

3次元 canonical singularity について

名大・理 早川 貴之

名大・理 竹内 聖彦

§.0. 序

canonical singularity は、一般型の曲面の canonical model に現われる Du Val singularity の概念を、高次元に拡張することによって、M. Reid [5] が導入した。更に、彼は、[6] でその一部である terminal singularity を、定式化している。

3次元の terminal singularity については、smooth point または cDV point の cyclic quotient であることが知られており (M. Reid [6])、smooth point の場合は、D. R. Morrison and G. Stevens [4] によって、また、cDV point の場合は S. Mori [2] によって、分類されている。

一方、3次元の canonical singularity で $\mathbb{C}^3$ の cyclic quotient になっているものは、N. Iwashita and M.-N. Ishida [1]

により分類されている。この結果は、D. R. Morrison [3] の分類結果も含んでいる。

このような背景で、3次元 canonical singularity (X, P) の中で、hypersurface singularity (X', P') を cyclic cover $\pi: (X', P') \rightarrow (X, P)$ に持つようなものの分類について考える。ここでは、hypersurface singularity (X', P') の cyclic quotient $(X, P) = (X', P')/\mathbb{Z}_m$ が canonical singularity になる為の必要条件を、S. Mori [2] が terminal singularity を分類したときの道具を用いて、hypersurface singularity (X', P') の局所方程式と、巡回群 $\mathbb{Z}_m$ の X' への作用とで具体的に表現する。

§1 で、記号を定め、Mori の判定法を述べた後、§2 で、主結果を述べる。§3 では、証明の概略を示す。

§.1. 記号と判定法

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の normal variety X について、 K_X でその canonical divisor を表す。これは、Weil divisor であるが、Cartier divisor とはかぎらない。

定義 1.1. (Reid) X を normal variety, $P \in X$ とする。 (X, P) が canonical (resp. terminal) singularity であ

るとは、次の2条件が満たされること:

- (1) ある整数 $r \geq 1$ について、 rK_X が P で Cartier divisor になる。
- (2) ある resolution $f: Y \rightarrow X$ があって、(1)の $r \in \mathbb{Z}$ について、 $rK_Y = f^*(rK_X) + \sum a_i E_i$ (ここで E_i は f に関する exceptional divisor 全体を動く) と書いた時、すべての i について $a_i \geq 0$ (resp. $a_i > 0$) となる。

このとき、(1)の成立する最小の r を singularity (X, P) の index と呼ぶ。

さて、 (X, P) を 3次元の canonical singularity とする。 (X, P) の index が r の時、 (X, P) に対応して、 r 次の cyclic cover $\pi: (X', P') \rightarrow (X, P)$ で以下の条件を満たすものが、局所解析的同型を除いて一意に存在する: π は codimension 1 で étale かつ (X', P') は index 1 の canonical singularity である。更に、実際には π は codimension 2 で étale になる。(Reid [5])

ここでは、この (X', P') が hypersurface singularity になるものを考える。その為に (X, P) から (X', P') を作る操作を逆にして、3次元 hypersurface singularity (X', P') を

m 次の cyclic group $\mathbb{Z}_m$ の作用であった時に、それがいつ canonical singularity になるかを考える。

仮定 1.2. $(X', P') = (\{\varphi=0\}, (0))$ を $\varphi \in (x, y, z, u)^2$. $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ と $\mathbb{C}^4$ の原点 (0) の定める 3 次元の hyper-surface singularity の germ とし、 $m (\geq 2)$ 次の cyclic group $\mathbb{Z}_m$ の $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ への作用を、 $\mathbb{Z}_m$ の生成元 ρ に対して、次で定める:

$$\rho: (x, y, z, u) \mapsto (\zeta^{a(\rho)} x, \zeta^{b(\rho)} y, \zeta^{c(\rho)} z, \zeta^{d(\rho)} u)$$

ここで ζ は固定された 1 の原始 m 乗根とし、 $a(\rho), b(\rho), c(\rho), d(\rho) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とする。また φ は、この $\mathbb{Z}_m$ の作用で semi-invariant、 $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}/(\varphi)$ は normal とする。この時、上に定めた作用で $\mathbb{Z}_m$ は X' へ作用するが、その作用に関して、 $P' \in U \subset X'$ なる open set U が存在して、 $\mathbb{Z}_m$ は $U - \{P'\}$ に free に作用すると仮定する。そして、 $(X, P) = (X', P')/\mathbb{Z}_m$ とおく。

記号 1.3. 各 $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ について、 $\sigma(x) = \zeta^{a(\sigma)} x$, $\sigma(y) = \zeta^{b(\sigma)} y$, $\sigma(z) = \zeta^{c(\sigma)} z$, $\sigma(u) = \zeta^{d(\sigma)} u$ のとき、 x, y, z, u の単項式全体から $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ への関数 σ -weight modulo m (これを σ -wt (mod. m) と書く) を、

$$\sigma\text{-wt}(x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta) \equiv \alpha \cdot a(\sigma) + \beta \cdot b(\sigma) + \gamma \cdot c(\sigma) + \delta \cdot d(\sigma) \pmod{m}$$

で定義する。これは、 $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ の元のうち $\mathbb{Z}_m$ の作用で semi-invariant なもの全体から $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ への関数に自然に拡張でき、これも同じ $\sigma\text{-wt} \pmod{m}$ でかく。特に仮定 1.2. の φ は semi-invariant だから $\sigma\text{-wt } \varphi \pmod{m}$ が定まる。 σ が $\mathbb{Z}_m$ の生成元の時には $\sigma\text{-wt}$ を単に wt と書くこともある。また、 $\mathbb{Z}_m$ の作用を決めるには、逆に、ある生成元 $\rho \in \mathbb{Z}_m$ について、 $\rho\text{-wt } x, \rho\text{-wt } y, \rho\text{-wt } z, \rho\text{-wt } u \pmod{m}$ を定めればよい。

関数 $v: \mathbb{C}\{x, y, z, u\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が order とは、次の条件 (i) (ii) (iii) が満たされることをいう：

(i) $v(x) = a, v(y) = b, v(z) = c, v(u) = d$ とおいた時
 $a, b, c, d \geq 0$ かつ a, b, c, d のうち 3 つ以上は正。

(ii) ある $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ について $a \equiv \sigma\text{-wt } x, b \equiv \sigma\text{-wt } y,$
 $c \equiv \sigma\text{-wt } z, d \equiv \sigma\text{-wt } u \pmod{m}$ 。

(iii) 一般の $f \in \mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ について、

$$v(f) = \max \{j \in \mathbb{Z} \mid f(xt^a, yt^b, zt^c, ut^d) \equiv 0 \pmod{t^j}\}.$$

つまり order を決めるには、 $v(x), v(y), v(z), v(u)$ の値を条件 (i) (ii) を満たすように決め、条件 (iii) で $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ に拡張すればよい。

以上の仮定及び記号の下で、

定理 1.4. (Mori [2]) (X, P) が canonical (resp. terminal) singularity ならば、任意の order v について

$$v(x) + v(y) + v(z) + v(u) - m - v(\varphi) \geq 0 \text{ (resp. } > 0 \text{)}$$

が成立する。

注意 1.5. もし $(\text{wt } x, m) = d > 1$ ならば、 x のあるべき x^n が φ のべき級数展開の中に 0 でない係数を持って現われ、更に $\text{wt } \varphi \equiv 0 \pmod{d}$ である。(実際、この時、 $\mathbb{Z}_m$ の作用は、 x 軸に free でなくなるから、 $\{\varphi = 0\}$ は x 軸を含むことはできない。) 同じ主張が y, z, u についても成立する。

注意 1.6. $(\text{wt } x, \text{wt } y, m) = 1$ である。同様の主張が、 x, y, z, u のどの 2 つの組合せについても成立する。(実際、もしそうでなければ、 $\mathbb{Z}_m$ は $\{\varphi = 0\} \cap (xy\text{-平面})$ に free に作用しなくなる。ところがこれは 1 次元以上ある。)

注意 1.7. (X, P) の index は次で与えられる:

$$\text{index}(X, P) = m / (\text{wt } x + \text{wt } y + \text{wt } z + \text{wt } u - \text{wt } \varphi, m).$$

実際 $\omega_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(K_{X'})$ (divisorial sheaf) は、

$$s = \text{Res}_{X'} (dx \wedge dy \wedge dz \wedge du / \varphi)$$

で生成され, $wt\ s \equiv wt\ x + wt\ y + wt\ z + wt\ u - wt\ \varphi \pmod{m}$

だから、任意の $0 \leq a \in \mathbb{Z}$ について $t = s^a$ は X' 上の rational differential で P' では極も零点も持たない。従って、 $\omega_X^{[a]} = \mathcal{O}_X(aK_X)$ が invertible である為には、 t が $\mathbb{Z}_m$ の作用で invariant であることが必要かつ十分である。

仮定 1.2 の下で、 $\chi_1, \dots, \chi_r$ ($r \geq 3$) を $\mathbb{Z}_m$ の作用で semi-invariant な $\mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ の元であって以下の 3 条件を満たすものとする:

(i) $\mathbb{C}$ 上線型独立な x, y, z, u の多項式系 $u_1, \dots, u_r$ があって、 $\chi_i \mathbb{C}\{x, y, z, u\} = u_i \mathbb{C}\{x, y, z, u\}$ である。

(ii) $\dim \{ \chi_1 = \dots = \chi_r = 0 \} \leq 1$ 。

(iii) ある $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$ により、 $\varphi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_i$ と書ける。

すると、任意に与えられた order v について $v(\sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_i)$ の値は、 $\lambda \in (\mathbb{C}^\times)^r$ の取り方に依らず一定である。このとき、

定理 1.8. (Mori [2]) 任意の order v について、

$v(x) + v(y) + v(z) + v(u) - m - v(\varphi) \geq 0$ (resp. > 0) が成立すれば、一般的な $\lambda \in (\mathbb{C}^\times)^r$ について $\varphi_\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_i$ と置いた

時、この φ_λ から作った $(X, P) = (\{\varphi_\lambda = 0\}, (0))/\mathbb{Z}_m$ は、*canonical (resp. terminal) singularity* である。

以下では、仮定 1.2 の下で、定理 1.4 及び注意 1.5-1.7 を使って、 (X, P) が *canonical singularity* になる時の $\mathbb{Z}_m$ の作用と、 φ の形を具体的に決定する。その際、index が 1 になるもの、つまり *Gorenstein canonical singularity* は、ひとまとめにして扱う。

§.2. 結果

定理 2.1. 仮定 1.2 の下で、 $(X, P) = (\{\varphi = 0\}, (0))/\mathbb{Z}_m$ が *canonical singularity* になるならば、次の何れかである：

- (A) *Gorenstein canonical singularity*.
- (B) $\mathbb{Z}_m$ の作用が *terminal singularity* のときのそれと同じ形になるもの。
- (C) index が 2 で系列となって現われる *canonical singularity*.
- (D) 例外的なもの。

更に、(B), (C), (D) については、座標関数 x, y, z, u の置換を除けば、 $\mathbb{Z}_m$ の作用を以下の表の様に決定でき、 (X', P') の定義方程式 φ についても“ほとんど”決定できる。

表 1, 2, 3 はそれぞれ (B), (C), (D) の場合に対応し、各々の表における (1)–(5) の欄は、(1) cyclic group の位数、(2) canonical singularity (X, P) の index, (3) x, y, z, u, φ の weight, (4) (X', P') の定義方程式 φ の 2 次斉次部分 φ_2 を 2 次形式と見做した時の階数, (5) φ の形 (但し、“+...” は他の項を持つ可能性を示し、(*) は、 φ の形が terminal singularity のものと同じであることを示す。) を表わすものとする。また a, b, c, d は 1 以上の整数とする。

表 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
m	m	1 -1 a 0 0 (a, m) = 1	≥ 2	(*) $xy + f(z^m, u)$ $f \in (z^m, u^2) \mathbb{C}\{z^m, u\}$ $f(0, u) \in u^2 \mathbb{C}\{u\} \setminus \{0\}$
4	4	1 3 3 2 2	3 ≥ 2	(*) $x^2 + yz + u^{2b+1}$ (*) $x^2 + y^2 + f(z^2, u)$ $f \in (z^2, u^3) \mathbb{C}\{z^4, z^2u, u^2\}$ $f(0, u) \in u^3 \mathbb{C}\{u^2\} \setminus \{0\}$
3	3	1 2 2 0 0	1 1	(*) $u^2 + x^3 + y^3 + z^3$ (*) $u^2 + x^3 + y^2z + xz^4 \cdot \alpha + z^6 \cdot \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\{z^3\}, 4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$

表 1 (続き)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
3	3	1 2 2 0 0	1	$(*) u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3 \cdot \alpha + xz^4 \cdot \beta + yz^5 \cdot \gamma + z^6 \delta$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}\{z^3\}$
			1	$u^2 + x^3 + y^3 + \dots$
			1	$u^2 + x^3 + y^2 z + \dots$
			0	$x^3 + y^3 + \dots$
			0	$x^3 + y^2 z + \dots$
2	2	1 1 1 0 0	≥ 2	$(*) u^2 + x^2 + f(y, z)$ $f \in (y, z)^2 \mathbb{C}\{y^2, yz, z^2\}$
			1	$(*) x^2 + yzu + y^{2b} + z^{2c} + u^{d+1}$
			1	$(*) x^2 + y^2 u + \lambda \cdot yz^{2b-1} + f(z^2, u)$ $f \in (z^4, z^2 u^2, u^3) \mathbb{C}\{z^2, u\}, \lambda \in \mathbb{C}^*$
			1	$(*) x^2 + u^3 + u \cdot f(y, z) + g(y, z)$ $f \in (y, z)^3 \mathbb{C}\{y^2, yz, z^2\}$ $g \in (y, z)^4 \mathbb{C}\{y^2, yz, z^2\}$ $g \notin (y, z)^6 \mathbb{C}\{y^2, yz, z^2\}$
			1	$x^2 + f(y, z) + g(y, z)u + h(y, z, u)u^2$ $f \in (y, z)^4, g \in (y, z)^2,$ $h \in (y^2, yz, z^2, u) \mathbb{C}\{y^2, yz, z^2, u\},$ 但し, $f \notin (y, z)^6$ かつ $g \notin (y, z)^4$

表 2

(1)	(3)					(4)	(5)
$2n$ $n \geq 2$	1	1	$n+1$	-1	2	3	$xy + z^2 + u^{2b-2}$
6	1	1	4	5	2	2	$xy + zu^2 + z^{3b-1}$
						2	$xy + u^4 + \lambda \cdot z^{3b-2}u^2 + z^{3b-1} \cdot \alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}\{z^3\} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}$
						1	$x^2 + zu^2 + y^3u + z^{3b+2} + \dots$
						1	$x^2 + zu^2 + y^4z + z^{3b+2} + \dots$
						1	$x^2 + zu^2 + y^8 + z^{3b+2} + \dots$
						1	$x^2 + u^4 + y^3u + z^{3b+2} + \dots$
						1	$x^2 + u^4 + y^4z + z^{3b+2} + \dots$
						1	$x^2 + u^4 + y^8 + z^{3b+2} + \dots$
$4n$ $n \geq 1$	1	$2n-1$	$2n+1$	-1	$2n$	4	$xy + zu$
8	1	3	5	7	4	2	$xy + z^4 + u^4 + z^3u^3 \cdot \alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}\{z^8, z^5u, z^2u^2, zu^5, u^8\}$
$2n$ $n \geq 2$	1	$n+1$	a	$-a$	2	≥ 2	$x^2 + y^2 + f(z, u)$ $f: \mathbb{Z}_{2n}$ -semi-invariant, weight 2 $f \in (z, u)^2 \mathbb{C}\{z, u\}$
			$(a, 2n) = 1$				

表 3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
10	2	1 7 6 9 8	3	$xy + z^{5\theta-2} + u^2$
			1	$u^2 + x^2z + y^4 + z^{5\theta-2} + \dots$
			1	$u^2 + x^8 + y^4 + z^3 + \dots$
9	3	1 4 7 6 3	1	$u^2 + xyz \cdot \alpha + x^3 + y^3 + z^3$
				$\alpha \in \mathbb{C}\{x, y, z\}, \mathbb{Z}_9\text{-invariant}$
			0	$x^3 + y^3 + z^3 + u^{3\theta+2} + \dots$
9	3	1 4 7 3 3	0	$x^3 + y^3 + z^3 + u^{3\theta+1} + \dots$
9	3	1 4 7 0 0	1	$u^2 + xy^2 + yz^2 + zx^2$
			0	$xy^2 + yz^2 + zx^2 + u^{\theta+2} + \dots$
8	4	1 5 3 7 6	4	$xy + z^2 + u^2$

§.3. 証明の方針

この節では、仮定1.2の下で、更に $(X, P) = (\{ \varphi = 0 \}, (o))$ / $\mathbb{Z}_m$ は canonical singularity であると仮定する。以下で、 $\mathbb{Z}_m$ の作用と φ の形を決めていく方針を述べる。 φ の m 次斉次部分を φ_m と書く。

まず、Reid [5] の命題1.7を言いかえると次を得る：

補題 3.1. $(X, P) = (\{\varphi = 0\}, (0))/\mathbb{Z}_m$ を canonical singularity とする。 m の約数 n について、 cyclic group $\mathbb{Z}_n$ の $X' = \{\varphi = 0\}$ への作用を $\mathbb{Z}_m$ の X' への作用から導かれるもので定めれば、 quotient $(\{\varphi = 0\}, (0))/\mathbb{Z}_n$ もまた canonical singularity になる。

次の補題により、 Gorenstein canonical singularity を識別することができる：

補題 3.2. 次の (1), (2) の性質を満たす $\mathbb{Z}_m$ の生成元 σ が存在すれば、 (X, P) の index は 1 である：

$$(1) \quad \sigma\text{-wt } x, \sigma\text{-wt } y, \sigma\text{-wt } z, \sigma\text{-wt } u \not\equiv 0 \pmod{m},$$

$$(2) \quad \text{order } v = (\sigma\text{-wt})_m \text{ について } v(\varphi) \geq m.$$

但し、 $v = (\sigma\text{-wt})_m$ は order の定義 (記号 1.3) において、

i) の a, b, c, d は、 $0 < a, b, c, d \leq m$ を満たし、更に上の $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ について (ii) が満たされるものとする。

証明. 定理 1.4 により、 $v(x) + v(y) + v(z) + v(u) \geq m + v(\varphi)$ である。一方 order $v' = (-\sigma\text{-wt})_m$ (上の作り方で、 σ の代りに $-\sigma$ をとる) について、同様の不等式を得るが、 v と v' の関係 $v'(x) = m - v(x)$, $v'(y) = m - v(y)$, $v'(z) = m - v(z)$,

$v'(u) = m - v(u)$, $v'(\varphi) \geq 2m - v(\varphi)$ を考慮すれば、 $v(x) + v(y) + v(z) + v(u) \leq m + v(\varphi)$ を得る。従って、先の不等式と合わせれば等号になり、 v の定義により $\sigma^{-wt}x + \sigma^{-wt}y + \sigma^{-wt}z + \sigma^{-wt}u \equiv \sigma^{-wt}\varphi \pmod{m}$ を得る。故に注意 1.7 から (X, P) の index は 1 である。□

一方 φ の形については、次がわかる:

補題 3.3. $\varphi_2 \neq 0$ または $\varphi_3 \neq 0$ である。

証明. $\mathbb{Z}_m$ の単位元に対応して、order v を $v(x) = v(y) = v(z) = v(u) = m$ によって作れば、定理 1.4 から、 $v(\varphi) \leq 3m$ を得る。故に、 $\varphi_2 \neq 0$ または $\varphi_3 \neq 0$ である。□

さて、定理 2.1 を示す為には、まず、 φ_2 を 2 次形式と見做した時の階数で場合を分けて考察する:

- (1) $\text{rank } \varphi_2 \geq 2$ のとき。
- (2) $\text{rank } \varphi_2 = 1$ のとき。
- (3) $\text{rank } \varphi_2 = 0$, 即ち $\varphi_2 = 0$ のとき。

次に、(1) については $\varphi = xy + \dots$ と $\varphi = x^2 + y^2 + \dots$ の場合について考え、(2) では $\varphi = u^2 + f(x, y, z)$, $f \in (x, y, z)^3$

と標準的な形にして考える。また (3) については、補題 3.3 により $\varphi_3 \neq 0$ だから、 φ_3 に現れる項によってそれぞれ考察する。

補題 3.1 により、cyclic group $\mathbb{Z}_m$ の位数 m が素数ベキ (あるいは素数) の場合を調べるのが本質的になる。ところが、 m が素数ベキ p^n の時、“多くの場合”について、 (X, P) の index が 1 になる。実際、 $p^e = (\text{wt } \varphi, m)$ (最大公約数), $(0 \leq e \leq n)$ とおくと、次の場合を除けば、補題 3.2 の仮定を満たす $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ が存在する: (i) $p^e = 3$, (ii) $p^e = 2, 4$, または 2^{n-1} , (iii) $p^e = m$, 即ち $\text{wt } \varphi \equiv 0 \pmod{m}$ 。従って、 m が素数ベキの時、 $\text{index} \geq 2$ となるものは上の (i)–(iii) から導かれるもののみである。先の (1)–(3) の場合について、(i)–(iii) をそれぞれ個別に考えていく。(1) については、(i) から導かれるものはなく、(ii) からは index が 2 及び 4 のもの、(iii) からは index が m で weight の形が terminal singularity と同じものがそれぞれ従う。他方 (2), (3) については、(i), (iii) から、index が 3 のものと 2 のものが出る。

ここでは、例として (1) の (i) 及び (iii) を述べる。但し、 φ の形は $\varphi = xy + f(x, u)$ ($f \in (x, u)^2 \mathbb{C}\{x, u\}$) としておく。

(1)-(i): 仮定は $m = 3^n$ ($n > 1$), $(\text{wt } \varphi, m) = 3$ かつ $\text{index} \geq 2$ である。このとき矛盾を導けばよい。まず、生成元 $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ をうまくとれば、 $\text{wt } \varphi \equiv 3 \pmod{m}$ とできる。 $\text{index} \geq 2$ であるから、補題 3.2 の仮定を満たすような $\mathbb{Z}_m$ の生成元はない。特に、 $\sigma_k = (1 + k \cdot 3^{n-1}) \cdot \sigma \in \mathbb{Z}_m$ ($k \in I = \{0, 1, 2\}$) は生成元だから、 $v_k = (\sigma_k - \text{wt})_m$ について $v_k(\varphi) < m$ である。故に $v_k(\varphi) = 3$ である。 $f \in (z, u)^2$ だから、各々の v_k ($k \in I$) は次の条件の何れかを満たす:

$$v_k(x) + v_k(y) = 3, \quad v_k(z) = 1, \quad v_k(u) = 1.$$

すると、もし必要があれば、 x と y 及び z と u を書き換えることにより

$$(v_0(x), v_0(y), v_0(z), v_0(u)) = (1, 2, 1 + 3^{n-1}, 1 + 2 \cdot 3^{n-1})$$

と仮定してよい。ところが $n > 1$ だから、 $\text{order } v = (3 \cdot \sigma - \text{wt})_m$ について

$$(v(x), v(y), v(z), v(u)) = (3, 6, 3, 3)$$

であり、これは定理 1.4 に反する。

(1)-(iii): 仮定は $m = p^n$ (実は一般の $m \geq 2$ でもよい), $\text{wt } \varphi \equiv 0 \pmod{m}$ かつ $\text{index} \geq 2$ である。 φ は semi-invariant だから $\text{wt } x + \text{wt } y \equiv \text{wt } \varphi \equiv 0 \pmod{m}$ であり、注意 1.6 より $(\text{wt } x, m) = (\text{wt } y, m) = 1$ を得る。また $\text{index} \geq 2$ だから注意 1.7 より $\text{wt } z + \text{wt } u \not\equiv 0 \pmod{m}$ であ

ある。すると $wt z \equiv 0 \pmod{m}$ あるいは $wt u \equiv 0 \pmod{m}$ である。実際、もしそうでないとする、order v として、 $(wt)_m$ または $(-wt)_m$ のどちらかをとれば、 $v(z)+v(u) < m$, $v(x)+v(y)=v(\varphi)=m$ とすることが出来る。ところが、これは定理 1.4 に反する。従って $wt z \equiv 0 \pmod{m}$ または $wt u \equiv 0 \pmod{m}$ でなければならぬ。故に必要があれば z と u を入れ換えて $wt x + wt y \equiv wt z \equiv wt \varphi \equiv 0 \pmod{m}$ を得る。また、このとき、注意 1.6 より $(wt u, m) = 1$ である。こうして、定理 2.1 の表 1 の最上段のものを得る。

次に、一般の m については、 $m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ と素因数分解したとき、各 $p_i^{e_i}$ での状況が上のようにしてわかるから、それらを組み合わせて、再び定理 1.4 の必要条件を検証すればよい。

注意 3.4. 定理 2.1 の各表で与えた φ の形について、“+...” のないものは、定理 1.8 により、一般的な係数をつければ、canonical singularity $(X, P) = (\{\varphi=0\}, (0))/\mathbb{Z}_m$ を定めることがわかる。

参考文献

- [1] N. Iwashita and M.-N. Ishida, *Canonical cyclic quotient singularities of dimension three*, preprint.
- [2] S. Mori, *On 3-dimensional terminal singularities*, preprint.
- [3] D. R. Morrison, *Canonical quotient singularities in dimension three*, preprint.
- [4] D. R. Morrison and G. Stevens, *Terminal quotient singularities in dimensions three and four*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 90 (1984), 15-20.
- [5] M. Reid, *Canonical 3-folds*, Géométrie algébrique d'Angers, ed. by A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, Alphen ann. Rijn. (1980), 273-310.
- [6] M. Reid, *Minimal models of canonical 3-folds*, Advanced studies in Pure Math. 1 (1983), Algebraic Varieties and Analytic Varieties, 131-180.