

低いレベルの同時計算量について

電気通信大学 関口正裕 (Masahiro Sekiguchi)

I. はじめに

本稿では、時間と領域が同時に限定されたチューリング機械によって受理される言語のクラスについて研究する。興味の対象は、決定性の多項式時間と対数多項式領域で同時に受理されるクラス (SC と呼ばれることがある) や、対応する非決定性のクラスが中心である。この種のクラスは実際の計算可能性の立場などからも重要であるが、あまり多くは知られていない。

$P \neq NP$ 予想を持ち出すまでもなく、決定性と非決定性の計算の能力の比較は重要な問題である。最近になって Pauls [3] や筆者 [5] が計算資源を同じくする計算で、決定性と非決定性のチューリング機械に能力の差があることを示した。しかし、どちらもある意味で特別な場合を扱っており、一般的な場合に成立する定理は得られていない。

Kanann [2] は, より広い場面での分離を目指して関連した結果を示している。そこでは有限回のオルタネーションを行なうチューリング機械と, 時間と領域を同時に限定した決定性チューリング機械が基本的な道具として用いられる。本稿では, 時間と領域が同時に限定された有限回のオルタネーションを行なうチューリング機械を用いて, 同時計算量のクラスに関する結果を示す。結果は, Kanann による定理を改良するものなどを含む。

本稿の主な結果は次のようなものである。

$$NTISP(\text{poly}, \text{polylog}) \subset \bigcup_i \Sigma_i TISP(n, n^\varepsilon)$$

$$DTISP(n^a, \log^i n) \not\subseteq NTISP(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

ここで ε は正の, a, i は 1 より大きい任意の数である。

II. 定義と記法

計算モデルはオルタネイティングオフライン多テープチューリング機械である。これを単に TM と書く。初期状態が存在的なものを σ TM, 全称的なものを π TM と呼ぶ。本稿で扱う TM は有限回のオルタネーションを行なうものである。オルタネーションが高々 $i-1$ 回しか起きないような σ TM, 又は π TM をそれぞれ σ_i TM, π_i TM と言う。つまり全ての状態が存在的な TM は σ_1 TM である。 σ_1 TM を特に非決定性 TM と呼ぶ。

TM があって、どの様相もそれに続く様相への遷移が一意的ならば決定性であると言う。便宜上、決定性TMを Σ_0 TM とか Π_0 TM で表わす。

作業用テープが本のものである テープTM と言う。

T と S は自然数上の関数とする。あるTMが T 時間 S 領域 限定であるとは、長さ n の任意の入力に対する全ての計算が $T(n)$ ステップ以内に停止し、かつ $S(n)$ 個を越えるテープセルを使用しないことである。 T 時間 S 領域限定TMのことを、 $\text{tisp}(T, S)$ TM と書く。

T と S に対して言語のクラスを次のように定める。

$$\Sigma_i \text{TISP}_R(T, S) = \{L \mid L \text{ を受理する } R\text{-テープの } \text{tisp}(O(T), O(S)) \text{ TM が存在する。}\}$$

$$\Sigma_i \text{TISP}(T, S) = \bigcup_R \Sigma_i \text{TISP}_R(T, S)$$

$\Pi_i \text{TISP}_R, \Pi_i \text{TISP}$ も同様とする。ここでクラスを定義するTMが $\text{tisp}(O(T), O(S))$ として、定数倍を含んでいることに注意。これは本稿の条件では線型加速定理が知られていないためである。 $\Sigma_1 \text{TISP}, \Sigma_0 \text{TISP}$ を特に $\text{NTISP}, \text{DTISP}$ と書く。関数の位置に関数の集合が書かれた場合には例えば、

$$\text{DTISP}(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}} \text{DTISP}(T, S)$$

を表わすものとする。関数の集合として、

$$\text{poly} = \{n^k \mid k \geq 1\}$$

$$\text{polylog} = \{ \log^l n \mid l \geq 1 \}$$

と定める。

ある関数 f が構成可能であるとは、 x の 2 進数表示を入力として、適当な作業テープ上に $f(x)$ の 2 進数表示を書き出して止まる $\sigma_{\text{tisp}}(n^k, n)$ TM が存在することである。入力 x の長さ n は $O(\log x)$ であるから、 x から見ると $O(x)$ 時間 $O(\log x)$ 領域で $f(x)$ が求まる。この条件は通常使われるものよりも強い。しかし本稿では多項式より大きな関数は必要ないので、たいていの場合にこれで十分である。

以下では特にことわらない限り全ての関数は単調非減少であるとし、時間 (は $T(n) \geq n$, 領域は $S(n) \geq \log n$ と仮定する。

Ⅲ. オルタネーションによる高速化

補題 1 任意の構成可能な T, S, f と、任意の整数 $k \geq 1$, $l \geq 0$ が $S \cdot f = O(T/f^l)$ を満たすとき次が成立する。

$$\text{NTISP}_k(T, S) \subset \sum_{2l+1} \text{TISP}_{k+1}(T/f^l, S \cdot f)$$

証明 $L \in \text{NTISP}_k(T, S)$ と仮定する。ある定数 t, Δ と、 L を受理する k ラープ $\sigma_{\text{tisp}}(t \cdot T, \Delta \cdot S)$ TM M が存在する。これをもとにして、 L を受理する $k+1$ ラープ $\sigma_{2l+1} \text{tisp}(O(T/f^l), O(S \cdot f))$ TM M' を次のように構成する。

まず、 $l+1$ 個の TM $N_0, N_1, \dots, N_l$ を構成する。 N_0 は M をシミュレートする部分を含み、 N_i は N_{i-1} をシミュレートする部

分を含む。各 N_i ($0 \leq i \leq l$) は次を満たすように構成する。ただし以下で様相は、 M の k 本の作業テープの内容と全てのヘッドの位置、及び有限制御部の状態を $\Theta(S)$ の文字列で表わしたもので、全て同じ長さとする。

<1> N_i は $k+1$ テープ α_{i+1} TM である。

<2> N_i は入力テープに M に対する入力 α を、第1作業テープに M の2つの様相 α と β を受け取って動作する。

<3> N_i は M の入力が α で、 M が高々 $t \cdot T(|\alpha|) / f^{l-i}(|\alpha|)$ ステップで様相 α から様相 β へ遷移可能なとき、そのときに限って受理状態に入る。

各 N_i は実際には次のように構成する。

N_0 は次のように構成する。

(1) N_0 は $t \cdot T(|\alpha|) / f^l(|\alpha|)$ を構成して第1作業テープの余白に書き出す。構成可能性の仮定より、この段は $\Theta(|\alpha|)$ 時間 $\Theta(\log |\alpha|)$ 領域で可能である。

(2) N_0 は第2作業テープ以後の k 本の作業テープに様相 α の表わす内容を再現し、その後第1テープ上でステップ数を算えながら M を $t \cdot T(|\alpha|) / f^l(|\alpha|)$ ステップ間シミュレートする。この段は M の取り方より $\Theta(S)$ 領域で可能である。

(3) N_0 は様相 β と実際のシミュレート後の作業テープの内容を比較し、そいらが同じであるとき、そのときのみ受理す

る。この段に必要な時間と領域は十分小さく無視できる。 N_0 は全体では、 $O(T(|x|)/f^l(|x|))$ 時間 $O(S(|x|))$ 領域で停止する。

N_i ($1 \leq i \leq l$) は、 N_{i-1} を用いて次のように構成する。

- (1) N_i は、まず $f(|x|)$ を構成する。以下 $u = f(|x|)$ とする。
- (2) N_i は M の様相を存在的に $u-1$ 個予想して第 u テープ上に順に書き出す。これを $\gamma_1, \dots, \gamma_{u-1}$ とする。また $\gamma_0 = \alpha, \gamma_u = \beta$ としておく。各様相は長さ $O(S(|x|))$ であるから、この段は時間領域とも $O(f(|x|) \cdot S(|x|))$ で可能である。
- (3) N_i は $0 \leq v \leq u-1$ なる v を全称的に 1 つ選択する。
- (4) N_i は第 1 作業テープ上に γ_v と γ_{v+1} を書き移し、他を全て消す。その後 γ_v を α, γ_{v+1} を β として N_{i-1} をシミュレートする。

$N_0, N_1, \dots, N_l$ の構成で先に示した条件 $\langle 1 \rangle \sim \langle 3 \rangle$ が満たされることは、 i に関する帰納法より明らかである。また、各 N_i がみな $O(T(|x|)/f^l(|x|))$ 時間 $O(S(|x|) \cdot f(|x|))$ 領域で停止することも、 i に関する帰納法で容易に示される。

N_l を用いて、 M' は次のように構成する。

- (1) M' は入力 x に対して $\alpha \cdot S(|x|)$ を構成し、 M の様相を存在的に u 個予想する。これを α, β とする。
- (2) M' は、 α が M の初期様相、 β が M の受理様相であること

を確認した後, α, β に対して N_ℓ をシミュレートする。

N_ℓ の性質から, M' が必要な条件を満たすことは明らかである。

証明終

系2 補題と同じ条件の下で次が成立する。

$$\text{DTISP}_P(T, S) \subset \Sigma_{2\ell} \text{TISP}_{P+1}(T/f^\ell, S \cdot f)$$

証明 補題と同様の構成を行なうが, M が α TM になるので N_0 は α TM でよい。よって N_i は α_i TM になる。 証明終

補題1から次の定理が得られる。これは Kanann [2] の定理3を改良するものである。

定理3 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次が成立する。

$$\text{NTISP}(\text{poly}, \text{polylog}) \subset \bigcup_{i \geq 1} \Sigma_i \text{TISP}(n, n^\varepsilon)$$

証明 $m > 1/\varepsilon$ を満たすような m を取る。自然数 k について, $T(n) = n^k, S(n) = \log^k n, f(n) = n^{1/m}, \ell = m \cdot k$ と置いて補題1を用いる。すると

$$\begin{aligned} & \text{NTISP}_P(n^k, \log^k n) \\ & \subset \Sigma_{2\ell+1} \text{TISP}_{P+1}(n, n^{1/m} \cdot \log^k n) \\ & \subset \bigcup_i \Sigma_i \text{TISP}_{P+1}(n, n^\varepsilon) \quad (\because n^{1/m} \cdot \log^k n = O(n^\varepsilon)) \end{aligned}$$

となる。両辺を, 全ての k について和集合を取れば定理が得られる。

証明終

包含の右辺を対数多項式に保てば次の形を得る。

定理4 任意の $l \geq 0$ について次が成立する。

$$\Sigma_1 \text{TISP}(T, \text{polylog}) \subset \Sigma_3 \text{TISP}(T/\log^l, \text{polylog})$$

$$\Sigma_0 \text{TISP}(T, \text{polylog}) \subset \Sigma_2 \text{TISP}(T/\log^l, \text{polylog})$$

ただし T は任意の構成可能関数である。

証明 $S(n) = \log^i n$, $f(n) = \log n$, $l=1$ として補題1及び系
を用い、後に全ての l について両辺の和集合を作れば定理
が得られる。 証明終

IV. ワラス間の分離

前半では「含む」という形の命題を考えた。後半では、
「真に含む」という形の命題を示す。まず補題を1つ示す。
これはオルタネーションの回数を「引き移す」ものである。

補題5 ある構成可能で $S = o(n)$ なる T, S と, $i > j \geq 0$ なる i, j について、もし

$$\Sigma_i \text{TISP}(T, S) = \Sigma_j \text{TISP}(T, S)$$

であれば、任意の $l \geq j$ について

$$\Sigma_l \text{TISP}(T, S) = \Sigma_j \text{TISP}(T, S)$$

証明 $\Sigma_j \text{TISP}(T, S) \subset \Sigma_l \text{TISP}(T, S)$ は $l \geq j$ より明らかである。そこで $\Sigma_l \text{TISP}(T, S) \subset \Sigma_j \text{TISP}(T, S)$ であることを
PaulとReischuk[4]の補題1と類似の、 l に関する帰納法で示す。

$l=j$ では明らか。

$l > j$ を考える。 $L \in \Sigma_l \text{TISP}(T, S)$ だとする。 L を受理する

$\alpha_2 \text{tisp}(t_1 \cdot T, \alpha_1 \cdot S) \text{TM } M_1$ が存在する。 M_1 を次のように修正して M_2 とする。 M_2 は初めてのオルタネーションを行なうときに以下が成立するようにする。

- <1> 全てのヘッドは各テープの左端にある。
- <2> 第1作業テープをのぞき、他の全ての作業テープはみな空白である。

M_2 は M_1 と同じく L を受理する $\alpha_2 \text{tisp}(t_2 \cdot T, \alpha_2 \cdot S) \text{TM}$ である。

このような M_2 は次のように構成することができる。初めは M_1 をシミュレートし、初めてのオルタネーションを行なう段になると、各作業テープ上のヘッド位置に印を付け、全ての作業テープの内容を第1作業テープ上に転送し、入力ヘッドの位置を第1作業テープ上に2進数で記録する。次に M_2 はオルタネーションを行なう。そして各テープの内容とヘッドの位置をもとにもどした後で、 M_1 のシミュレーションを再開する。

M_2 の動作を、初めてのオルタネーションで2つに分けて、次のように考えることができる。前半は入力 α を長さ高々 $\alpha_1 \cdot S(|\alpha|)$ の列に存在的に写像する $\alpha_1 \text{TM}$ 、後半は入力 α と、前半が書き出した列 y との対を受理する $\alpha_2 \text{TM}$ である。

次のような言語 L' を考える。

$$L' = \{ \alpha \# y \mid |y| \leq \alpha_2 \cdot S(|\alpha|), M_2 \text{ の最初のオルタネーション} \}$$

ンの際に入力が α , 第1テープが y であれば
 M_2 は α を受理する。}

ここで $\#$ は新しい文字である。 L は M_2 の後半を用いて受理できるので $\Pi_{\ell-1}\text{TISP}(T, S)$ の元である。よって

$$\begin{aligned} L &\in \Pi_{\ell-1}\text{TISP}(T, S) \\ \Rightarrow \bar{L} &\in \Sigma_{\ell-1}\text{TISP}(T, S) \\ \Rightarrow \bar{L} &\in \Sigma_j\text{TISP}(T, S) \quad (\text{帰納法の仮定より}) \\ \Rightarrow L &\in \Pi_j\text{TISP}(T, S) \end{aligned}$$

となつて L を受理する $\pi_j\text{tisp}(t_3 \cdot T, \alpha_3 \cdot S)$ TM M_3 が存在する。

M_3 を用いて, L を受理する $\sigma_{j+1}\text{tisp}(t_4 \cdot T, \alpha_4 \cdot S)$ TM M_4 を構成する。 M_4 は初めは M_2 の前半の動作をシミュレートする。 M_2 がオルタネーションを行なつて後半に入る段になると, M_4 は以後は M_3 のシミュレーションを行なう。このとき M_4 への入力を α , そのまでの M_2 の第1作業テープの内容を y としたときに, M_3 への入力は $\alpha\#y$ であるとしてシミュレートする。シミュレートのを速度を落とさないように, M_4 は M_3 よりも1本多いテープを持ち, そこに y を置くようにする。

以上から $L \in \Sigma_{j+1}\text{TISP}(T, S)$ となり

$$\Sigma_{\ell}\text{TISP}(T, S) \subset \Sigma_{j+1}\text{TISP}(T, S)$$

を得る。 $i \geq j+1$ であるから補題の仮定より

$$\Sigma_i \text{TISP}(T, S) \subset \Sigma_j \text{TISP}(T, S)$$

となる。

証明終

次の補題は我々のモデルでの標準的な階層定理である。

補題6 T_1, T_2, S_1, S_2 が皆構成可能であって,

$$T_1 \cdot \log T_1 = o(T_2), S_1 = o(S_2), S_1 = O(T_1), S_2 = O(T_2) \text{ ならば,}$$

任意の i について次が成立する。

$$\Sigma_i \text{TISP}(T_1, S_1) \subsetneq \Sigma_{i+1} \text{TISP}(T_2, S_2)$$

略証 BrussとMeyer[1]の定理1, Paul[3]の補題4.1

と同様に容易に証明可能である。

証明終

以上と補題1を用いて次の定理を得る。

定理7 任意の $\alpha > 1, i \geq 1, \varepsilon > 0$ について次が成立する。

$$\text{DTISP}(n^\alpha, \log^i n) \subsetneq \text{NTISP}(n^\alpha, \log^{i+\varepsilon} n)$$

$$\text{NTISP}(n^\alpha, \log^i n) \subsetneq \Sigma_2 \text{TISP}(n^\alpha, \log^{i+\varepsilon} n)$$

証明 ここでは前者だけを証明する。後者も同様に証明できる。

まず, $0 < 1/r < \varepsilon$ なる自然数 r を適当に選んで固定する。

$$T(n) = n^\alpha, S(n) = \log^i n, f(n) = \log^{1/r} n, l = r+1 \text{ として系2を用い,}$$

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^\alpha, \log^i) \subset \Sigma_{2r+2} \text{TISP}(n^\alpha / \log^{1+1/r} n, \log^{i+1/r})$$

を得, $(n^\alpha / \log^{1+1/r} n) \cdot \log(n^\alpha / \log^{1+1/r} n) = o(n^\alpha)$ なので補題6

によって,

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^a, \log^i n) \subsetneq \Sigma_{2r+3} \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \quad \langle 1 \rangle$$

を得る。ここで定理の逆, つまり

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^a, \log^i n) = \Sigma_1 \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \quad \langle 2 \rangle$$

を仮定して矛盾を導く。〈2〉から明らかに

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) = \Sigma_1 \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \quad \langle 3 \rangle$$

となるので, これに補題5を用いると

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) = \Sigma_{2r+3} \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

が得られる。これに〈3〉, 〈2〉を順に使って

$$\Sigma_0 \text{TISP}(n^a, \log^i n) = \Sigma_{2r+3} \text{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

が得られ〈1〉と矛盾する。よって定理は成立する。証明終

参考文献

- [1] A.R.Bruss and A.R.Meyer: 'On time-space classes and thier relation to the theory of real addition,' Theoret. Comp. Sci., 11, 59-69, 1980
- [2] R.Kanann: 'Towards separating nondeterminism from determinism,' Math. Syst. Theory, 17, 29-45, 1984
- [3] W.J.Paul, N.Pippenger, E.Szemerédi and W.T.Trotter: 'On determinism versus non-determinism and related problems,' Proc. 24th IEEE FOCS, 429-438, 1983
- [4] W.Paul and R.Reischuk: 'On alternation II,' Acta Inform., 14, 391-403, 1980
- [5] 関口正裕: '低いレベルの同時計算量について,' 信学技報, AL-84-8, 1984