

H-system の解の爆発点について

都立大学 塩原 康若

1. 序

B を $\mathbb{R}^2$ の単位円板とし、次の Dirichlet 境界値問題を考える。

$$(i) \quad \begin{cases} \Delta u = 2H u_x \wedge u_y & \text{on } B \\ u = \gamma & \text{on } \partial B \end{cases}$$

ただし $u: B \rightarrow \mathbb{R}^3$, $H > 0$ 定数, " $\wedge$ " は $\mathbb{R}^3$ における外積である。 (i) の解が等角条件

$$|u_x|^2 = |u_y|^2, \quad u_x \circ u_y = 0 \quad \text{on } B$$

を満たすとき、定数平均曲率 H を持つ曲面を与える。

$\mathbb{R}^3$ 内の Jordan 曲線 Γ に張られた定数平均曲率曲面をみつけるという問題を動機として、H-system は長年にわたって研究

されてきた。

Hildebrandt は、(1) を Euler 方程式とする汎関数

$$(2) \quad E_H(v) := \int |\nabla v|^2 + \frac{4H}{3} \int v \cdot v_x \wedge v_y$$

が、 $H \times \sup |v| < 1$ のとき、極小点をもつことを示した。この解は "small solution" と呼ばれている。 E_H の極小点は高々 1 個であり、常に非退化である。すなわち、 u を "small sol." とすると、

$$(3) \quad d^2 E_H(u)(v, v) := \int |\nabla v|^2 + 4H \int u \cdot v_x \wedge v_y \geq \alpha \int |\nabla v|^2$$

for all $v \in H_0^1$

が成立する。これから、min-max 法によってもう一つ解が得ることができる。ただし、これは Palais-Smale 条件が一般には成立しないため、次の評価を必要とする。

補題 1.

$P_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ 立体射影

$\omega := TP_0\left(\frac{\cdot - a}{\varepsilon}\right) \quad \varepsilon > 0, a \in B, T \in SO(3)$

$v := \omega + \varphi \in H_0^1(B; \mathbb{R}^3)$

$\delta = \|\nabla \varphi\|_{L^2(B)}$ とすると、次の評価が十分小さい ε, δ

に対して成立する。

$$(i) \frac{\int |\nabla v|^2}{\left| \int v \cdot v_x \wedge v_y \right|^{\frac{2}{3}}} \leq S + C_1(\varepsilon + \delta)^2$$

$$(ii) \left| \frac{4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y}{\left| \int v \cdot v_x \wedge v_y \right|^{\frac{2}{3}}} + SH(u_x(a) \cdot T e_1 + u_y(a) \cdot T e_2) \varepsilon \right|$$

$$\leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} (\varepsilon + \delta) H$$

$$\text{ここで } S := \inf_{v \in H_0^1} \frac{\int |\nabla v|^2}{\left| \int v \cdot v_x \wedge v_y \right|^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{32\pi}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x P_0(0) / |\partial_x P_0(0)| \\ \partial_y P_0(0) / |\partial_y P_0(0)| \end{pmatrix}$$

である。

また C_1 は $|a| \leq d < 1$ なる d によって一様に定まり、

C_2 は d と $\|\partial\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B)}$ のみに依存する。

$$J_H := \inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ \int v \cdot v_x \wedge v_y = 1}} \left\{ \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y \right\}$$

とすると、 $J_H < S$ の時、minimizing sequence の収束がわかる。

補題 1 より ∂ が constant ならば、 T, a を適当にとりやる

ことによって $J_H < S$ がわかる。minimizer v^0 をとって

$$\bar{u} = \underline{u} - \frac{J_H}{2H} v^0 \text{ とすると、} \bar{u} \text{ は (i) のもう 1 つの解である}$$

この解は "large solution" と呼ばれている。"large solution" の存在証明は、Brezis-Coron と Struwe によってほぼ同時になされた。

さらに、Brezis-Coron は $H \downarrow 0$ のときの解の挙動について研究した。次の定理は、彼らの研究を "large solution" に適用したものである。

定理 1.

$$H_n > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} \underline{u}^n = \text{small solution of (1) for } H_n \\ \bar{u}^n = \text{large solution} \end{cases} \quad \text{とする。}$$

このとき $v^n = H_n(\bar{u}^n - \underline{u}^n)$ とすると、 $T \in SO(B)$, $\{a_n\} \subset B$, $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ を適当にとって

$$(A) \quad \left\| v^n - TP_0\left(\frac{c - a_n}{\varepsilon_n}\right) \right\|_{H_1} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

とすることができる。

この定理は、 $H \downarrow 0$ のとき "large solution" がある意味で一点爆発することを示している。"large solution" は一意的ではなく、 H -system の解の枝の構造と、与えられた境界値 γ との関係は明らかにされていない。爆発点による解の枝の分類は、 $H = 0$ の近傍での解の構造をとらえるために重要な役割を果たす。次に示めす主結果は、"large solution" の爆発点を境界値 γ によって定まる B 上の関数で特徴づけられることを示す。

2. 主結果

$h^\sharp$ を境界値 σ を持つ調和函数とし、 $K: B \rightarrow \mathbb{R}^+$ を

$$(5) \quad K(z) := (1-z^2) \{ |\nabla h^\sharp(z)|^2 + 2|h_x^\sharp(z) \wedge h_y^\sharp(z)| \}^{1/2}$$

で定める。このとき "large solution" の爆発点は K の最大点である。

証明の方針: "large solution" の構成法から定理1の v^m は

$$(6) \quad \begin{aligned} R_m(v) &:= d^2 E_H(u)(v, v) \\ &= \int |\nabla v|^2 + 4H_m \int u^m \cdot v_x \wedge v_y \end{aligned}$$

の $\{v \in H_0^1; \int v \cdot v_x \wedge v_y = 1\}$ における minimizer の定数倍である。もし(4)において収束の速さが ε_m でおさえられれば、補題1の評価から爆発点の特徴づけが得られる。

補題2.

$(T_m, a_m, \varepsilon_m) \in SO(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ を $\|\nabla(v^m - T_m P_0(\frac{\cdot - a_m}{\varepsilon_m}))\|_{L^2}$
 $= \inf_{(T, a, \varepsilon) \in SO(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+} \|\nabla(v^m - T P_0(\frac{\cdot - a}{\varepsilon}))\|_{L^2}$ となるようにとる。このとき、

ある定数 $C > 0$ が存在して $\|\nabla(v^m - T_m P_0(\frac{\cdot - a_m}{\varepsilon_m}))\|_{L^2} \leq C \varepsilon_m$ 。

補題2 から次のように主結果が得られる。

$\tilde{\alpha} \in B$, $T \in SO(3)$ を任意にとり $\tilde{v}^m = T v^m \circ \tau$ と定める。ただし τ は $\tau(\hat{\alpha}) = a_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$ となる B から B の上への一次分枝変換。このとき、 $\int |\nabla \tilde{v}^m|^2 = \int |\nabla v^m|^2$, $\int \tilde{v}^m \cdot \tilde{v}_x^m \wedge \tilde{v}_y^m = \int v^m \cdot v_x^m \wedge v_y^m$ であることに注意する。また、 $(\tilde{T}_m, \tilde{a}_m, \tilde{\varepsilon}_m)$ を $(T_m, a_m, \varepsilon_m)$ と同様に定めると、明らかに $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{a}_m = \tilde{\alpha}$ であり、 $w = \tau(z)$ に対して

$$\frac{dw}{1-|w|^2} = \frac{dz}{1-|z|^2}$$

が成立することから、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{\varepsilon_m} = \frac{1-|\tilde{\alpha}|^2}{1-|a_\infty|^2}$ である。このとき

$$J_m := \frac{\int |\nabla v^m|^2 + 4H_m \int \underline{u}^m \cdot v_x^m \wedge v_y^m}{|\int v^m \cdot v_x^m \wedge v_y^m|^{\frac{2}{3}}}$$

$$\tilde{J}_m := \frac{\int |\nabla \tilde{v}^m|^2 + 4H_m \int \underline{u}^m \cdot \tilde{v}_x^m \wedge \tilde{v}_y^m}{|\int \tilde{v}^m \cdot \tilde{v}_x^m \wedge \tilde{v}_y^m|^{\frac{2}{3}}}$$

とすると補題1から、

$$\begin{aligned} \tilde{J}_m - J_m &= \frac{4H_m}{|\int v^m \cdot v_x^m \wedge v_y^m|^{\frac{2}{3}}} \left\{ \int \underline{u}^m \cdot \tilde{v}_x^m \wedge \tilde{v}_y^m - \int \underline{u}^m \cdot v_x^m \wedge v_y^m \right\} \\ &= 5H_m \{ (\underline{u}_x^m(a_m) \cdot T_m e_1 + \underline{u}_y^m(a_m) \cdot T_m e_2) \varepsilon_m \\ &\quad - (\underline{u}_x^m(\tilde{a}_m) \cdot \tilde{T}_m e_1 + \underline{u}_y^m(\tilde{a}_m) \cdot \tilde{T}_m e_2) \tilde{\varepsilon}_m \} + o(\varepsilon_m / h_m) \end{aligned}$$

$$\nabla u^n(a_n) = \nabla h^r(a_\infty) + o(1), \quad \nabla u(\tilde{a}_n) = \nabla h^r(\tilde{a}) + o(1) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n - J_n &= SH_n \{ (h_x^r(a_\infty) \cdot T_0 e_1 + h_y^r(a_\infty) \cdot T_0 e_2) \varepsilon_n \\ &\quad - (h_x^r(\tilde{a}) \cdot \tilde{T} e_1 + h_y^r(\tilde{a}) \cdot \tilde{T} e_2) \frac{1 - |\tilde{a}|^2}{1 - |a_\infty|^2} \varepsilon_n \} + o(\varepsilon_n H_n) \end{aligned}$$

$$\text{そこで } \hat{J}_n \geq J_n \text{ と}$$

$$\begin{aligned} \max_{T \in S^3} (h_x^r(z) \cdot T e_1 + h_y^r(z) \cdot T e_2) \\ = \{ |h^r(z)|^2 + 2 |h_x^r(z) \wedge h_y^r(z)| \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} (7) \quad (1 - |a_\infty|^2) \{ |\nabla h^r(a_\infty)|^2 + 2 |h_x^r(a_\infty) \wedge h_y^r(a_\infty)| \}^{\frac{1}{2}} \\ \geq (1 - |\tilde{a}|^2) \{ |\nabla h^r(\tilde{a})|^2 + 2 |h_x^r(\tilde{a}) \wedge h_y^r(\tilde{a})| \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を得る。 $\tilde{a} \in B$ 任意より、 a_∞ は K の最大点である。

注意：上の証明においては、記述を簡単にするために、 a_∞ が境界上の点でないことを仮定している。しかし、一次分枝変換で引き戻すことにより、 a_∞ が境界上にあるとしてもこの結果は成立する。

最後に、このような爆発点の特徴づけが有効であることを理解するために、次の定理を結果だけ紹介しておく。

定理2.

$\mathcal{M} = \{ z \in B; K \text{ の極大点} \}$ とすると、

M の各連結成分にたいし、その上に爆発点をもつ解の枝が存在する。

参考文献

1. H. Brezis, J. M. Coron, Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture, Comm. Pure Appl. Math. vol. 37 (1984)
2. ———, Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 89 (1985)
3. M. Giaquinta, "Multiple integrals in the calculus of variations and elliptic systems", Princeton Univ. Press (1983)
4. S. Hildebrandt, On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Comm. Pure Appl. Math. vol. 23 (1970)
5. M. Struwe, Large H-surfaces via the mountain-pass-lemma, Math. Ann. vol. 270 (1985)
6. ——— Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 93 (1986)
7. H. Wente, An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, J. Math. Anal. Appl. vol. 26 (1969)