

Existence Theorems and Positive Operators

東工大 理学部 高橋 渉

いくつかの存在定理を証明する前に次のよく知られた2つの基本定理を述べておこう。

定理1 (Brouwer の不動点定理). X を n 次元空間の compact convex 集合とし, T を X から X への連続な写像とする。そのとき, X の中に T の不動点が存在する。

定理2 (単位の分割定理). X を compact Hausdorff 空間とし, $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ を $X = \bigcup_{i=1}^m G_i$ なる開集合の族とする。そのとき次の3つの条件をみたす X 上の m 個の実数値連続函数 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ が存在する。

- (1) すべての $x \in X$ に対して $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, m$).
- (2) すべての $x \in X$ に対して $\sum_{i=1}^m \beta_i(x) = 1$.
- (3) すべての $x \in G_i^c$ に対して $\beta_i(x) = 0$ ($i=1, 2, \dots, m$).

これらを用いて次の有用な不動点定理を得ることができる。

定理3. X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし T を次の (1) と (2) をみたす X から 2^X への写像とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して $T(x)$ は X の空でない convex 集合 (あるいは X の開集合) である。

(2) 任意の $y \in X$ に対して $T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\}$ は X の開集合 (あるいは空でない convex 集合) である。

そのとき $x_0 \in T(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 条件より, 任意の $y \in X$ に対して $T^{-1}(y)$ は X の開集合であり, $X = \bigcup_{y \in X} T^{-1}(y)$ である。 X の compactness を使うと $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}(y_i)$ なるような $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ をうることができる。 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ をこの covering に対応する単位の分割とし, X から X への mapping p を

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) y_i$$

で定義すると, すべての $x \in X$ に対して $p(x) \in T(x)$ である。なぜなら $x \in X$ に対して $\beta_i(x) \neq 0$ なら $x \in T^{-1}(y_i)$ であり, それゆえ $y_i \in T(x)$ である。ここで $T(x)$ が convex 集合であることを使えば $p(x) \in T(x)$ をうることができる。

X_0 を $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ によってはられる finite dimensional

simplex とすると, p は X_0 から X_0 への continuous mapping であり, Brouwer の不動点定理を使うことにより $x_0 = p(x_0) \in T(x_0)$ なる $x_0 \in X_0 \subset X$ をうることができる。これで証明が完了した。

これから次の存在定理をうることができる。

定理 4. X を線形位相空間 E の中でない compact convex 集合とし, A を次の性質をもつ $X \times X$ の部分集合とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対して 集合 $\{x \in X : (x, y) \in A\}$ は閉である。

(2) すべての $x \in X$ に対して $(x, x) \in A$ である。

(3) 任意の $x \in X$ に対して 集合 $\{y \in X : (x, y) \in A\}$ は convex である。

そのとき $x_0 \times X \subset A$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 任意の $x \in X$ に対して $(x, y) \in A$ なる $y \in X$ の存在を仮定する。いま $x \in X$ に対して

$$T(x) = \{y \in X : (x, y) \in A\}$$

とおくとき, $T(x)$ は nonempty であり convex である。また $T^{-1}(y)$ は open であるので 定理 3 より $x_0 \in T(x_0)$ なる

$x_0 \in X$ をうることかできる。すなわち $(x_0, x_0) \in A$ である。
これはすべての $x \in X$ に対して $(x, x) \in A$ であることに反する。
これで $x_0 \times X \subset A$ なる $x_0 \in X$ の存在かわかる。

定理4の直接の結果として次の使いやすい定理をうる。

定理5. X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし
 F を次の条件をみたす $X \times X$ 上の実数値函数とする。

- (1) 任意の $y \in X$ に対して, x の函数 $F(x, y)$ は upper semicontinuous である。
 - (2) 任意の $x \in X$ に対して, y の函数 $F(x, y)$ は convex 函数である。
 - (3) すべての $x \in X$ に対して $F(x, x) \geq c$ である。
- そのとき, すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. いま $A = \{(x, y) \in X \times X : F(x, y) \geq c\}$ とする。
そのとき A は定理4の条件(1), (2), (3)をみたすことは明らかである。それゆえ $x_0 \times X \subset A$ なる $x_0 \in X$ をうることかできる。すなわち すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ である。

X を線形位相空間 E の compact convex 集合とし, $f_1, f_2, \dots, f_n$ を X 上の lower semicontinuous $\cap$ convex な n 個の実数値関数とする。そのとき定理 5 を用いて次の定理をうる。

定理 6. $f_i(x_0) \leq c$ ($i=1, 2, \dots, n$) をみたす $x_0 \in X$ が存在する必要十分条件は $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ なる m 個の非負な数 α_i に対して いつでも $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y_0) \leq c$ なる $y_0 \in X$ が存在することである。

証明. 必要性は明らかである。十分性を証明する。もし, $f_i(x_0) \leq c$ ($i=1, 2, \dots, n$) なる $x_0 \in X$ が存在しないとする。と $G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) に対して $X = \bigcup_{i=1}^m G_i$ である。いま開集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ に対応する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ とし $X \times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると, F は定理 5 の (1), (2) をみたしており, さらに x の関数 $F(x, x)$ は lower semicontinuous であることより, すべての $x \in X$ に対して $F(x, x) \geq c_0 > c$ なる実数 c_0 の存在も容易にわかる。そこで定理 5 を使えてすべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c_0 > c$ なるような $x_0 \in X$ の存在がわかる。すなわちすべての $y \in X$ に対して $\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) f_i(y) > c$ と

なり, さらに $\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) = 1$ となるような m 個の非負の数 $\{\beta_1(x_0), \beta_2(x_0), \dots, \beta_m(x_0)\}$ が存在したことになる。これで証明が完了した。

定理5をもとに Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理の拡張を得る。

定理7. X を局所凸な線形位相空間 E の compact convex 集合とし, T を X から E への連続写像とする。そのとき次の (1) あるいは (2) が成立する。

(1) $Ty_0 = y_0$ なる $y_0 \in X$ が存在する。

(2) $0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x \in X} p(x - Tx)$ なるような点 $x_0 \in X$ と E 上の continuous seminorm p が存在する。

証明. (1) を否定しよう。すなわち任意の $x \in X$ に対して, $p_x(x - Tx) > 0$ なる E 上の continuous seminorm p_x が存在するとしよう。そのとき

$$X = \bigcup_{x \in X} \{y \in X : p_x(y - Ty) > 0\}$$

であり, X は compact なので

$$X = \bigcup_{i=1}^m \{y \in X : p_{x_i}(y - Ty) > 0\}$$

なる有限個の $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ が存在する。いま $\{y \in X :$

$p_{x_i}(y - Tx) > 0 \}_{i=1}^m$ に対する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ とし, $X \times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \beta_i(x) p_{x_i}(y - Tx) \\ - \sum_{i=1}^m \beta_i(x) p_{x_i}(x - Tx)$$

とするとき, F は定理 5 の仮定 (1), (2) をみたし, さらに $x \in X$ に対して $F(x, x) = 0$ である。それゆえ, 定理 5 によってすべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq 0$ なる $x_0 \in X$ が存在する。すなわちすべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) p_{x_i}(y - Tx_0) \\ \geq \sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) p_{x_i}(x_0 - Tx_0) > 0$$

なる不等式が成立する。ここで $p = \sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) p_{x_i}$ とするならば定理の (2) が得られる。

定理 8. X を Banach 空間 B の compact convex 集合とし, $T \in X$ から B への連続関数とする。そのとき,

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x \in X} \|x - Tx\|$$

なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. $X \times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \|y - Tx\| - \|x - Tx\|$$

とおけば, 定理5よりすべての $y \in X$ に対して

$$\|y - Tx_0\| \geq \|x_0 - Tx_0\| \text{ なる } x_0 \in X \text{ をうることができる。}$$

すなわち定理が証明されたことになる。

これらの存在定理を Banach space 上の種々の linear operators の議論に応用するのがこの講究の目的である。まずはじめに Banach 空間上に作用する compact operators の不変部分空間に関する Lomonosov の定理と Schauder の不動点定理と単位の分割定理のみによって論じよう。

定理9. B は infinite complex Banach space (この定理のみ complex を仮定) とし, $A \in O$ でない B 上の compact operator とする。また $\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{L}(B) : AC = CA\}$ とする。そのとき $\mathcal{C}$ のすべての operators に関して不変であるような B の nontrivial な closed subspace が存在する。

証明. 結論を否定しよう。すなわちすべての $C \in \mathcal{C}$ に対して $CX \subset X$ でありかつ $\{0\} \neq X \neq B$ なる B の closed subspace X が存在しないとしよう。そのとき $Au_0 = \lambda u_0$ なる $u_0 (\neq 0)$ が存在しないことがわかる。 $Au_0 = \lambda u_0$ なる $u_0 (\neq 0)$

が存在したとして, $X = \{u \in B : Au = \lambda u\}$ とすると $X \neq \{0\}$ であり, すべての $C \in \mathcal{C}$ に対して $CX \subset X$ である。ここで $B \neq X$ とすると仮定に反するので $B = X$ である。すなわち $u \in B$ なら $Au = \lambda u$ である。 $\lambda = 0$ なら $A = 0$ となり仮定に反するし, $\lambda \neq 0$ なら $\lambda S_1(0)$ が compact となり B が infinite dim. であることに反する (ここで $S_r(z) = \{x \in B : \|x - z\| \leq r\}$ である)。これで $Au_0 = \lambda u_0$ なる $u_0 (\neq 0)$ の存在が否定された。

$\lambda = 0$ は A の固有値でない。だから $u \neq 0$ なら $Au \neq 0$ となり, $\lambda \rightarrow \infty$ なら $\|A\lambda u\| \rightarrow \infty$ となる。また $\|x - y\| \leq 1$ なら $\|Ax - Ay\| \leq \|A\|$ なので, $\inf \{\|Ax\| : x \in S_1(x_0)\} > 0$ となるような $x_0 \in B$ の存在がわかる。いま $S_1(x_0) = S$ とかくと, 任意の $y \in \overline{AS}$ に対して, $\|T_y y - x_0\| < 1$ なる $T_y \in \mathcal{C}$ が存在する。なぜならすべての $T \in \mathcal{C}$ に対して $\|Ty - x_0\| \geq 1$ なるような $y \in \overline{AS}$ が存在したとすると, $X \in \{Ty : T \in \mathcal{C}\}$ の closure とする。すると X は closed subspace として $\mathcal{C}$ のもとで不変であり, $x_0 \notin X$ より $\{0\} \neq X \neq B$ もわかる。これは仮定に反する。

いま $T \in \mathcal{C}$ に対して $G_T = \{y \in \overline{AS} : \|Ty - x_0\| < 1\}$ とすると $\bigcup_{T \in \mathcal{C}} G_T = \overline{AS}$ となる。 $\overline{AS}$ が compact であることより $\{T_1, T_2, \dots, T_n\} \subset \mathcal{C}$ が存在して $\bigcup_{i=1}^n G_{T_i} = \overline{AS}$ となる。

$\{G_{T_1}, G_{T_2}, \dots, G_{T_m}\}$ に対応する単位の分割 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ とし, $\overline{AS}$ から B への mapping Φ を

$$\Phi y \equiv \sum_{i=1}^m \beta_i(y) T_i y$$

で定義すると, $\Phi y \in S$ をうる。なぜなら $\beta_i(y) \neq 0$ は $y \in G_{T_i}$ を意味し, $\|T_i y - \alpha_0\| < 1$ を意味する。ゆえに,

$$\|\alpha_0 - \Phi y\| \leq \sum_{i=1}^m \beta_i(y) \|T_i y - \alpha_0\| < 1$$

である。すなわち $\Phi y \in S$ をうる。だから $A\Phi(\overline{AS}) \subset \overline{AS}$ であり, Schauder の不動点定理を使うことにより $A\Phi y_0 = y_0$ なる $y_0 \in \overline{AS}$ をうる。この y_0 に対し,

$$T = \sum_{i=1}^m \beta_i(y_0) T_i A$$

とすると, T は compact operator であり, $T y_0 = y_0$ である。

いま $X_0 = \{x \in B : Tx = x\}$ とすると, X_0 は finite dim. となる。故に $A X_0 \subset X_0$ から $A u_0 = \mu u_0$ なる $u_0 \in X_0$ ($u_0 \neq 0$) の存在がわかる。これは A の固有ベクトルが存在しないことに及ぶ。これで定理が証明された。

次に定理 6 を用いて Roberts の最近の結果を拡張してみよう。 X を compact Hausdorff space とし $C(X)$ を X 上の連続関数全体が作る Banach space とする。 $C(X)_+$ はその positive part とする。 $M = \{\mu \in C(X)^* : \|\mu\| = \mu(1) = 1\}$ とし, Σ を $C(X)$ 上の Markov operators が作る semigroup

としたとき, すべての $T \in \Sigma$ に対して $\mu = T^* \mu$ なる $\mu \in M$ と Σ -invariant な probability measure という二つにする。

定理10. 次の(1), (2), (3), (4)は同値である。

(1) X 上の Σ -invariant probability measure が存在する。

(2) 任意の $(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \Sigma^n$ と $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in C(X)_+^n$ に対して $\sum_{i=1}^n T_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^n f_i(x)$ なる $x \in X$ が存在する。

(3) 任意の $(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \Sigma^n$ と $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = c$ なる任意の $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \in C(X)_+^{n+1}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n T_i f_i(x) + f_{n+1}(x) \leq c$$

なる $x \in X$ が存在する。

(4) 任意の $(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \Sigma^n$ と $\sum_{i=1}^n T_i f_i + f_{n+1} = c$ なる任意の $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \in C(X)_+^{n+1}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \geq c$$

なる $x \in X$ が存在する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1). 任意の $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して M 上の函数 $F_{f,T}$ を

$$F_{f,T}(\mu) = \mu(f - Tf)$$

で定義する。任意の $(T_1, T_2, \dots, T_m) \in \Sigma^m$ と

$(f_1, f_2, \dots, f_m) \in C(X)_+^m$ に対して (2) より

$$\sum \delta_x(T_i f_i) \leq \sum \delta_x(f_i)$$

なる $\delta_x \in M$ が存在するから定理 6 よりすべての $T \in \Sigma$ と

$f \in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf) \leq \mu(f)$ なる $\mu \in M$ の存在が

わかる。また $\|f\| \cdot 1 - f \geq 0$ なので

$$\mu(T(\|f\| \cdot 1 - f)) \leq \mu(\|f\| \cdot 1 - f)$$

より $\mu(Tf) \geq \mu(f)$ がわかり、 $\mu(Tf) = \mu(f)$ となる。

(2) $\Rightarrow$ (3). $\sum T_i f_i(x) \leq \sum f_i(x)$ なる $x \in X$ が存在するとする。そのとき

$$\sum T_i f_i(x) + f_{n+1}(x) \leq \sum f_i(x) + f_{n+1}(x) = C$$

より (3) がいえたこととなる。

(3) $\Rightarrow$ (2). 任意の $(T_1, T_2, \dots, T_m) \in \Sigma^m$ と $(f_1, \dots, f_m) \in C(X)_+^m$ に対し $C = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m f_i(x)$ とし、 $f_{n+1} = C - \sum_{i=1}^m f_i$ とすると、(3) より $\sum_{i=1}^m T_i f_i(x) + f_{n+1}(x) \leq C$ なる $x \in X$ の存在がわかる。それゆえ

$$\sum_{i=1}^m T_i f_i(x) \leq C - f_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$$

なる $x \in X$ の存在がわかる。

(2) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (2) も同様にわかる。

Σ から X へ X への continuous mappings の semigroup である場合を考える。その前に Σ に対する normal base $\mathcal{B}$ を定義する。 X の open sets の族 $\mathcal{B}$ が Σ に対する normal base であるとは、次の (1), (2), (3) が成り立つときである。

- (1) $\mathcal{B}$ は X の base である。
- (2) $E \subset Q$ (E は closed set, Q は open set) に対して, $E \subset U \subset \bar{U} \subset Q$ なる $U \in \mathcal{B}$ が存在する。
- (3) $U \in \mathcal{B}$ なら $T^{-1}U \in \mathcal{B}$ ($\forall T \in \Sigma$) である。

補助定理. $f \in C(X)_+$ と $\varepsilon > 0$ に対して $N \cdot \varepsilon > 2$ とする。そのとき、自然数 n と $\mathcal{B}$ の finite subset $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ が存在して

$$f \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n 1_{U_i} \leq f + \varepsilon$$

である。

上の補助定理をもとにして次の定理をうる。

定理 11. 次の (1) と (2) は同値である。

- (1) X 上の Σ -invariant probability measure μ が存在する。
- (2) 任意の $(U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{B}^n$ と $(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \Sigma^n$ に対して $\sum_{i=1}^n 1_{T_i^{-1}U_i}(x) \geq \sum_{i=1}^n 1_{U_i}(x)$ なる $x \in X$ が存在する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). $\mu \in \Sigma$ -inv. prob. measure とする.

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} 1_{T_i^{-1}U_i}(x) d\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{\infty} 1_{U_i}(x) d\mu(x)$$

より $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{T_i^{-1}U_i}(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} 1_{U_i}(x)$ なる $x \in X$ の存在がわかる。

(2) $\Rightarrow$ (1). 任意の $(f_1, \dots, f_n) \in C(X)_+^m$ と $(T_1, \dots, T_n) \in \Sigma^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して $N \cdot \frac{\varepsilon}{n} > 2$ とする。補助定理より任意

の i に対して, $f_i \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m(i)} 1_{U_{ij}} \leq f_i + \frac{\varepsilon}{n}$ なる

$\{U_{ij}\}_{j=1}^{m(i)} \subset \mathcal{B}$ が存在する。だから $\sum_{i=1}^n f_i \leq \frac{1}{N} \sum_{i,j} 1_{U_{ij}}$

である。また x のかわりに $T_i x$ を入れることにより,

$$\frac{1}{N} \sum_{i,j} 1_{T_i^{-1}U_{ij}}(x) \leq \sum_{i=1}^n f_i(T_i x) + \varepsilon \text{ もうる } \text{---} \text{---} \text{---}$$

X は compact で, $\varepsilon (> 0)$ は任意なので

$$\sum_{i=1}^n f_i(y) \leq \sum_{i=1}^n f_i(T_i y)$$

なる $y \in X$ の存在がわかる。定理 10 を用いて, X 上の Σ -inv. prob. measure の存在をうる。

最後に Tychonoff の不動点定理を用いて, mappings の族に対する不動点定理を証明する。この定理は Day の不動点定理の拡張にもなっている。 X を compact Hausdorff space とし, $X \times X$ から X への mapping: $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ が continuous であるとする。このとき $(X, \cdot)$ は compact groupoid であるとして Roberts は名づけた。 $(X, \cdot)$ から実

数全体 $\mathbb{R}$ への mapping f が convex であるとは、任意の $x, y \in X$ に対して $f(x \cdot y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ が成り立つときである。convex で continuous functions の全体とてあらわすことにする。また $x \cdot x = x$ なる $x \in X$ の全体を $\text{core } X$ とあらわすことにする。

$\mu, \nu \in M = \{ \mu \in C(X)^* : \|\mu\| = \mu(1) = 1 \}$ に対して、

$$l(f) = \int f(x \cdot y) d\mu(x) \times \nu(y)$$

を $C(X)$ から $\mathbb{R}$ への mapping l と定義すると l は $l(1) = 1$ をみたす norm-one linear functional である。 $\varphi \in M$ と $l(f) = \int f d\varphi$ ($\forall f \in C(X)$) をみたすものとし、 ν と μ の convex convolution と $\varphi \equiv \mu * \nu$ で定義したとき、 $S\mu \equiv \mu * \mu$ とするにより、 S は M から M への w^* -continuous mapping になる。

定理 12. $(X, \cdot) \in \text{compact groupoid}$ とし、 C は X の点を分離するとする。また continuous mappings の semigroup Σ 以下の条件をみたすとする。

- (1) Σ -invariant probability measure をもつ。
- (2) すべての $T \in \Sigma$ に対して、 $T(x \cdot y) = Tx \cdot Ty$ ($\forall x, y \in X$) である。

このとき すべての $T \in \Sigma$ に対して $Tx = x$ なる $x \in \text{core } X$

が存在する。

証明. $T \in \Sigma$ に対し $\hat{T}f(x) = f(Tx)$ とする。

$M_0 = \{ \mu \in M : \hat{T}^* \mu = \mu, T \in \Sigma \}$ とすると M_0 は w^* -compact convex set である。

いま任意の $\mu \in M_0$ と $T \in \Sigma$ に対し,

$$\begin{aligned} \hat{T}^* S_\mu(f) &= \int f(T(x, y)) d\mu \times \mu \\ &= \int f(Tx, Ty) d\mu \times \mu \\ &= \int f(x, y) d\mu \times \mu = S_\mu(f) \end{aligned}$$

であるので, S は M_0 から M_0 への w^* -continuous mapping であることがわかる。ここで Tychonoff の不動点定理を用いることにより $S\mu = \mu$ なる $\mu \in M_0$ であることがでる。この μ に対し $\mu = \delta_x$ なることを証明する。その前に $X \times X$ の baire sets は $\mu \times \mu$ -measurable であり, $f \in C(X \times X)$ は baire measurable であるので $\int f d\nu = \int f d\mu \times \mu$ なる $\nu \in M(X \times X)$ の存在がわかる。この ν と μ に対し,

$$\text{supp } \nu \supset \text{supp } \mu \times \text{supp } \mu$$

となる。

$a, b \in \text{supp } \mu$ ($a \neq b$) とする。この条件より,

$$f(a, b) < \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)$$

なる $f \in \mathcal{C}$ の存在がわかる。それゆえ、

$$\begin{aligned} \mu(f) &= S\mu(f) = \int f(x \cdot y) d\mu \times \mu \\ &< \int \left(\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \right) d\mu \times \mu \\ &= \int f d\mu = \mu(f) \end{aligned}$$

となり矛盾をうる。故に $\mu = \delta_x$ なる $x \in X$ が存在する。

いまこの x に対して $\delta_x = S\delta_x = \delta_x * \delta_x = \delta_{x \cdot x}$ であることより $x \in \text{core } X$ もわかる。

上の定理より次の定理がただちにえられる。

定理 13. X を局所凸な線形位相空間の compact convex subset とする。 $\Sigma \subseteq X$ から X への continuous, affine mappings からなる amenable semigroup とする。そのとき、 $Tx = x$ ($\forall T \in \Sigma$) なる $x \in X$ が存在する。

証明. $x \cdot y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ とする。これにより $T(x \cdot y) = Tx \cdot Ty$ がわかり、 Σ -invariant probability measure の存在は Σ の amenability よりわかる。それゆえ定理 12 を使えて定理の結論をうることもできる。この場合における $\text{core } X$ は X そのものである。

References

- [1] F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. ann., 177 (1968), 283-301.
- [2] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, Part I Interscience, New York (1958).
- [3] M. M. Day, Amenable semigroups, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
- [4] ———, Fixed point theorem for compact convex sets, Illinois J. Math., 5 (1961), 585-590.
- [5] K. Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.
- [6] ———, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, Math. Ann., 163 (1966), 189-203
- [7] ———, Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234-240.
- [8] P. R. Halmos, Measure theory, New York, Van

Nostrand, 1950.

- [9] V. J. Lomonosov, Invariant subspaces for operators commuting with compact operators, *Functional Anal. i Prilozhen* 7 (1973), 55-56.
- [10] R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, New York, Van Nostrand, 1966.
- [11] J. W. Roberts, Invariant measure in compact Hausdorff spaces, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1975), 691-718.
- [12] ———, Representing measures in compact groupoids, To appear.
- [13] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, *J. Math. Soc. of Japan* 28 (1976), 168-181.
- [14] 高橋 渉, 不動点定理をめぐる最近の結果, *数学* 28 (1976), 236-247.