

W -mapping による収束定理と 制約可能性問題

下地 一也 (KAZUYA SHIMOJI)
東京工業大学情報理工学研究科

1 Introduction

$C_1, C_2, \dots, C_n$ をその共通部分 C_0 が空でない Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, 距離射影 $P_i: H \rightarrow C_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が与えられているものとする. これから C_0 の元を求めるという問題は, 制約可能性問題と関係があり, 具体的な例で表現すると, H 上で定義された r 個の連続凸関数 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}: H \rightarrow \mathbf{R}$ と $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられたとき,

$$f(x_0) = \min_{x \in \bigcap_{i=1}^n C_i} f(x) = \alpha$$

となる $x_0 \in C_0$ を見つけよ. という問題である. これは, function f から g_{n+1} と C_{n+1} を

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= f - \alpha, \\ C_{n+1} &= \{x \in E : f(x) - \alpha \leq 0\} \end{aligned}$$

作り出してみると,

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$$

となる $x_0 \in E$ を見つけよ. というシンプルな問題に帰着できる.

そこで, この $x_0 \in E$ をどうやって見つけるか? という問題が上がるが, それに対して例えば, Crombez[2] は Hilbert 空間上で, 距離射影 P_i と恒等写像 I で構成された有限個のある写像族の convex combination によって弱収束するということを示し, しばらくして, 北原-高橋 [3] と高橋-田村 [11] はこれを uniformly convex な Banach 空間に拡張した.

また, nonexpansive 写像 T による iteration scheme には, 代表的な iteration が 2 つあるが, それは Mann による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

そして, Halpern による iteration

$$x_0 = x \in H, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

これらによる点列でもって近似する方法がある.

厚芝-高橋 [1] は有限個の nonexpansive 写像によって生成された W -mapping による Halpern-type iteration で強収束定理による点列近似が与えられているが, 今回の発表は可算無限個の nonexpansive 写像による強収束定理を証明した.

2 Lemmas

C を Banach 空間 E の convex 集合とし, $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への写像族, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 \leq \alpha_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots)$ となる実数とする. その時, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $W_n: C \rightarrow C$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} U_{n,n+1} &= I, \\ U_{n,n} &= \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1 - \alpha_n)I, \\ U_{n,n-1} &= \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1 - \alpha_{n-1})I, \\ &\vdots \\ U_{n,k} &= \alpha_k T_k U_{n,k+1} + (1 - \alpha_k)I, \\ U_{n,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1 - \alpha_{k-1})I, \\ &\vdots \\ U_{n,2} &= \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1 - \alpha_2)I, \\ W_n = U_{n,1} &= \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1 - \alpha_1)I. \end{aligned}$$

このように定義した W_n を $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ によって生成された W -mapping と呼ぶ.

W -mapping を可算個の写像族に対しても定義できるようにするために, 次の Lemma を用意した.

Lemma 2.1 C を *strictly convex Banach* 空間 E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1$ ($i = 1, 2, \dots$) を満たす実数とする. この時, 任意の $x \in C$, $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x$ が存在する.

Sketch of the proof. かつてに $x \in C$, $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ をとってくる. 一般性を失う事なしに, $x \neq w$ と仮定してよい. $k \in \mathbf{N}$ を固定しておく. 任意の $n \in \mathbf{N}$ ($n \geq k$) に対して,

$$\|U_{n+1,k}x - U_{n,k}x\| \leq \left(\prod_{i=k}^n \alpha_i \right) \|U_{n+1,n+1}x - U_{n,n+1}x\| \leq 2b^{n-k+2}\|x - w\|$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbf{N}$ ($n_0 \geq k$) が存在して s.t.

$$b^{n_0-k+2} < \frac{\varepsilon(1-b)}{2\|x-w\|}.$$

とできる. すると, 任意の m, n ($m > n > n_0$) に対して,

$$\|U_{m,k}x - U_{n,k}x\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|U_{j+1,k}x - U_{j,k}x\| \leq 2\|x-w\| \sum_{j=n}^{m-1} b^{j-k+2} < \varepsilon.$$

これより $\{U_{n,k}x\}$ は Cauchy 列, ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x$ が存在する. ■

上の Lemma より $U_{\infty,k}$ ($k \in \mathbf{N}$), W を次のように定義できる:

$$U_{\infty,k}x := \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k}x,$$

$$Wx := \lim_{n \rightarrow \infty} W_nx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}x$$

for every $x \in C$. このような W を $T_1, T_2, \dots$ と $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ から生成された *W-mapping* と呼ぶ.

Lemma 2.2 C を *strictly convex Banach* 空間 E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1$ ($i = 1, 2, \dots$) を満たす実数とする. この時, $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ となる.

Sketch of the proof. $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ とする. その時, 明らかに任意の $n, k \in \mathbf{N}$ ($n \geq k$) に対して $U_{n,k}w = w$ が成立する. よって, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $U_{\infty,k}w = w$. 特に $Ww = U_{\infty,1}w = w$ であるから,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \subset F(W).$$

次に,

$$F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

を示す. かつてに $x \in F(W)$, $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ をとってくる.

$$\begin{aligned} & \|W_n x - W_n y\| \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|\alpha_k (T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|T_k U_{n,k+1} x - T_k U_{n,k+1} y\| + \left(1 - \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} & \|Wx - Wy\| \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|\alpha_k (T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| + \left(1 - \prod_{i=1}^k \alpha_i \right) \|x - y\| \\ & \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

$\|Wx - Wy\| = \|x - y\|$ であり任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して $0 < \alpha_i < 1$ であるから, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} & \|\alpha_k (T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y) + (1 - \alpha_k)(x - y)\| \\ & = \|T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

E は strictly convex で, $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ だから,

$$x - y = T_k U_{\infty,k+1} x - T_k U_{\infty,k+1} y = T_k U_{\infty,k+1} x - y$$

ゆえに

$$x = T_k U_{\infty,k+1} x.$$

一方,

$$U_{n,k+1}x = \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{n,k+2}x + (1 - \alpha_{k+1})x,$$

である事より,

$$\begin{aligned} U_{\infty,k+1}x &= \alpha_{k+1}T_{k+1}U_{\infty,k+2}x + (1 - \alpha_{k+1})x \\ &= \alpha_{k+1}x + (1 - \alpha_{k+1})x \\ &= x. \end{aligned}$$

よって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x = T_k U_{\infty,k+1}x = T_k x.$$

これより $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ となるので, $F(W) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ がいえる. 以上の事から,

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i).$$

次の Lemma 2.3 は後の Main Theorem を証明するために, Lemma 2.6 とセットになっているものである.

Lemma 2.3 C を Banach 空間 E の空でない *closed convex* 集合とする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 \leq \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ によって生成された W -mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$ となる実数の列で, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$.

Sketch of the proof. かつてに $x \in C$ と $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ をとってくる. $D = \{z \in C \mid \|f - z\| \leq \|f - x\|\}$ とおくと, D は C の有界な *closed convex* となる部分集合で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n D \subset D$ を満たす. こ

れより一般性を失う事なしに, C を有界と仮定してよい. $K = \sup_{z \in C} \|z\|$ とおくと, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して評価すると,

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - x_n\| \\ & \leq (1 - \beta_n)\|x_n - x_{n-1}\| + 2K|\beta_n - \beta_{n-1}| + (1 - \beta_n)\|W_n x_n - W_{n-1} x_n\| \\ & \leq (1 - \beta_n)\|x_n - x_{n-1}\| + 2K|\beta_n - \beta_{n-1}| + 2K \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right). \end{aligned}$$

上の不等式を使うと, 各 $m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\|x_{m+2} - x_{m+1}\| \leq 2K(1 - \beta_{m+1}) + 2K|\beta_{m+1} - \beta_m| + 2K \left(\prod_{i=1}^{m+1} \alpha_i \right)$$

となり, 同様に,

$$\begin{aligned} \|x_{m+3} - x_{m+2}\| & \leq 2K \exp \left(- \sum_{l=m}^{m+1} \beta_{l+1} \right) + 2K \sum_{l=m}^{m+1} |\beta_{l+1} - \beta_l| \\ & \quad + 2K \sum_{l=m}^{m+1} \left(\prod_{i=1}^{l+1} \alpha_i \right). \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $m, n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\begin{aligned} \|x_{m+n+1} - x_{m+n}\| & \leq 2K \exp \left(- \sum_{l=m}^{m+n-1} \beta_{l+1} \right) + 2K \sum_{l=m}^{m+n-1} |\beta_{l+1} - \beta_l| \\ & \quad + 2K \frac{b^m(1 - b^n)}{1 - b} \end{aligned}$$

がいえる. $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ である事から, 任意の $m = 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{m+n+1} - x_{m+n}\| \\ & \leq 2K \sum_{l=m}^{\infty} |\beta_{l+1} - \beta_l| + 2K \frac{b^m}{1 - b}. \end{aligned}$$

さらに, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ である事から,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2K \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=m}^{\infty} |\beta_{l+1} - \beta_l| + 2K \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b^m}{1 - b} = 0,$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

次の Proposition と Lemma は後の Theorem を証明するために、それぞれ、塩路-高橋 [5], S. Reich[4] から引用したものである。

Proposition 2.4 (塩路-高橋) a を実数とし, $(a_1, a_2, \dots)$ を任意の Banach limits μ に対して $\mu_n(a_n) \leq a$ で, かつ $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) \leq 0$ を満たす l^∞ の元とする. その時, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ となる.

Lemma 2.5 (S. Reich) E を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし, C を E の空でない closed convex 集合とする. T を C から C 自身への nonexpansive 写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ であるものとする. この時, 一意に onto である sunny nonexpansive retraction $P: C \rightarrow F(T)$ が存在する. さらに, 任意の $x \in C$ に対して,

$$u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Tu_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

によって $\{u_k\} \subset C$ があたえられた時, $\{u_k\}$ は $Px \in F(T)$ に強収束する.

Lemma 2.3 とセットになっている Lemma 2.6 を示す.

Lemma 2.6 E を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし, C を E の空でない closed convex 集合とする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への nonexpansive 写像とし $\bigcap_{i=1}^\infty F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ によって生成された W -mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$ となる実数の列で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^\infty |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^\infty \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq 0$, が成り立つ. ここで $P: C \rightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$ は一意な onto である sunny nonexpansive retraction ($W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$) であるものとする.

Sketch of the proof. Lemma 2.3 の証明でのように, C を有界と仮定しても一般性を失わない. 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, u_k を $u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Wu_k$ を満たす C の一意な元とする. Lemma 2.4 より, $P: C \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ を一意な onto である sunny nonexpansive retraction とすると,

$$k \rightarrow \infty \implies u_k \rightarrow Px \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

$K = \sup_{z \in C} \|z\|$ とすると, 任意の $n, k \in \mathbf{N}$ に対して評価すると,

$$\|x_{n+1} - Wu_k\| \leq 2\beta_n K + \|x_n - u_k\| + \|W_n u_k - Wu_k\|.$$

を得る. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ である事と可算個の写像族に対する W -mapping の定義 $Wu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u_k$ ($\forall k \in \mathbf{N}$) により, 任意の Banach limit μ に対して,

$$\mu_n \|x_n - Wu_k\|^2 = \mu_n \|x_{n+1} - Wu_k\|^2 \leq \mu_n \|x_n - u_k\|^2.$$

点列 $\{U_k\}$ を構成するときに利用した等式 $u_k = \frac{1}{k}x + \left(1 - \frac{1}{k}\right)Wu_k$ を変形すると, $\left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_n - Wu_k) = (x_n - u_k) - \frac{1}{k}(x_n - x)$ となるから,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \|x_n - Wu_k\|^2 &\geq \left(1 - \frac{2}{k}\right) \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \left(1 - \frac{2}{k}\right) \mu_n \|x_n - u_k\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle \end{aligned}$$

この不等式を整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \frac{2}{k} \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle \\ \frac{1}{2k} \mu_n \|x_n - u_k\|^2 &\geq \mu_n \langle x - u_k, J(x_n - u_k) \rangle. \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty \implies u_k \rightarrow Px \in F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ であるから, 上の不等式と E の norm の uniformly Gâteaux 微分可能性より,

$$0 \geq \mu_n \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle.$$

一方, Lemma 2.3 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle - \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle| = 0.$$

ゆえに, Proposition 2.4 から不等式

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq 0.$$

が導かれる. ■

3 Strong convergence theorem and applications

ここでは, 最初に制約可能性と関係のある強収束定理を証明する.

Theorem 3.1 (下地-高橋) E を uniformly Gâteaux 微分可能な norm をもつ uniformly convex な Banach 空間とし, C を E の空でない closed convex 集合とする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への nonexpansive 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ によって生成された W -mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$ となる実数の列で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\{x_n\}$ は $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ に強収束する. ここで $P: C \rightarrow F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は一意な onto である sunny nonexpansive retraction ($W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$) であるものとする.

Sketch of the proof. $Px \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ であることから, 不等式

$$\|W_n x_n - Px\| \leq \|x_n - Px\|, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成立している. 点列 $\{x_n\}$ を構成する式 $x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n)W_n x_n$ を変形して得られる式 $(1 - \beta_n)(W_n x_n - Px) = (x_{n+1} - Px) - \beta_n(x - Px)$ より

$$(1 - \beta_n)^2 \|W_n x_n - Px\|^2 \geq \|x_{n+1} - Px\|^2 - 2\beta_n \langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle.$$

が成立するので, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\|x_{n+1} - Px\|^2 \leq (1 - \beta_n) \|W_n x_n - Px\|^2 + 2(1 - (1 - \beta_n)) \langle x - Px, J(x_{n+1} - Px) \rangle$$

Lemma 2.6 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $m \in \mathbf{N}$ が存在して, s.t.

$$\langle x - Px, J(x_n - Px) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq m).$$

よって,

$$\|x_{m+1} - Px\|^2 \leq (1 - \beta_m) \|x_m - Px\|^2 + (1 - (1 - \beta_m)) \varepsilon.$$

同様にして,

$$\|x_{m+2} - Px\|^2 \leq \left\{ \prod_{l=m}^{m+1} (1 - \beta_l) \right\} \|x_m - Px\|^2 + \left\{ 1 - \prod_{l=m}^{m+1} (1 - \beta_l) \right\} \varepsilon.$$

以下, 同じようにしていくと,

$$\|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \left\{ \prod_{l=m}^{m+n-1} (1 - \beta_l) \right\} \|x_m - Px\|^2 + \left\{ 1 - \prod_{l=m}^{m+n-1} (1 - \beta_l) \right\} \varepsilon$$

を得る. 条件 $\sum_{l=m}^{\infty} \beta_l = \infty$ より $\prod_{l=m}^{\infty} (1 - \beta_l) = 0$ がいえるので, ゆえに,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Px\|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{m+n} - Px\|^2 \leq \varepsilon.$$

ここで, $\varepsilon > 0$ は任意であったから, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Px\|^2 \leq 0$. これより $\{x_n\}$ が $Px \in \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ に強収束することがいえる. ■

次の Theorem 3.2 は Theorem 3.1 の応用で, 制約可能性問題と関係がある Theorem である.

Theorem 3.2 (下地-高橋) E を *uniformly Gâteaux* 微分可能な *norm* をもつ *uniformly convex* な Banach 空間とし, C を E の空でない *closed convex* 集合とする. $\{C_n\}$ を C の *nonexpansive retracts* の列で, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ を満たしているものとし, 各 $P_k (k \in \mathbb{N})$ は C から C_k への *onto* な *nonexpansive retraction* であるとする. $T_1, T_2, \dots$ を C から C 自身への *nonexpansive* 写像とし $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ を満たしているものとする. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を $0 < \alpha_i \leq b < 1 (i = 1, 2, \dots)$ を満たす実数とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n を $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ によって生成された W -mapping とする. $\{\beta_n\}$ を $0 \leq \beta_n \leq 1 (n = 1, 2, \dots)$ となる実数の列で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ と $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たしているものとする. $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in C \quad x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義された点列とする. この時, $\{x_n\}$ は $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ に強収束する. ここで $P: C \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ は一意な *onto* である *sunny nonexpansive retraction* ($W = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1}$) であるものとする.

Proof. 任意の $u \in C$ に対して, $Wu = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u$ とおくと, If $Wu = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n u$ for every $u \in C$, Lemma 2.2 より $F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(P_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. がいえる. よって Theorem 3.1 を使う事によって, $\{x_n\}$ が $Px \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ に強収束することがいえる. ■

参考文献

- [1] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, to appear.
- [2] G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413–419.
- [3] S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **2** (1993), 333–342.
- [4] S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287–292.

- [5] N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3641–3645.
- [6] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 543–553.
- [7] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988. (Japanese)
- [8] W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, *Nonlinear Analysis*, **30** (1997), 1283–1293.
- [9] W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, **51** (1997), 277–292.
- [10] W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Math. Comput. Modelling*, to appear.
- [11] W. Takahashi and T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations for nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386–397.