

海氷下を伝播する波列のスペクトルダウンシフト現象と NLS による数値計算

東京大学新領域創成科学研究科 佐藤 公哉, 早稲田 卓爾

Koya Sato, Takuji Waseda

The University of Tokyo, Department of Ocean Technology, Policy, and Environment

1. 背景

北極海の環境変動とそれに伴う海氷面積の減少によって、北極海航路利用への期待が高まっている。北極海航路における船舶の安全な航海には、正確な海水や波浪予測の提供が重要である。これを達成するため、海氷存在下における波浪伝播のメカニズム、特に力学的過程を明らかにする必要がある。海氷面積が減少し、北極域における波浪が激しくなっていくなかで、波高が増していく波浪の非線形的効果は波浪伝達のメカニズムを考える上で無視することはできない。その一例として、波浪スペクトルの低周波数側へのエネルギー遷移をスペクトルダウンシフトと呼ぶが、Waseda et al. (2022) [1] によるオホーツク海において海氷下を伝播する波浪の観測結果は、波浪による減衰のみでは説明できないスペクトルダウンシフトを起こしており、今のところこの現象を説明できる理論は存在しない。

波浪と海水が相互に作用を及ぼしあうことを波浪・海氷相互作用 (Wave-Ice interaction) と呼ぶが、海氷下を波浪が伝播する際には、海水が波浪に力学的な影響を及ぼす。その影響のうち最も顕著なものが、海氷の存在による波浪の減衰である。一般に入射波の波高 a_0 に対して $x[\text{m}]$ 進んだ波高 a が次のように指数関数的に減衰することが知られている。

$$\frac{a}{a_0} = \exp(-\alpha x)$$

ここで α は減衰係数であり、 α について Wadhams [2] は以下のような経験式を提案した。

$$\alpha = K \cdot f^n$$

ただし、 K, n は定数、 f は波の周波数であり、氷況にもよるが n はおよそ 3.5 である [3][5]。

2. 変調不安定と数値計算

Benjamin & Feir (1967) [5] は Stokes 波がサイドバンド (側帯波; キャリアー波 (搬送波) の周波数よりもわずかに高い/低い周波数を持つ 2 つの成分) の成長に対して不安定であることを発見した。Tulin & Waseda (1999) [7] は以下の条件を満たす時サイドバンドが指数関数的に初期発達することを実験的に示した。

ただし、 k は波数、 ω は角振動数を表し、下付き文字 $\pm, 0$ はそれぞれ上側と下側のサイドバンド、キャリアー波の成分であることを示している。また、 Δk はキャリアー波とサイドバンドの波数のずれである。変調波列の初期成長率 β は $\beta = \delta / ak$ とすると

$$\beta = \frac{d(\ln(a))}{kdx} = (ak)^2 \hat{\delta} \sqrt{2 - \hat{\delta}^2}$$

となる。(Benjamin & Feir, 1967[5])

周波数帯域幅が狭いことを仮定すれば、長期発達を含めてその発達を記述することが可能である。水位を $\text{Re}[A(x, y, t) \exp(i(kx - \omega t))]$ のように時間変化する包絡線 (Envelope) の

複素振幅 $A(x, y, t)$ を用いて表現すると、 A の時間発達は周波数帯域幅が $O\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) = O(ak)$

程度に狭いという仮定の下で、以下の非線形シュレディンガー方程式 (NLS) で与えられる。(Chabchoub & Grimshaw, [7])

$$i \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\omega_0^2 k_0^2}{2} |A|^2 = 0$$

以下の手法は Lo&Mei(1985)[8]に基づく。この式に対して座標変換を施す。

$$\begin{cases} A = a_0 A' \\ \epsilon \omega \gamma \left(\frac{2k}{\omega} x - t \right) = \xi \\ \epsilon^2 k x = \eta \end{cases}$$

これにより、NLS は次のような形になる。

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} + i \gamma^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i |A|^2 A = 0$$

これを擬似スペクトル法 (Pseudo spectral method) によって数値的に解いた結果が Fig.1 のようになる。

計算の結果は 24m 地点の周辺で上側・下側サイドバンドが最大成長を迎えていることを示している。NLS はサイドバンドの成長に対して対称性のある微分方程式のため、上下側サイドバンド $f_0 \pm \Delta f$ (と $f \pm 2\Delta f$) については対称な成長を示している。また、一度スペクトルダウンシフトを経た波のスペクトルが recurrence (サイドバンドが発達した波が更に伝播した際に元のスペクトル形状に戻ることに) によってもとに戻っている様子がわかる。

また、Tulin&Waseda (1999) [6]は砕波によって recurrence が妨げられるだけでなく、下側サイドバンドの卓越が促進されることを明らかにした。この結果は変調不安定を起こす波列が recurrence による一時的なスペクトルダウンシフトだけでなく、砕波による恒常的

なスペクトルダウンシフトを経験する可能性があることを示している。

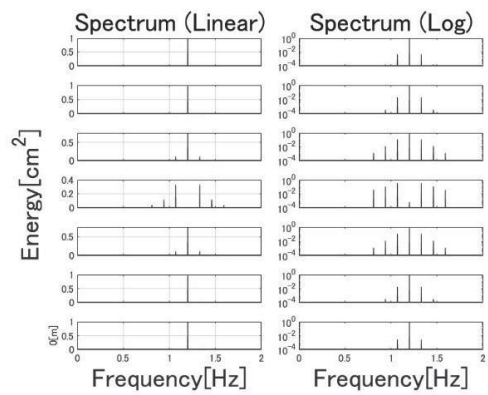


Fig. 1 NLS に基づいて計算された変調波列のスペクトル変化。ただし下から上が波が伝播する方向で、0m 地点から 8m おきにプロット。

3. 実験設備と実験手法

実験設備については、東京大学柏キャンパス環境地下一階 004 号室において、海洋研究開発機構（JAMSTEC）によって建造された氷海造波水槽を使用した。造波した波を計測するため、波高計 4 台とその検知部を保護するアイスフェンスを使用した。

実験としては、水槽内に氷を作成し、変調不安定を起こすような 3 波から成る系（キャリアー波、上側/下側サイドバンドの 3 波、以下変調不安定波列と呼ぶ）を造波・計測することで実験を行う。まず水槽内に氷を作成する際は、水槽室内の温度を下げて冷凍すると同時に、造波を行う。水槽は真水で満たされているため、造波しない場合は固く透明な氷が表面で覆うが、造波を行うことで径が数 cm 程度の氷の結晶を水槽内に得ることが可能である。このプロセスを造波製氷と呼ぶ。造波製氷時の造波パラメタは藤原 et al.（2021）[9]や勝野（2021）[10]を参考にし Table 1 のように設定した。

周波数 $[Hz]$	波形勾配 ak	波高 $a[mm]$
0.8	0.05	1.80

Table 1 製氷時の造波パラメタ

3 波から成る波列は波形勾配 $ak = 0.15$ 、 $\delta\omega$ は変調不安定波列が最大成長を達成するよう Tulin&Waseda（1999）[7]の初期成長率 β と δ 、 ak の関係から選んだ。サイドバンドの振幅 $a_{\pm}$ はキャリアー波振幅 a_0 に対して、30% で、 $ak = 0.15$ の単色波と同じエネルギーを持つ、すなわち $a_0^2 = a_c^2 + a_{+}^2 + a_{-}^2$ となるように選ぶ。ただし a_0 は $ak = 0.15$ 、キャリアー波と同じ周波数を持つ単色波の振幅とする。

波高計の配置は、造波機から 2,3,4,5[m] とし、その後空間的な解像度を上げるため 4,4.25,4.5,4.75[m] 地点に波高計をずらして再度計測を行った。

4. 実験結果

代表としてキャリア波周波数 $f_0 = 1.2\text{Hz}$ の変調波列を伝播させた際のスペクトルと各ピークのエネルギーを示す。

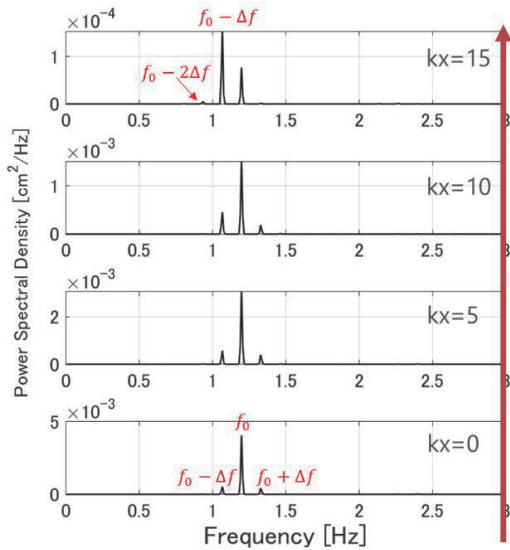


Fig. 3 キャリア波周波数 1.2Hz の変調波列のスペクトル変化 矢印は波列伝播方向

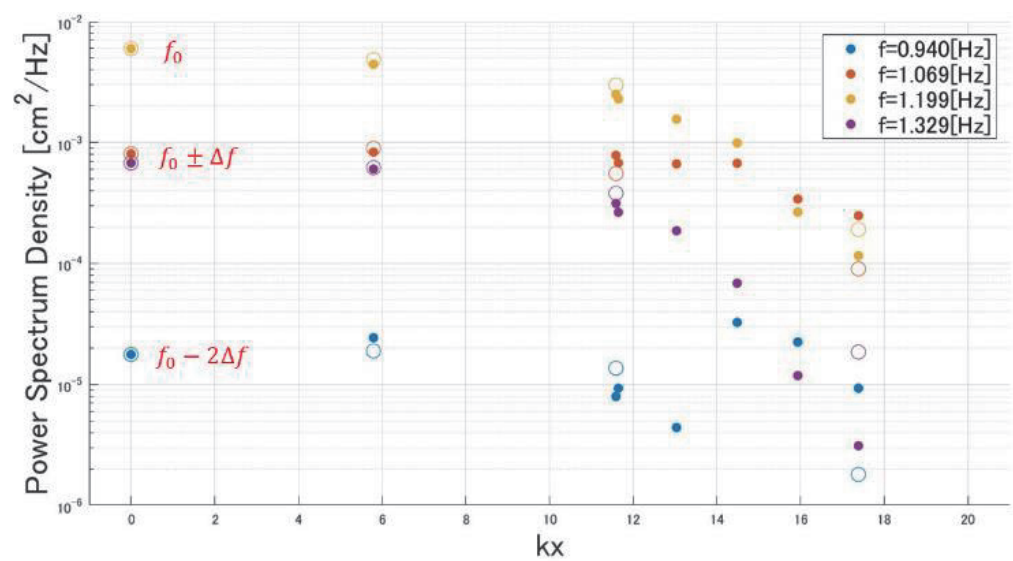


Fig. 4 Fig.3 の各ピークのエネルギー変化のプロット

各ピークのエネルギーの図において、青○で示された $f_0 - 2\Delta f$ の成分が成長していることがわかる。よって、非線形的なエネルギー輸送によってキャリアー波より低い周波数の波に、キャリアー波（や上側サイドバンド）のエネルギーが輸送されており、これは非線形的なエネルギー交換が起きている証拠である。

5. 数値計算

次に、NLS による計算に以下の周波数依存性を持つ減衰項を作用させることで、氷による減衰が働く下での変調不安定による波列の変化を計算する。

$$D(m) = \exp(-K(f_0 + m\Delta f)^n x)$$

ここで m はフーリエモード、 K と n は減衰係数 α 中の定数 ($\alpha = Kf^n$) である。以上の計算条件による結果が以下の Fig. 5 のようになる。

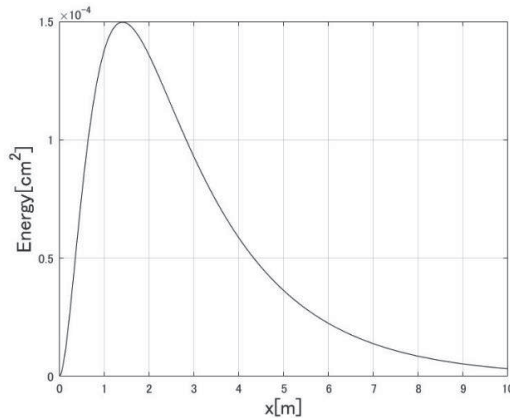


Fig. 6 NLS+減衰による数値計算の結果

NLS による計算結果は 1~2m 間でエネルギーの減衰を示しているため、水槽実験で見られたような $f_0 - 2\Delta f$ の水槽幅 (5~6m) に渡る成長は再現できなかった。よって、変調不安定と減衰によってのみでは水槽実験の結果は説明することができない。水槽実験の結果はスペクトルダウンシフトが 1~2 波長のスケールで起きていることを示唆している。ここから、砕波のようにエネルギーと運動量が数波程度で変化する強非線形現象との関連が考えられるため、エネルギーと運動量とスペクトルダウンシフトの関係を考察すべきと考えられる。

謝辞

京都大学数理解析研究所「非線形波動の数理と応用」にて発表する機会をいただきましたことに感謝を申し上げます。取りまとめいただいた柿沼太郎先生には、重ねてお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] T. Waseda, A. Alberello, T. Nose, T. Toyota, T. Kodaira, and Y. Fujiwara, Philos. Trans. Royal Soc. A, 380(2022)2235.
- [2] P. Wadhams, "Ice characteristics in the seasonal sea ice zone," Cold Regions Science and Technology, 2(1980)38–87.
- [3] T. Kodaira, T. Waseda, T. Nose, K. Sato, J. Inoue, J. Voermans and A. Babanin, Polar

Science, 27(2021)100567.

[4] J. E. Weber, Journal of physical oceanography, 17(1987)2351–2361.

[5] T. B. Benjamin and J. E. Feir, Journal of Fluid Mechanics, vol. 27(1967)417–430.

[6] M. P. Tulin and T. Waseda, Journal of Fluid Mechanics, 378(1999)197–232.

[7] A. Chabchoub and R. H. Grimshaw, Fluids, 1.3(2016)23.

[8] Lo, E., & Mei, C. C. (1985). A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation. Journal of Fluid Mechanics, 150, 395-416.

[9] 勝野智嵩, 卒業研究, (2021).

[10] F. Yasushi, K. Tomotaka, W. Takuji, N. Takehiko, and T. Kodaira, 日本地球惑星科学連合 2021 年大会, 2021.

Department of Ocean Technology, Policy, and Environment

The University of Tokyo

5-1-5, Kashiwano-ha, Kashiwa, Chiba

JAPAN

E-mail address: sato-koya874@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

以上