

ヒルベルト空間の部分空間の配置 と部分因子環の配置

九州大学 綿谷安男 (Watatani, Yasuo)

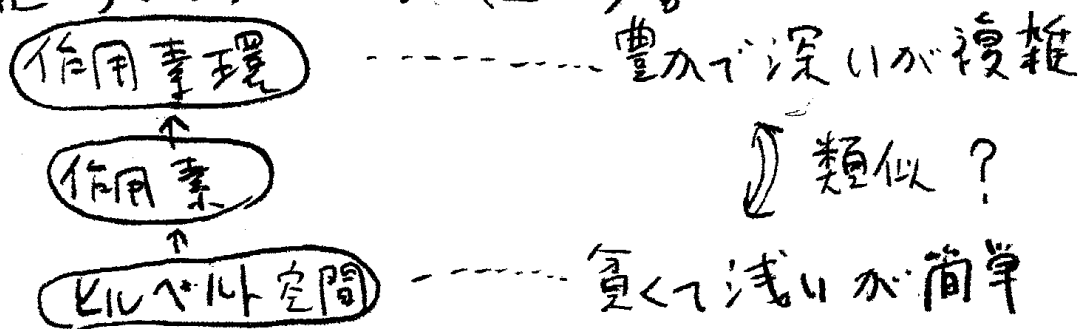
Kyushu University

甲子園大学 榎本雅俊 (Enomoto, Masatoshi)

Koshien University

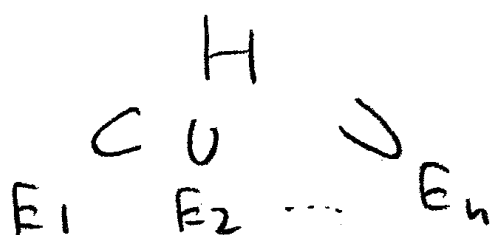
①はじめに

ヒルベルト空間の話は基本的ではあるが「もうやることなんかない」と思われているであろう。しかし不思議なことだが、ヒルベルト空間の上に構築される作用素のそのまた上の族を集めてつくられる作用素環の構造と土台のヒルベルト空間の構造に類似が存在するのである (EW)。

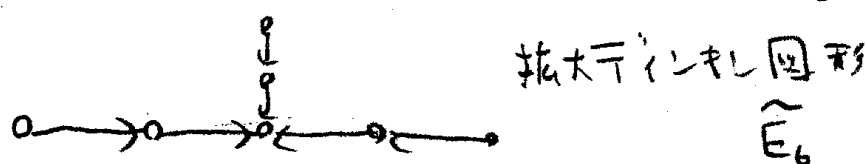


① 部分空間の配置と部分因子環の配置

Ⅱ型因子環 M の部分因子環 $N \subset M$ の指数理論 [丁] は大きい対象 M の中に包含される小さい対象 N の相対位置関係が豊かな構造をもっていることを示した。同じことを因子環の代わりにヒルベルト空間にとりかえて考えてみよう。大きいヒルベルト空間 H に含まれる 1 の部分空間 $E \subset H$ の包含関係は自明である。それは数値不変量 $(\dim E, \text{codim } E)$ で完全に決まる。そこで H における H の部分空間の相対的位置関係を調べよう。

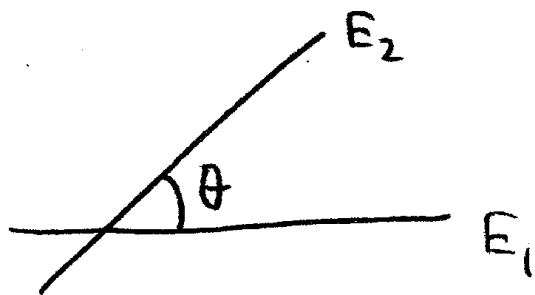


それだけでなく、「有向グラフ」に沿った「部分空間の配置」も考えよう。例えば「 $\rightarrow$ 」と「 $\subset$ 」と解釈して、



② 角度

2つの部分空間 $E_1, E_2 \subset H$ の配置は本質的にその間の角度で表される。



もっと正確には H の5つの部分空間への分解があって、 E_1 への射影 e_1 が次のように表わされる。

$$H = (E_1 \cap E_2) \oplus (\text{残り}) \oplus (E_1 \cap E_2^\perp) \oplus (E_1^\perp \cap E_2) \oplus (E_1^\perp \cap E_2^\perp)$$

$$e_1 = I \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus I \oplus 0 \oplus 0$$

$$e_2 = I \oplus \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix} \oplus 0 \oplus I \oplus 0$$

ここである正作用素 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ があって

$c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ とかける。

これを見ると3つ以上の場合はこれらが互いに混じりあって手に負えないように見える。部分因子環との類似で解析できないかを試みる。

③ 直既約 (Indecomposable)

一般の群を考へるかわりに単純群を考へたように、一般の配置を考へるかわりに、これ以上2つの直和に分けられない直既約な配置を考へよう。

Def n ベクトル空間 H の n 個の部分空間 $E_1, \dots, E_n$ の系を $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ とかく。この時 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ の直和は

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' \stackrel{\text{def}}{=} (H \oplus H'; E_1 \oplus E'_1, \dots, E_n \oplus E'_n)$$

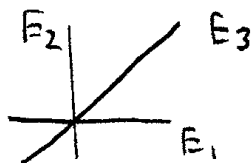
で定める。

Def $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n) = 0$ とは $H=0$ のこと。

Def $\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, \dots, E_n)$ が 直既約 (indecomposable)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{S} = \mathcal{S}' \oplus \mathcal{S}'' \Rightarrow \mathcal{S}' = 0 \text{ 或 } \mathcal{S}'' = 0$$

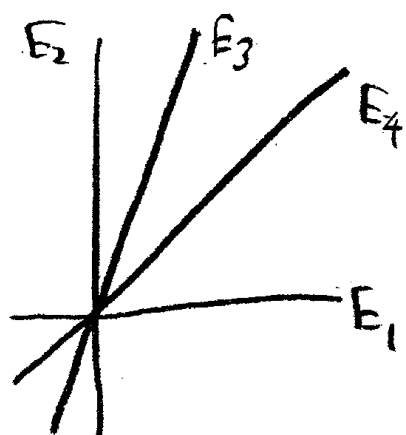
例 $H = \mathbb{C}^2$ $E_1 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_3 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ は直既約

④ 作用素論との関係

ヒルベルト空間 K 上の有界線型作用素 $T \in B(K)$ に対する 4つの部分空間の系 $\mathcal{J}_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ を次のように決めた。



$$H = K \oplus K$$

$$E_1 = K \oplus 0$$

$$E_2 = 0 \oplus K$$

$$E_3 = \text{graph } T = \{ (n, Tn) \in H \mid n \in K \}$$

$$E_4 = \{ (n, x) \in H \mid x \in K \}$$

H が有限次元の時

$\mathcal{J}_T$: 直既約 $\Leftrightarrow T$ が Jordan 因子

$\mathcal{J}_T \subseteq \mathcal{J}_S \Leftrightarrow T$ と S は similar
 この意味で 作用素論のある部分は 4つの部分空間の配置の研究に含まれる。

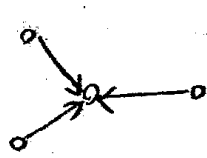
例) $K = \ell^2(\mathbb{N})$

$T \in B(K)$ を unilateral shift とする。

T に対する $\mathcal{J}_T = (H; E_1, E_2, E_3, E_4)$ は直既約である。

5 有向グラフに沿った配置

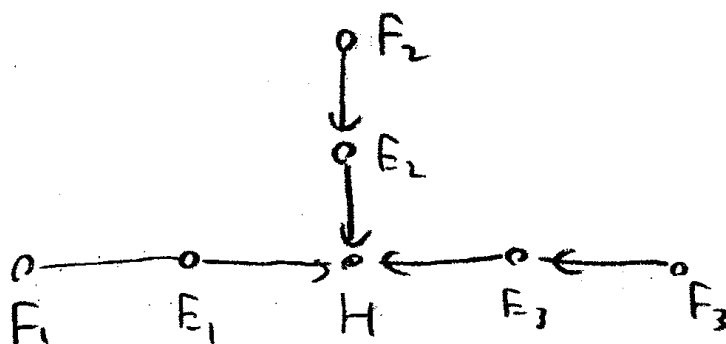
(例) ディンキン図形 D_4 (に向きを入れた) 有向グラフ

である  は, 3つの部分空間 $\begin{matrix} & H \\ \subset & \cup \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{matrix}$ の

包含関係で「 $\subset$ 」を「 $\rightarrow$ 」でおきかえてきたと

思える。これと同様に有向グラフに沿った配置を考える。

(例) 拡大ディンキン図形 $\widehat{E}_6$ に次のように向きを入れる



これを次のようにグラフに沿った部分空間の配置

$$\begin{matrix} F_2 \\ \cap \\ E_2 \\ \cap \\ H \end{matrix}$$

$$F_1 \subset E_1 \subset H \supset E_3 \supset F_3$$

とみよ。 $K = \mathbb{C}^2(\mathbb{N})$. $H = K \oplus K \oplus K$ とおく

$$E_1 = K \oplus K \oplus 0 \supset F_1 = 0 \oplus K \oplus 0$$

$$E_2 = K \oplus 0 \oplus K \supset F_2 = 0 \oplus 0 \oplus K$$

$$E_3 = \{(x+y, x+sy, x) \in H \mid x, y \in \mathbb{C}\} \supset F_3 = \{(x, x, x) \in H \mid x \in \mathbb{C}\}$$

S は unidirectional shift とすると, これは $\widehat{E}_6$ 的になる。

⑥ 作用素環と作用素とヒルベルト空間の比較

	作用素環	作用素	ヒルベルト空間
対象	部分因子環 NCMの配置	1つの operator $T: K \rightarrow K$	ヒルベルト空間Hの Hの部分空間の系 $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$
同じ	$(N_1 C M_1) \overset{\text{共役}}{\cong} (N_2 C M_2)$ $\Leftrightarrow \exists \varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 同型 $\varphi(N_1) = N_2$	similar $T_1 \cong T_2$ $\Leftrightarrow \exists S \text{ invertible}$ $T_2 = S T_1 S^{-1}$	同配置 $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$ $\Leftrightarrow \exists \varphi: H \rightarrow H'$ 同型 $\varphi(E_i) = E'_i$
数値不変量	Jones 指数 [M:N] $\{4\omega^{\pm \frac{1}{n}}\} \cup [4, \infty)$	スカラー $\sigma(T)$ コンパクト $\subset \mathbb{C}$	不足指数 (defect) $\rho(\mathcal{S})$ 有限次元 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 無限次元 $\frac{2}{3}$
既約	$N' \cap M = \mathbb{C}$	直和に分かれる	直既約 (2つの直和に分かれず)
分類	[M:N] < 4 の時の AFDI型因子環の 完全分類 principal graph para group	有限次元の時 Jordan 因子 が既約なEの。 - 似たものの 有限2つの直和 に分けず (Jordan 標準形)	有限次元の時 ([GPP]) Gelfand-Ponomarev 直既約な配置 完全分類の リストが与えられた。

	作用素環	作用素論	ヒルベルト空間
方法	双加群準同型 $\text{End}_{N-M}(L^2(M))$ を調べる	T の可逆子環 $\{T\}'$ を調べる	部分空間を保存する $\text{End}(S)$ $= \{T \in \text{End } H \mid T e_i \in e_i\}$ を調べる
新しいものの構成	Jones の basic construction $N \subset M$ $\Rightarrow M \subset \langle M, e_N \rangle$	T に対する T^*	吸いこみ反転関手 と湧き出し反転関手 Φ_+ と Φ_-
双対性	G : 有限群 $\lambda: G \rightarrow \text{Aut } N$ は outer $N = M^G \subset M$ $\Rightarrow \langle M, e_N \rangle \cong M \rtimes G$ G : 可換群ならば特に $\langle \langle M, e_N \rangle, e_M \rangle$ $\cong (M \rtimes G) \rtimes \hat{G}$	$T^{**} = T$	吸いこみで 充滿 $\Rightarrow \Phi_- \Phi_+(S) \cong S$ 湧き出しで 充滿 $\Rightarrow \Phi_+ \Phi_-(S) \cong S$
ディンキン図形	Jones index, $[M:N] < 4$ $\Rightarrow N \subset M$ の principal graph は ディンキン図形 A_n, D_n, E_6, E_8	?	無向グラフ Γ のどの 向き付けに対しても 無限次元の直既約表現 が存在する $\Rightarrow \Gamma$ は ディンキン図形 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8

«References»

[EW] M. Enomoto and Y. Watatani, Relative position of four subspaces in a Hilbert space, to appear in *Advances in Mathematics*.

[GP] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space, *Coll. Math. Spc. Bolyai 5, Tihany (1970)*, 163-237.

[J], V. Jones, Index for subfactors, *Inv. Math.* 72 (1983), 1-25.