

## 待ち行列システムの最適制御

京大 工・数理 大野 勝久

### 1. 序論

待ち行列システムはケンドールの記号に示されるように、客の到着過程、サービス分布、サーバー数、サービス規律等を与えることで規定される。したがってその制御としては、

- (i) 到着過程の制御
- (ii) サービス率の制御
- (iii) サーバー数の制御
- (iv) 優先権等の制御

が考えられる。待ち行列システムの最適制御における中心的な課題は、これら制御方法が定められた時、システムの全利得を最大にする最適制御政策がどのような性質を持つかを示し、それを決定することである。

待ち行列システムの最適制御に関する Survey paper としてはすでに [8], [19], [25] があり、文献表としては [9]

が知られている。本報告では、上記 (i) ~ (iii) の制御手法について、その最適制御政策の単調性等の性質がどのような形で導かれるかに焦点を絞り、それぞれ統一的に紹介したい。したがって、(iv) の問題あるいは待ち行列システムの最適設計等に関しては [8], [9] を参考にしたい。

待ち行列システムの最適制御問題は、通常マルコフあるいはセミ・マルコフ決定過程として定式化される。次節では、まず準備としてセミ・マルコフ決定過程について Schäl [20] の結果を述べ、最適制御政策が状態に関して単調になる条件 [23] を紹介する。3, 4 節では 2 節の結果を用い、(i) 到着過程の制御、(ii) サービス率の制御、について最適制御政策の性質とその導出法を示す。5 節では、(iii) サーバー数への制御を扱ひ、Sohel [25] 等の結果を紹介する。最後に結論として残された問題について簡単にふれる。

## 2. セミ・マルコフ決定過程

セミ・マルコフ決定過程は以下に与えられる  $(S, \sigma(S)), (A, \sigma(A)), D, \gamma, \beta, r)$  によって定められる [12]。

(i)  $(S, \sigma(S))$  は状態空間であり、 $S$  は完備な可分距離空間のボレル部分集合、 $\sigma(S)$  は  $S$  の全てのボレル部分集合の集りである。

(ii)  $(A, \sigma(A))$  は決定制御空間であり、 $A$  は完備な可分距

離散空間のボレル部分集合,  $\mathcal{A}(A)$  は  $A$  の全てのボレル部分集合の集りである。

- (iii)  $D$  は  $S$  から  $A$  の全ての空でない部分集合への写像であり、 $D(s)$  は状態  $s$  にとりうる決定の集合を与える。ただし、

$$(2.1) \quad K = \{(s, a) \in S \times A; a \in D(s)\}$$

は  $\mathcal{A}(S) \times \mathcal{A}(A)$  可測であり、 $S$  から  $A$  への可測な写像のグラフを含むものも決定する。

- (iv)  $f$  は  $K$  から  $(S, \mathcal{A}(S))$  の全ての確率測度の集合 (以下  $P(S)$  で表わす) への写像であり、 $f(s, a; \cdot)$  は状態  $s$  で決定  $a$  をとった時遷移する次の状態の分布を与える。

- (v)  $\beta$  は  $K \times S$  上の非負値有界可測関数であり、割引率を与える。  $P(s, a, s'; \tau)$  が状態  $s$  で決定  $a$  をとり状態  $s'$  へ遷移した時の遷移時間  $\tau$  の分布を表わせば、 $\alpha \geq 0$  にたいして

$$(2.2) \quad \beta(s, a, s') = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} P(s, a, s'; d\tau)$$

である。

- (vi)  $r$  は  $K \times S$  上の上に有界な可測関数であり、利得を与える。  $R(s, a, s'; \tau)$  が状態  $s$  で決定  $a$  をとり状態  $s'$  へ遷移する時  $\tau$  でえられる利得を表わすことにすれば、

$$(2.3) \quad r(s, a, s'; z) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} R(s, a, s'; z) P(s, a, s'; dz)$$

である。

全ての確定的な政策の集合を

$$(2.4) \quad D^s = \{f; f: (S, \sigma(S)) \rightarrow (A, \sigma(A)), f(s) \in D(s)\}$$

で表わせば、マルコフ政策は  $n \in N = \{1, 2, \dots\}$  にたいして  $f_n \in D^s$  とする系列  $\{f_n\}$  であり、定常政策は  $f_n = f (n \in N)$  とするマルコフ政策  $f$  である。実際興味があるのは定常政策であるが、一般的な政策としては  $(s_1, a_1, \dots, s_n)$  に依存する確率的な政策も考えなければならない。すなわち、

$$(2.5) \quad H_1 = S, \quad H_{n+1} = H_n \times K \quad (n \in N)$$

で  $H_n$  を定義すれば、一般的な政策  $\pi = (\pi_n)$  は、任意の  $(s_1, a_1, \dots, s_n) \in H_n$  にたいして  $D(s_n)$  上で確率 1 をとる  $\pi_n: H_n \rightarrow P(A)$  の系列として与えられる。 $(s_1, a_1, \dots, s_{n+1}) \in H_{n+1}$  が与えられた時  $n$  期における利得  $r_n$  は

$$(2.6) \quad r_n(s_1, a_1, \dots, s_n) = \beta(s_1, a_1, s_2) \cdots \beta(s_{n-1}, a_{n-1}, s_n) r(s_n, a_n, s_{n+1})$$

で与えられる。したがって政策  $\pi$  のもとでの全期間にわたる総平均費用  $I(\pi)$  は

$$(2.7) \quad I(\pi) = E_\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r_n \right]$$

で表わされる。問題は一般的な政策の集合  $\Delta$  のなかで  $I(\pi)$  を最大にする政策を求めることである。すなわち最大利得は

$$(2.8) \quad u^* = \sup_{\pi \in \Delta} I(\pi)$$

と与える政策を定めることである。すなわち  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$(2.9) \quad I_n(\pi) = E_{\pi} \left[ \sum_{i=1}^n r_i \right]$$

$$u_n = \sup_{\pi \in \Delta} I_n(\pi), \quad u_0 = 0$$

とおけば、 $u_n$  は  $n$  期間における最大利得を与える。

$$(2.10) \quad u_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

とおき、さらに  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$I_{mn}(\pi) = E_{\pi} \left[ \sum_{i=m}^n r_i \right]$$

$$(2.11) \quad u_{mn}(\pi) = \sup_{\pi \in \Delta} I_{mn}(\pi)$$

$$z_m = \sup_n u_{m+1, n}$$

とおく。ただし、 $n < m$  に対しては  $I_{mn}(\pi) = 0$  である。以下次の条件

$$(C) \quad z_m(s) \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow \infty, \quad s \in S$$

を仮定する。この条件は

$$(N) \quad r \leq 0$$

あるいは

$$(D) \quad 0 \leq \beta < 1, \quad \|r\| \triangleq \sup_{x \in K \times S} |r(x)| < \infty$$

であれば、常に成立し、

$$(P) \quad r \geq 0$$

であれば、 $\sup_{\pi \in \Delta} E_{\pi} \left[ \sum_{i=n}^{\infty} r_i \right] \rightarrow 0$  (as  $n \rightarrow \infty$ ) が (C) の必要十分条件となる。

任意の関数  $u: S \rightarrow \mathbb{R} (-\infty$  を付加した実数の集合) について

$$(2.12) \quad Lu(s, a) = \int q(s, a; ds') [r(s, a, s') + \beta(s, a, s') u(s')], \quad a \in D(s)$$

$$L_f u(s) = Lu(s, f(s)), \quad f \in D^S$$

$$\forall u(s) = \sup_{a \in D(s)} Lu(s, a), \quad s \in S$$

を定義する。このとき次の定理が成立する。

(2.13) 定理 [20]

条件 (C) がなりたてば

(i)  $f^\infty$  が最適政策であり、 $u_\infty = u^*$  となるための必要十分条件は

$$L_f u_\infty = u_\infty$$

である。

(ii)  $f^\infty$  が最適政策となる必要十分条件は

$$L_f u^* = u^*$$

である。

そこで、最適決定の集合  $\Gamma^*(s)$ ,  $\Gamma_n(s)$  を  $s \in S$  について

$$(2.14) \quad \Gamma^*(s) = \{a \in D(s); Lu^*(s, a) = \sup_{a' \in D(s)} Lu^*(s, a')\}$$

$$\Gamma_n(s) = \{a \in D(s); Lu_{n-1}(s, a) = \sup_{a' \in D(s)} Lu_{n-1}(s, a')\}$$

を定義し、

(2.15)  $P_\infty(s) = \{a \in A; a \text{ は } a_n \in \Gamma_n(s) \text{ をみたす系列 } \{a_n\} \text{ の集積点である}\}$

とおく。  $C(A)$  が  $A$  の全ての空でないコンパクト部分集合の族を表わすことにし、次の条件 (W) も考える。

(W 1)  $D(S) \subset C(A)$  であり、  $D: S \rightarrow C(A)$  は上半連続である。

(W 2)  $g: K \rightarrow P(S)$  は  $w$ -連続である。すなわち、任意の有界連続関数  $v$  に対して  $\int v(s') g(s, a; ds')$  は  $(s, a)$  に関して連続である。

(W 3)  $r$  は  $K \times S$  上の有界な上半連続関数であり、  $\beta$  は  $K \times S$  上の有界連続関数である。

(W 4)  $A$  は局所コンパクトである。

(2.16) 定理 [20]

条件 (C) および (W) がなりたてば

(i)  $u_\infty(s) = u^*(s)$ ,  $s \in S$

(ii)  $P_\infty(s) \subset P^*(s)$ ,  $s \in S$

(iii) 最適定常政策  $f^\infty$  が存在し、  $f(s) \in P_\infty(s)$ ,  $s \in S$  である。

定理 (2.16) は (2.9) 式で与えられる  $u_n$  に対して

$$u_n(s) = L u_{n-1}(s, f_n(s)) = \sup_{a' \in D(s)} L u_{n-1}(s, a')$$

となる  $f_n$  の極限が最適定常政策となることを主張している。

したがって、ある  $N$  以上の全ての  $n$  で  $f_n$  がある性質をもてば、最適定常政策もその性質をもつことが示される。待ち行列システムの最適制御における最適定常政策が持つ最も一般的な

的な性質は状態にたいする単調性である。  $f_n$  のこの単調性を定義するために  $A = R$  に限定し、  $S$  に半順序  $\leq$  を導入する。さらに (2.14) 式で与えられる  $P_n$  を用いて、

$$(2.17) \quad f_n(s) = \sup \{a \in P_n(s)\} \quad s \in S$$

とおく。このとき、任意の  $s_1 \leq s_2$  にたいして  $f_n(s_1) \leq f_n(s_2)$  とすれば  $f_n$  は単調 (非減少) である。  $f_n$  が単調となる条件が次の定理に示される。

(2.18) 定理 [23]

$s_1 \leq s_2$  にたいして

$$(i) \quad D(s_1) \subset D(s_2)$$

$$(ii) \quad L U_{n-1}(s_2, \cdot) - L U_{n-1}(s_1, \cdot) \text{ は } D(s_2) \text{ 上で単調非減少である。}$$

とすれば  $f_n$  は単調である。

この定理から (ii) が  $n \geq 1$  で成立すれば最適定常政策  $f$  は単調である。また (ii) において、  $U_{n-1}$  を  $U^*$  でおきかえた条件がなりたつことが直接示されれば  $f$  が単調となることも明らかである。(ii) と同様の条件が補題 (3.7), (4.6) に現われるであろう。この定理の証明は非常に簡単である。

すなわち、  $f_n$  の定義より

$$U_n(s_2) = L U_{n-1}(s_2, f_n(s_2)) \geq L U_{n-1}(s_2, f_n(s_1))$$

$$U_n(s_1) = L U_{n-1}(s_1, f_n(s_1)) \geq L U_{n-1}(s_1, f_n(s_2))$$

がなりたつ。



$$Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_2)) - Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_2)) \geq Lu_{n-1}(s_2, f_n(s_1)) - Lu_{n-1}(s_1, f_n(s_1))$$

となることに注意すれば、(ii) と (2.17) 式より  $f_n$  の単調性が示される。

### 3. 到着過程の制御

種々のタイプの客を処理する GI/G/1 即時系を考える。客の到着時間間隔は分布  $F$  に従い、そのタイプ  $s$  ( $-\infty < s < \infty$ ) は分布  $H$  に従うものとする。サーバーが稼働している時タイプの客が到着すれば、サーバーはその客をサービスするか (accept) あるいはサービスをしないか (reject) を決定する。タイプ  $s$  の客を accept した時その客からえられる利得が  $a$  以下であり、サービス時間が  $a$  以下である結合確率が  $G_s(a, b)$  で与えられているものとする。reject による損失は考えないものとし、サーバーが稼働中に到着した客は待たずに系を立ち去るものとする。無限期間にわたる期待利得を最大にするにはどのようなタイプの客を accept すればよいであろうか？

時点列としてサーバーが稼働している時の客の到着時点をとって、状態としてその時刻着した客のタイプをとる。したがって状態空間は  $S = (-\infty, \infty)$  であり、 $a=0$  で reject を  $a=1$  で accept を表わせば  $A = \{0, 1\}$  である。さらに任意の  $s \in S$  に対して  $D(s) = A$  である。次の客のタイプはその以前の決定等とは独立に分布  $H$  に従うから、 $q(s, a) = H(s \in S, a \in A)$

である。(2.2)式より

$$(3.1) \quad \beta(s, 0, s') = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} dF(\tau) \triangleq \beta(0)$$

であり、客のサービスに $t$ 時間要した時次の客が到着するまでの時間 $\tau$ が分布 $B(\tau|t)$ に従うものとすれば

$$(3.2) \quad \beta(s, 1, s') = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} dB(\tau|t) dG_s(\infty, t) \triangleq \beta(s, 1)$$

である。最後に利得が accept と同時にえられるものとすれば

$$(3.3) \quad r(s, 0, s') = 0, \quad r(s, 1, s') = \int_{-\infty}^\infty x dG_s(x, \infty) \triangleq \bar{r}(s, 1)$$

と与えられる。

$\alpha > 0$ ,  $F(0) < 1$  を仮定すれば  $\beta(0) < 1$  がなりたち、 $B(\tau|t)$  が  $t$  における excess life の分布を表わすことから  $\beta(s, 1, s') \leq \beta(0)$  である。さらに  $|r(s, 1, s')| < \infty$  ( $\forall s \in S$ ) を仮定すれば (D) が成立し、(c) がなりたち。また条件 (iv) がなりたちとは明らかであり、

$$(3.4) \quad u_n(s) = \max \left\{ \beta(0) \int_{-\infty}^\infty u_{n-1}(s') dH(s'), \right. \\ \left. \bar{r}(s, 1) + \beta(s, 1) \int_{-\infty}^\infty u_{n-1}(s') dH(s') \right\}$$

とおけば、定理 (2.16) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) = u^*(s)$$

がなりたち、最適定常政策が存在する。(3.4)式より  $n \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  とし平均期待利得  $v$  に関する関数方程式

$$(3.5) \quad v(s) = \max \left\{ \int_{-\infty}^\infty v(s') dH(s') - g\bar{\mu}, \bar{r}(s, 1) + \int_{-\infty}^\infty v(s') dH(s') - g\bar{\mu}(s, 1) \right\}$$

がえられる。ここで  $g$  は単位時間当りの最大利得であり、

$\mu, \bar{\mu}(s, 1)$  は各々  $(s, 0), (s, 1)$  からの平均遷移時間を表す。したがって (3.5) 式より最適定常政策はタイプ  $s$  の客を

$$(3.6) \quad \bar{r}(s, 1) / \{\bar{\mu}(s, 1) - \mu\} \geq g$$

の時 accept する政策である。[15]。さらに、 $\bar{r}(s, 1) - g\bar{\mu}(s, 1)$  が単調非減少であれば、この政策は  $s$  に関して単調である。

類似の問題は [1], [14], [17] [22] [24] でも論じられているが、簡単に [1] を紹介しよう。タイプ  $s$  ( $-\infty < s < \infty$ ) の客を扱おう  $G/M/c$  待ち行列システムを考える。  $c$  人のサーバーのサービス分布は各々  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_c$  の指数分布であり、サービス時間は客のタイプによらないとする。タイプ  $s$  の客が到着した時、全てのサーバーが稼働中であれば客は待ち行列に並び処理されるが、複数人のサーバーが稼働中でなければどのサーバーにその客を割りあてるかを決定しなければならない。タイプ  $s$  の客を  $\mu$  のサーバーが処理した時えらる平均利得を  $\bar{r}(s, \mu)$  で表すことにすれば、定理 (2.18) と同様にして次の補題が成立する。

### (3.7) 補題

$\bar{r}(s, \mu)$  が任意の  $s_1 \leq s_2, \mu_1 \leq \mu_2$  について

$$(3.8) \quad \bar{r}(s_2, \mu_2) - \bar{r}(s_1, \mu_2) \geq \bar{r}(s_2, \mu_1) - \bar{r}(s_1, \mu_1)$$

であれば、

$$(3.9) \quad \max_{1 \leq i \leq c} \{r(s, \mu_i) + d_i\} = r(s, \mu_k) + d_k$$

となる  $k$  にたいして,  $\mu, d$  に依存する  $-\infty \equiv b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_c \equiv +\infty$  が存在し,  $b_{k-1} \leq s \leq b_k$  がなりたつ。すなわち (3.9) をみたす  $k$  の最大値は  $s$  の非減少関数である。

客  $s$  が到着し,  $k$  人のサーバーが遊休中であり, それらのサーバーの構成等の状態を  $\bar{s}$  で表わせば, 補題 (3.7) より,  $-\infty \equiv b_0(\bar{s}) \leq b_1(\bar{s}) \leq \dots \leq b_k(\bar{s}) \equiv +\infty$  が存在する。したがって,  $b_{j-1}(\bar{s}) \leq s \leq b_j(\bar{s})$  であればタイプ  $s$  の客を  $\mu_{ij} (i, 1 \leq i \leq k)$  のサーバーに割りあてるのが最適定常政策になる。

このように客をサーバーに割りあてる問題 (客の *reject*, *accept* は仮空のサーバーに客を割りあてることに相当する) は単調な最適定常政策をもつている。しかし, [24] では, 待ち時間が  $T$  を越えれば待つている客が系を立ち去る  $M/M/2$  待ち行列システムにたいして, サービス率の大きいサーバーへ客を割りあてる通常の政策が処理客数も最大にする意味での最適政策にならないことが示されている。

#### 4. サービス率の制御

$M/M/1$  待ち行列システムにおいて客の到着、退去時点でサービス率を制御する問題も考える。状態  $s$  として系内人数をとり,  $s$  におけるとらうるサービス率として  $D(s) = A = [\mu, \bar{\mu}]$

を考える。  $\delta(s) = 0$  ( $s=0$ ),  $= 1$  ( $s \neq 0$ ) とすれば、

$$(4.1) \quad q(s, a, s+1) = \lambda / (\lambda + a\delta(s)), \quad q(s, a, s-1) = a\delta(s) / (\lambda + a\delta(s))$$

であり、

$$(4.2) \quad \beta(s, a, s') = (\lambda + a\delta(s) + \alpha)^{-1}$$

である。費用構造として  $s$  人の客の単位時間当り待ち費用を  $w(s)$ , サービス率  $a$  の稼働費用を  $c(a)$  とすれば、

$$(4.3) \quad r(s, a, s') = -\{w(s) + c(a)\} / \{\lambda + a\delta(s) + \alpha\}$$

である。以下

(i)  $w(s)$  は非負値, 非減少凸関数である。

(ii)  $c(a)$  は非負値, 非減少関数である。

と仮定すれば、(N) が成立し、(C) がなりたつ。  $u_0 = 0$  とおき、  $n = 1, 2, \dots$  で

$$(4.4) \quad u_n(s) = \sup_{a \in A} \{L u_{n-1}(s, a)\} = L u_{n-1}(s, f_n(s))$$

とおく。  $n = 1, 2, \dots$  で

$$(4.5) \quad L u(s, a) = \{-\{w(s) + c(a)\} + \lambda u(s+1) + a\delta(s)u(s-1)\} / \{\lambda + a\delta(s) + \alpha\}$$

である。

$$L u_{n-1}(0, a) = \{-\{w(0) + c(a)\} + \lambda u_{n-1}(1)\} / (\lambda + \alpha)$$

であるから (ii) より  $\Gamma_n(0) \ni \{\mu\}$  がなりたつ。定理 (2.18) から次の補題がえられる。

(4.6) 補題 [19, 26]

$$L u_{n-1}(s+1, a_2) - L u_{n-1}(s, a_2) \geq L u_{n-1}(s+1, a_1) - L u_{n-1}(s, a_1)$$

が  $\forall s \in S, a_1 \leq a_2 \in A$  で成り立つならば  $f_n(s)$  は  $s$  に関する単調である。

$s > 0, a_1 < a_2$  について

$$D(s, a_1, a_2) = Lu_{n-1}(s+1, a_2) - Lu_{n-1}(s, a_2) - Lu_{n-1}(s+1, a_1) + Lu_{n-1}(s, a_1)$$

とおけば (4.5) 式より

$$(4.7) \quad (\lambda + a_1 + d)(\lambda + a_2 + d)D(s, a_1, a_2) = (a_2 - a_1)(w(s+1) - w(s)) \\ + \lambda(a_2 - a_1)(u_{n-1}(s+1) - u_{n-1}(s+2)) - (\lambda + d)(a_2 - a_1)(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$$

がえられる。したがって、 $D(s, a_1, a_2) \geq 0$  を示すには (4.7)

式右辺  $\geq 0$  を示せばよい。(4.7) 式右辺を  $\Delta_{n-1}$  とおけば

$\Delta_0 = (a_2 - a_1)(w(s+1) - w(s)) \geq 0$  である。今、 $\Delta_{n-1} \geq 0$  を仮定し、

$\Delta_n \geq 0$  を導こう。まず、

$$(4.8) \quad \sup_{a \in A} \{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\} \geq u_n(s) - u_n(s+1) \\ \geq \inf_{a \in A} \{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}$$

であり、

$$(4.9) \quad \{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}(\lambda + a + d) \\ = w(s+1) - w(s) + \lambda(u_{n-1}(s+1) - u_{n-1}(s+2)) + a(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$$

がなりたつ。ゆえに  $\Delta_{n-1} \geq 0$  より

$$\{Lu_{n-1}(s, a) - Lu_{n-1}(s+1, a)\}(\lambda + a + d) \\ \geq (\lambda + d + a)(u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s))$$

となり、(4.8) 式より

$$(4.10) \quad u_n(s) - u_n(s+1) \geq u_{n-1}(s-1) - u_{n-1}(s)$$

がえられる。同様に

$$(4.11) \quad u_n(s) - u_n(s+1) \leq \{w(s+1) - w(s) + \lambda(u_{n-1}(s+1) - u_{n-1}(s+2))\} / (\lambda + d)$$

である。(4.10), (4.11) 式より、

$$\Delta_n / (a_2 - a_1) = w(s+1) - w(s) + \lambda(u_n(s+1) - u_n(s+2)) - (\lambda + d)(u_n(s-1) - u_n(s))$$

$$\geq w(s+1) - w(s) + \lambda(u_{n+1}(s) - u_n(s+1)) - \{w(s) - w(s-1) + \lambda(u_{n-1}(s)$$

$$- u_{n-1}(s+1))\} = \{w(s+1) - w(s)\} - \{w(s) - w(s-1)\}$$

であり、 $w$  は凸関数であるから  $\Delta_n \geq 0$  が示される。したがって補題(4.6)より、任意の  $n, s$  について

$$(4.12) \quad f_n(s) \leq f_n(s+1)$$

がなりたつ。明らかに定理(2.16)が成立し、 $f_n(s) \in P^+(s)$  であるから最適定常政策  $f$  も(4.12)式を満たす[26]。

同様な問題が[7], [10], [18], [21], [28]等で論じられている。[28]はサービス率の切り換えに要する費用を考慮しており、[10], [18], [21]はM/G/1待ち行列システムを扱っている。

## 5. サーバー数の制御

単一窓口をもつ待ち行列システムにおいて、とりうる決定がサーバーを on あるいは off するものであるとき、系内人数とサーバーの状態を知って、稼働費用、遊休費用、サーバーの on, off の切換費用、客の待ち費用からなる費用関数を最

小にするにはどのような政策をとればよいかを考える。

Heymen [11] は  $M/G/1$  待ち行列系にたいしてこの問題を考察し、セミ・マルコフ決定過程を用いて最適定常政策が存在し、 $(M, m)$  政策、常に  $on$ 、常に  $off$  のいずれかになることを示した。しかし、その証明は不完全であり、Solov [25] は  $GI/G/1$  系にたいしてランダム・ウォーク的な接近を用い  $(M, m)$  政策が最適であることを示している。今この系内人数を表わし、 $s, \bar{s}$  で  $s$  台サーバーが  $off$ ,  $on$  状態にあることを表わす。  $A = \{0, 1\}$  とし、 $0$  で  $off$ ,  $1$  で  $on$  を表わすことにする。 $(M, m)$  政策は  $s \leq m$  とすれば  $off$ ,  $s \geq M$  とすれば  $on$  する政策であり、

$$(5.1) \quad f(s, a) = 0 \quad (s \leq m), = a \quad (m < s < M), = 1 \quad (s \geq M)$$

である。任意の定常政策  $f$  にたいしてこの開始集合  $B_f$ , 停止集合  $H_f$  と

$$(5.2) \quad B_f = \{s \in S \mid f(s) = 1\}, \quad H_f = \{s \in S \mid f(s) = 0\}$$

を定義し、

$$(5.3) \quad m_f = \max\{s \in H_f\}, \quad M_f = \min\{s \in B_f \mid s > m_f\}$$

とおく。このようにして任意の定常政策  $f$  に対して定まる  $(M_f, m_f)$  政策を  $\bar{f}$  で表わせば政策  $f$  を用いて状態  $m_f$  に到達した後、状態遷移は政策  $\bar{f}$  と完全に一致する。したがって  $f$  と  $\bar{f}$  にたいする単位時間当りの平均費用が等しくなる条件を仮



定すれば(M, m)政策が最適であることが示される。Bell [4] はこの結果を用い、平均割引費用を最小にする問題を扱ひ、[4] を精密化し最適定常政策を与えるアルゴリズムを示した。

サーバー数の制御問題においてはon, offの切換費用も考慮しなければならず、状態に現在実行中の決定をも組みこまなければならぬ。この点で切換費用も考慮しない、4節の問題に比べて解析が困難になってくる。しかしM/G/1あるいはM/M/C待ち行列システムのサーバー数の制御問題にたいして定理(2.18)を適用することは可能であり、実際[13], [16]ではM/M/C待ち行列システムにおける最適定常政策の単調性を示すために利用されている。一方、[5]では(3.5)式と同様の関数方程式から直接単調性が示されている。ただし[5]ではサーバーのon, offが客の到着あるいはサービス終了直後にのみ行なわれているのに対して、[13], [16]では一定時間間隔で可能と仮定されている。

以上の結果は全て系の状態として系内人数を考えたのだが[2]では使待ち時間を状態にとり、これをD-政策と名づけている。このD-政策はサービス開始費用と待ち費用を考えた場合常に(M, 0)政策よりすぐれていることが示されている[3, 6].

## 6. 結論

待ち行列システムの最適制御は比較的新らしい分野ではあ

るが、[9]にみられるように、待ち行列理論とセミ・マルコフ決定過程とも単純に結びつけて単調性等が示される問題は基本的なものに関する限り出つくしたように思われる。しかし、と多くは単調性を示すにとどまり、示された性質を有効に利用して最適定常政策の決定アルゴリズムは[27]等に論じられているにすぎない。また単調性等が示された問題も現実の待ち行列システムへ適用するには不十分な点が多く残されており、利用可能な情報、費用構造を検討し直すとともにネットワーク等により現実的な問題への拡張、有効なアルゴリズムの開発が今後の課題であろう。

すでに再述べたように待ち行列システムの最適制御問題はセミ・マルコフ決定過程として定式化される。有限状態、有限決定のセミ・マルコフ決定過程に対しては最適定常政策を求めるアルゴリズムとして、逐次近似法、政策反復法、修正政策反復法、線形計画法が知られている。したがって、最適政策の性質を何んぞ知らなくても、これらのアルゴリズムを直接適用することによって最適定常政策を数値的に決定することが可能なように思われる。たとえば、 $M/M/C$  待ち行列システムにおいて各サーバーのとりうるサービス率が  $K$  レベル与えられ、その切替費用を考慮する問題を考える。系内人数を  $N$  に制限すれば、とりうる状態の個数は  $N \cdot C^K$  あるいは  $N \cdot K^C$

と存するから、 $N=50$ ,  $K=5$ ,  $C=5$  の時 15.6 万になる。こ  
 のような多状態に適用可能なアルゴリズムは可能とすれば、  
 修正政策反復法に限定され、多状態問題に適用できるより有  
 効なアルゴリズムの開発がなされる現状である。

### 参考文献

- [1] S.C.Albright, "Structure of Optimal Policies in Complex Queuing Systems,"  
Operations Res. 25, 1020-1027 (1977).
- [2] K.R.Balachandran, "Control Policies for a Single Server System,"  
Management Sci. 19, 1013-1018 (1973).
- [3] K.R.Balachandran and H.Tijms, "On the D-Policy for the M/G/1 Queue,"  
ibid. 21, 1073-1076 (1975).
- [4] C.E.Bell, "Characterization and Computation of Optimal Policies for  
Operating an M/G/1 Queueing System with Removable Servers," Operations  
Res. 19, 208-218 (1971).
- [5] C.E.Bell, "Optimal Operation of an M/M/2 Queue with Removable Servers,"  
Operations Res. 28, 1189-1204 (1980).
- [6] O.J.Boxma, "Note on a Control Problem of Barachandran and Tijms,"  
Management Sci. 22, 916-920 (1976).
- [7] T.B.Crabill, "Optimal Control of a Service Facility with Variable  
Exponential Service Time and Constant Arrival Rate," Management Sci.

- 18, 560-566 (1972).
- [8] T.B.Crabill, D.Gross and M.J.Magazine, "A Survey of Research on Optimal Design and Control of Queues," Tech. Paper T-280, The George Washington Univ. 1973.
  - [9] T.B.Crabill, D.Gross and M.J.Magazine, "A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues," Operations Res. 25, 219-232 (1977).
  - [10] B.T.Doshi, "Optimal Control of the Service Rate in an M/G/1 Queueing System," Adv. Appl. Prob. 10, 682-701 (1978).
  - [11] D.P.Heyman, "Optimal Operating Policies for M/G/1 Queueing Systems," Operations Res. 16, 362-382 (1968).
  - [12] K.Hinderer, "Foundations of Non-stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter," Springer, Berlin, 1970.
  - [13] C.C.Huang, S.L.Brumelle, K.Sawaki and I.Vertinsky, "Optimal Control for Multi-Servers Queueing Systems under Periodic Review," Naval Res. Log. Quart. 24, 127-135 (1977).
  - [14] J.Keilson, "A Simple Algorithm for Contract Acceptance," Opsearch, 7, 157-166 (1970).
  - [15] S.A.Lippman and S.M.Ross, "The Street Walker's Dilemma: A Job Shop Model," SIAM J. Appl. Math. 20, 336-342 (1971).
  - [16] M.J.Magazine, "Optimal Control of Multi-Channel Service Systems,"

- Naval Res. Log. Quart. 18, 177-183 (1971).
- [17] B.I. Miller, "A Queuing Reward System with Several Customer Classes,"  
Management Sci. 16, 234-245 (1969).
- [18] B. Mitchell, "Optimal Service-Rate Selection in an  $M/G/1$  Queue," SIAM  
J. Appl. Math. 24, 19-35 (1973).
- [19] N. Prabhu and S. Stidham, Jr., "Optimal Control of Queuing Systems" in  
"Mathematical Methods in Queuing Theory," pp. 263-294, 1974.
- [20] M. Schäl, "Conditions for Optimality in Dynamic Programming and for the  
Limit of  $n$ -Stage Optimal Policies to Be Optimal,"  
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 32, 179-196 (1975).
- [21] R. Schassberger, "A Note on Optimal Service Selection in a Single  
Server Queue," Management Sci. 21, 1326-1331 (1975).
- [22] M. Scott, "A Queueing Process with Some Discrimination," Management  
Sci. 16, 227-233 (1969).
- [23] R.F. Serfozo, "Monotone Optimal Policies for Markov Decision Processes,"  
Math. Prog. Studies, 6, 202-215 (1976).
- [24] K. Seth, "Optimal Service Policies, Just after Idle Periods, in Two-  
Server Heterogeneous Queuing Systems," Operations Res. 25, 356-360,  
(1977).
- [25] M.J. Sobel, "Optimal Average-Cost Policy for a Queue with Start-up and  
Shut-Down Costs," Operations Res. 17, 145-162 (1969).
- 21

- [26] M.J.Sobel, "Optimal Operation of Queues," in "Mathematical Methods in Queueing Theory," pp.231-261, Springer, 1974.
- [27] H.C.Tijms, "An Algorithm for Average Costs Denumerable State Semi-Markov Decision Problems with Applications to Controlled Production and Queueing Systems," pp.143-179, R.Hartley et al. ed. "Recent Development in Markov Decision Processes" Acad. Press, 1980.
- [28] S.Zacks and M.Yadin, "Analytic Characterization of the Optimal Control of a Queueing System," J. Appl. Prob. 7, 617-633 (1970).