の $\mathbb{K}$ -線形空間としての基底である。即ち、

$$U^0 = \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathfrak{A}} \mathbb{K} K_\lambda L_\mu$$

である。 $U^+ = U^+(\chi)$ を U の ($i \in I$) で生成された部分代数とする。ただし、 $1 \in U^+$ である。 $U^- = U^-(\chi)$ を U の ($i \in I$) で生成された部分代数とする。ただし、 $1 \in U^-$ である。線形写像

$$U^- \otimes_{\mathbb{K}} U^0 \otimes_{\mathbb{K}} U^+ \rightarrow U \quad (Y \otimes Z \otimes X \mapsto YZX)$$

は全単射である。 U の線形部分空間 U_λ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) で

$$U^0 \subset U_0, E_i \in U_{\alpha_i}, E_i \in U_{-\alpha_i}, U_\lambda U_\mu \subset U_{\lambda+\mu}, U = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{A}} U_\lambda$$

を満たすものが一意的に存在する。 $\mathfrak{A}^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ とおく。 $\lambda \in \mathfrak{A}^+$ に対して $U_\lambda^+ := U^+ \cap U_\lambda$, $U_{-\lambda}^- := U^- \cap U_{-\lambda}$ とおく。

が成り立つ。

$$\begin{aligned} U^+ &= \oplus_{\lambda \in \mathfrak{A}^+} U_\lambda^+, \quad U^- = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{A}^+} U_{-\lambda}^-, \\ \dim U_\lambda^+ &= \dim U_{-\lambda}^-, \\ \dim U_0^+ &= \dim U_{\alpha_i}^+ = 1, \quad U_0^+ = \mathbb{K}1, \quad U_{\alpha_i}^+ = \mathbb{K}E_i, \\ \dim U_0^- &= \dim U_{-\alpha_i}^- = 1, \quad U_0^- = \mathbb{K}1, \quad U_{-\alpha_i}^- = \mathbb{K}F_i, \end{aligned}$$

が成り立つ。次の事実 (5.3) が成り立つ。「(5.3) が $U(\chi)$ の定義である」と言ってよい。

$$(5.3) \quad \begin{aligned} &\bullet \lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}, X \in U_\lambda^+ \text{ とする。} \\ &\quad \text{このとき, 「}\forall i \in I, [X, F_i] = 0 \implies X = 0\text{」 が成り立つ。} \\ &\bullet \lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}, Y \in U_{-\lambda}^- \text{ とする。} \\ &\quad \text{このとき, 「}\forall i \in I, [E_i, Y] = 0 \implies Y = 0\text{」 が成り立つ。} \end{aligned}$$

U の $\mathbb{K}$ -代数としての自己同型写像 $\Omega : U \rightarrow U$ で $\Omega(K_\lambda) := K_{-\lambda}$, $\Omega(L_\lambda) := L_{-\lambda}$, $\Omega(E_i) := F_i L_{-\alpha_i}$, $\Omega(F_i) := K_{-\alpha_i} E_i$ となるものが一意的に存在する。

$$\begin{aligned} [X, Y] &:= XY - \chi(\lambda, \mu) YX \quad (X \in U_\lambda, Y \in U_\mu), \\ [X, Y]^{\text{op}} &:= XY - \chi(\mu, \lambda) YX \quad (X \in U_\lambda, Y \in U_\mu), \end{aligned}$$

とおく。 $i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} E_{0,i,j} &:= E_i, E_{m,i,j} := [E_i, E_{m-1,i,j}], & E_{0,i,j}^\vee &:= E_i, E_{m,i,j}^\vee := [E_{m-1,i,j}, E_i], \\ F_{0,i,j} &:= F_i, F_{m,i,j} := [F_i, F_{m-1,i,j}]^{\text{op}}, & F_{0,i,j}^\vee &:= F_i, F_{m,i,j}^\vee := [F_{m-1,i,j}, F_i]^{\text{op}}, \end{aligned}$$

とおく。

$$q_{ij} := \chi(\alpha_i, \alpha_j) \quad (i, j \in I) \text{ とおく。}$$

次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\text{EQ1}) \quad [E_i, F_i^m] &= (m)_{q_{ii}} (-K_{\alpha_i} + q_{ii}^{-m+1} L_{\alpha_i}) F_i^{m-1} \quad (i \in I, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ2}) \quad [E_i^m, F_i] &= -(m)_{q_{ii}} (-L_{\alpha_i} + q_{ii}^{-m+1} K_{\alpha_i}) E_i^{m-1} \quad (i \in I, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ3}) \quad [E_i, F_{m,i,j}] &= -(m)_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji}) K_{\alpha_i} F_{m-1,i,j} \quad (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ4}) \quad [E_{m,i,j}, F_i] &= (m)_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji}) L_{\alpha_i} E_{m-1,i,j} \quad (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ5}) \quad [E_i, F_{m,i,j}^\vee] &= (m)_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji}) F_{m-1,i,j}^\vee L_{\alpha_i} \quad (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ6}) \quad [E_{m,i,j}^\vee, F_i] &= -(m)_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji}) E_{m-1,i,j}^\vee K_{\alpha_i} \quad (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{N}) \\ (\text{EQ7}) \quad (i, j \in I, i \neq j, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \end{aligned}$$

$$[E_{l,i,j}, F_{m,i,j}] = \begin{cases} (l)_{q_{ii}}! \binom{m}{l}_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! F_i^{m-l} L_{\alpha_i + \alpha_j} & (0 \leq l < m), \\ (m)_{q_{ii}}! (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! (-K_{m\alpha_i + \alpha_j} + L_{m\alpha_i + \alpha_j}) & (m = l), \\ -(m)_{q_{ii}}! \binom{l}{m}_{q_{ii}} (l; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! E_i^{l-m} K_{m\alpha_i + \alpha_j} & (l > m \geq 0). \end{cases}$$

$$(\text{EQ8}) \quad (i, j \in I, i \neq j, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$[E_{l,i,j}^\vee, F_{m,i,j}^\vee] = \begin{cases} -(l)_{q_{ii}}! \binom{m}{l}_{q_{ii}} (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! K_{l\alpha_i + \alpha_j} F_i^{m-l} & (0 \leq l < m), \\ (m)_{q_{ii}}! (m; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! (-K_{m\alpha_i + \alpha_j} + L_{m\alpha_i + \alpha_j}) & (m = l), \\ (m)_{q_{ii}}! \binom{l}{m}_{q_{ii}} (l; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})! L_{m\alpha_i + \alpha_j} E_i^{l-m} & (l > m \geq 0). \end{cases}$$

$$(EQ9) [E_{l,i,j}, F_{m,i,k}] = [E_{l,i,j}^\vee, F_{m,i,k}^\vee] = 0 \quad (i, j, k \in I, i \neq j \neq k \neq i, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ10) [E_j, F_{m,i,j}] = (m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! F_i^m L_{\alpha_j} \quad (i, j, I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ11) [E_{m,i,j}, F_j] = -(m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! E_i^m K_{\alpha_j} \quad (i, j, I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ12) [E_j, F_{m,i,j}^\vee] = -(m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! K_{\alpha_j} F_i^m \quad (i, j, I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ13) [E_{m,i,j}^\vee, F_j] = (m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! L_{\alpha_j} E_i^m \quad (i, j, I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ14) \Delta(E_i^m) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} E_i^{m-t} K_{t\alpha_i} \otimes E_i^t \quad (i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ15) \Delta(F_i^m) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} F_i^t \otimes F_i^{m-t} L_{t\alpha_i} \quad (i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$(EQ16) (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$\Delta(E_{m,i,j}) = E_{m,i,j} \otimes 1 + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! E_i^t K_{(m-t)\alpha_i + \alpha_j} \otimes E_{m-t,i,j}$$

$$(EQ17) (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$\Delta(F_{m,i,j}) = 1 \otimes F_{m,i,j} + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! F_{m-t,i,j} \otimes F_i^t L_{(m-t)\alpha_i + \alpha_j}$$

$$(EQ18) (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$\Delta(E_{m,i,j}^\vee) = K_{m\alpha_i + \alpha_j} \otimes E_{m,i,j}^\vee + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! E_{m-t,i,j}^\vee K_{t\alpha_i} \otimes E_i^t$$

$$(EQ19) (i, j \in I, i \neq j, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$\Delta(F_{m,i,j}^\vee) = E_{m,i,j}^\vee \otimes L_{m\alpha_i + \alpha_j} + \sum_{t=0}^m \binom{m}{t}_{q_{ii}} (t; q_{ii}, q_{ii}^{m-t} q_{ij}q_{ji})! F_i^t \otimes F_{m-t,i,j}^\vee L_{t\alpha_i}$$

Remark 5.1. 等式 (EQ1)-(EQ19) は、(5.1) だけを定義関係式とする Hopf 代数 $\tilde{U}(\chi)$ において成り立つ。

補題 5.2. $i \in I, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。 $(m)_{q_{ii}}! = 0$ ならば、 $U_{m\alpha_i}^+ = \{0\}$ である。 $(m)_{q_{ii}}! \neq 0$ ならば、 $\dim U_{m\alpha_i}^+ = 1$ および $U_{m\alpha_i}^+ = \mathbb{K}E_i^m$ である。

補題 5.3. ([1, Lemma 4.9 (2)]) $i, j \in I, i \neq j$, とする。 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。このとき、 $\{E_{r,i,j}E_i^{m-r} | (m-r)_{q_{ii}}!(r)_{q_{ii}}!(r; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! \neq 0\}$ は $U_{m\alpha_i + \alpha_j}^+$ の基底である。(この集合が空集合ならば、 $U_{m\alpha_i + \alpha_j}^+ = \{0\}$ である。)

Karchenko's PBW Theorem

まず、記号を用意する。 Y を $\mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ の空でない集合とする。 $z : Y \rightarrow \mathbb{N}$ を写像とする。

$$Y^{(z)} := \{(\lambda, k) \in Y \times \mathbb{N} | \lambda \in Y, k \in J_{1,z(\lambda)}\}$$

とおく。写像 $p^{(Y,z)} : Y^{(z)} \rightarrow Y$ を $p^{(Y,z)}(y) := \lambda$ ($y = (\lambda, k) \in Y^{(z)}$) により定義する。

$$\tilde{\mathfrak{P}}^{(Y,z)} := \{f : Y^{(z)} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} | f \text{ は写像}\},$$

$$\tilde{\mathfrak{P}}^{(Y,z),\prime} := \{f \in \tilde{\mathfrak{P}}^{(Y,z)} | |\{y \in Y^{(z)} | f(y) \neq 0\}| < \infty\},$$

$$\mathfrak{P}^{(Y,z),\prime} := \{f \in \tilde{\mathfrak{P}}^{(Y,z),\prime} | \forall y \in Y^{(z)}, 0 \leq f(y) < \text{ord}(\chi(p^{(Y,z)}(y), p^{(Y,z)}(y)))\}$$

とおく。

$$\mathfrak{P}_\lambda^{(Y,z)} := \{f \in \mathfrak{P}^{(Y,z),\prime} | \sum_{y \in Y^{(z)}} f(y) p^{(Y,z)}(y) = \lambda\} \quad (\lambda \in \mathfrak{A}^+)$$

とおく。

定理 5.4. ([12], [13], ([6] もみよ))

(1) $R^+(\chi) \subset \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ と写像 $\varphi_\chi^+ : R^+(\chi) \rightarrow \mathbb{N}$ で次の性質 (5.4) を満たすものが一意的に存在する。

$$(5.4) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{A}^+, \dim U_\lambda^+ = |\mathfrak{P}_\lambda^{\langle R^+(\chi), \varphi_\chi^+ \rangle}|$$

(2) $R^+(\chi)^{\langle \varphi_\chi^+ \rangle}$ 上の全順序 $\preceq$ と $E_y \in U_\lambda^+ (y \in R^+(\chi)^{\langle \varphi_\chi^+ \rangle}, \lambda := p^{\langle R^+(\chi)^{\langle \varphi_\chi^+ \rangle}, \varphi_\chi^+ \rangle}(y))$ で、1 と

$$E_{y_1}^{f(y_1)} E_{y_2}^{f(y_2)} \cdots E_{y_{k_f}}^{f(y_{k_f})} \\ (f \in \tilde{\mathfrak{P}}^{\langle R^+(\chi)^{\langle \varphi_\chi^+ \rangle}, \varphi_\chi^+ \rangle}, \{y_1, y_2, \dots, y_{k_f}\} = f^{-1}(\mathbb{N}), y_1 \prec y_2 \prec \cdots \prec y_{k_f})$$

から成る集合が $U^+(\chi)$ の $\mathbb{K}$ -基底であるものが存在する。

$R(\chi) := R^+(\chi) \cup (-R^+(\chi))$ とおく。写像 $\varphi_\chi : R(\chi) \rightarrow \mathbb{N}$ を $\varphi_\chi(-\beta) := \varphi_\chi(\beta) := \varphi_\chi^+(\beta)$ ($\beta \in R^+(\chi)$) により定義する。

$$N_{ij}^\chi := |\{m \in \mathbb{N} | (m)_{q_{ii}}! (m; q_{ii}, q_{ij}q_{ji})! \neq 0 | (\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}) \\ (i, j \in I, i \neq j)$$

とおく。 $N_{ii}^\chi := -2$ ($i \in I$) とおく。

補題 5.2, 補題 5.3 より次を得る。

補題 5.5. $i, j \in I, i \neq j$, とする。 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。このとき、

$$\lceil m\alpha_i + \alpha_j \in R^+(\chi) \iff m \in J_{0, N_{ij}^\chi} \rceil$$

が成り立つ。さらに、 $m \in J_{0, N_{ij}^\chi}$ ならば、 $\varphi_\chi^+(m\alpha_i + \alpha_j) = 1$ が成り立つ。

定義 5.6. $i \in I$ とする。

(1) χ が i -finite であるとは、 $\lceil \forall j \in I \setminus \{i\}, N_{ij}^\chi < \infty \rceil$ を満たすときにいう。

(2) χ が i -finite であると仮定する。 $\mathbb{Z}$ -加群の同型写像 $\sigma_i^\chi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ を

$$\sigma_i^\chi(\alpha_j) := \alpha_j + N_{ij}^\chi \alpha_i \quad (j \in I)$$

によって定義する。 $(\sigma_i^\chi)^{-1} = \sigma_i^\chi$ である。

(3) χ が i -finite であると仮定する。 bicharacter $\tau_i \chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ を

$$\tau_i \chi(a, b) := \chi(\sigma_i^\chi(a), \sigma_i^\chi(a)) \quad (a, b \in \mathfrak{A})$$

によって定義する。 $\sigma_i^{\tau_i \chi} = \sigma_i^\chi$ であり、 $\tau_i \tau_i \chi = \chi$ である。

定理 5.7. ([4], [8]) χ が i -finite であると仮定する。

(1) $\sigma_i^\chi(R(\chi)) = R(\tau_i\chi)$ および $\varphi_{\tau_i\chi} \circ \sigma_i^\chi = \varphi_\chi$ が成り立つ。

(2) $\mathbb{K}$ 代数の同型写像 $T_i^{\tau_i\chi} : U(\tau_i\chi) \rightarrow U(\chi)$ で次の等式 (5.5) を満たすものが一意に存在する。

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & T_i^{\tau_i\chi}(K_\lambda) := K_{\sigma_i^\chi(\lambda)}, T_i^{\tau_i\chi}(L_\lambda) := L_{\sigma_i^\chi(\lambda)}, \\
 & T_i^{\tau_i\chi}(E_i) := F_i L_{-\alpha_i}, T_i^{\tau_i\chi}(F_i) := K_{-\alpha_i}, E_i, \\
 & T_i^{\tau_i\chi}(E_j) := E_{N_{ij}^\chi, i, j} \quad (j \neq i), \\
 & T_i^{\tau_i\chi}(F_j) := \frac{1}{(N_{ij}^\chi)^{q_{ii}}! (N_{ij}^\chi; q_{ii}, q_{ij} q_{ji})!} F_{N_{ij}^\chi, i, j} \quad (j \neq i),
 \end{aligned}$$

とくに、 $T_i^{\tau_i\chi}(U(\tau_i\chi)_\lambda) = U(\chi)_{\sigma_i^\chi(\lambda)}$ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) が成り立つ。

補題 5.8. $|R(\chi)| < \infty$ と仮定する。このとき、 $R(\chi)$ は一般化された有限ルート系である。さらに、 $\varphi_\chi(R(\chi)) = \{1\}$ である。

定理 5.9. ([11, Theorem 4.9]) $|R(\chi)| < \infty$ と仮定する。 $k := |R^+(\chi)|$ とし、 $i_t \in I$ ($t \in J_{1,k}$) を $\sigma_{i_1}^{\chi_1} \sigma_{i_2}^{\chi_2} \dots \sigma_{i_k}^{\chi_k}(R^+(\chi_k)) = -R^+(\chi)$ となるものとする。ここで、 $\chi_t := \tau_{i_t} \dots \tau_{i_1} \chi$ ($t \in J_{1,k}$) とおく。 $\beta_1 := \alpha_{i_1}$ とおき、 $\beta_t := \sigma_{i_1}^{\chi_1} \sigma_{i_2}^{\chi_2} \dots \sigma_{i_{t-1}}^{\chi_{t-1}}(\alpha_{i_t}) \in R^+(\chi)$ ($t \in J_{2,k}$) とおく。 $\{\beta_t | t \in J_{1,k}\} = R^+(\chi)$ である。 $E_{\beta_1} := E_{i_1}$ とおき、 $E_{\beta_t} := T_{i_1}^{\chi_1} T_{i_2}^{\chi_2} \dots T_{i_{t-1}}^{\chi_{t-1}}(E_{i_t}) \in U_{\beta_t}^+$ ($t \in J_{2,k}$) とおく。 $g : J_{1,k} \rightarrow J_{1,k}$ を全単射とする。このとき、

$$E_{\beta_{g(1)}}^{m_{g(1)}} E_{\beta_{g(2)}}^{m_{g(2)}} \dots E_{\beta_{g(k)}}^{m_{g(k)}} \quad (m_t \in J_{0, \text{ord}(\chi(\beta_t, \beta_t)) - 1})$$

から成る集合は、 $U^+(\chi)$ の $\mathbb{K}$ -基底である。

Remark 5.10. $\mathbb{K}$ の標数が 0 のとき、 $|R^+(\chi)| < \infty$ である χ は、[7] で分類された。

References

- [1] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Classification of finite dimensional irreducible representations of generalized quantum groups via Weyl groupoids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 51 (2015) 59-130.
- [2] P. Batra, H. Yamane, Centers of Generalized Quantum Groups, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018), no. 5, 1203-1241
- [3] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, Allan R. Wilks, Gray Codes for Reflection Groups, Graphs and Combinatorics 5 (1989) 315-325.
- [4] I. Heckenberger, The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type, Invent. Math. 164(1) (2006) 175-188.

- [5] M. Cuntz, I. Heckenberger, Finite Weyl groupoids, *J. Reine Angew. Math.* 702 (2015), 77-108.
- [6] I. Heckenberger, Nichols algebras, ECNU Shanghai, July 2008 <http://www.mi.uni-koeln.de/~iheckenb/na.pdf>
- [7] I. Heckenberger, Classification of arithmetic root systems, *Adv. Math.* 220(1) (2009) 59-124.
- [8] I. Heckenberger, Lusztig isomorphisms for Drinfel'd doubles of bosonizations of Nichols algebras of diagonal type, *J. Algebra* 323 (2010) 2130-2182.
- [9] I. Heckenberger, H.J. Schneider, Hopf algebras and root systems. *Mathematical Surveys and Monographs*, 247. American Mathematical Society, Providence, RI, 2020, ISBN: 978-1-4704-5232-2
- [10] I. Heckenberger, H. Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem, *Math. Z.* 259 (2008), no. 2, 255-276,
- [11] I. Heckenberger, H. Yamane, Drinfel'd doubles and Shapovalov determinants, *Rev. Un. Mat. Argentina* 51 (2010), no. 2, 107-146.
- [12] V. Kharchenko, A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, *Algebra Log.* 38(4) (1999) 259-276.
- [13] V. Kharchenko, Quantum Lie theory: A multilinear approach, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2150, Springer, Cham, 2015.
- [14] I. Pak, R. Radoicic, Hamiltonian paths in Cayley graphs, *Discrete Mathematics* 309 (2009) 5501-5508
- [15] H. Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $G^{(1)}(3)$, *So Paulo J. Math. Sci.* 10 (2016), no. 1, 9-19.
- [16] H. Yamane, Hamilton circuits of Cayley graphs of Weyl groupoids of generalized quantum groups, *Toyama Math. J.* 43 (2022) 1-76

Faculty of Science, Academic Assembly,
 University of Toyama 3190 Gofuku,
 Toyama 930-8555, Japan
 E-mail address: hiroyuki@sci.u-toyama.ac.jp

〒 930-8555 富山県富山市五福 3190 富山大学学術研究部理学系