

旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系

野原 雄一

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

概要

トーリック多様体に対しては単項式、運動量写像の二通りの方法で運動量多面体が現れることが知られているが、A 型の旗多様体の場合も Gelfand-Cetlin 多面体と呼ばれる凸多面体との間にこれらとよく似た関係がある。ここで単項式の対応物が Gelfand-Cetlin 基底と呼ばれるユニタリ群の既約表現の基底であり、運動量写像に対応しているのが Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる完全可積分系である。さらに旗多様体はこの多面体から定まるトーリック多様体に退化することも知られている。Kogan-Miller はこの退化の下で Gelfand-Cetlin 基底がトーリック多様体上の単項式に変形できることを示した。ここでは Gelfand-Cetlin 系がトーリック多様体の運動量写像に変形できることについて述べる。

1 序

$(X, \mathcal{L})$ を複素数体上定義された N 次元偏極トーリック多様体とし、トーラス作用で不変な Kähler 形式で $\mathcal{L}$ の第 1 Chern 類 $c_1(\mathcal{L})$ を代表するものを一つ固定する。このとき運動量多面体と呼ばれる凸多面体 $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ が代数幾何、シンプレクティック幾何の二通りの方法で現れる。すなわち

- $(z_1, \dots, z_N)$ を $(\mathbb{C}^*)^N \subset X$ の座標とし、 Δ の各整数点 $(i_1, \dots, i_N)$ に対し Laurent 単項式 $z_1^{i_1} \cdots z_N^{i_N}$ を対応させると、これらは $\mathcal{L}$ の正則切断の空間 $H^0(X, \mathcal{L})$ の基底を定める。言い換えると、トーラス作用による $H^0(X, \mathcal{L})$ のウェイト分解は重複度がなく、現れるウェイトがちょうど Δ の整数点と対応している。
- トーラス作用の運動量写像 $X \rightarrow \mathbb{R}^N$ の像が Δ となる。

これは大きなトーラスが代数幾何的にもシンプレクティック幾何的にもうまく作用していることの現れであり、このおかげで様々な量が具体的に計算されている。これらの性質は解析を行う上でも重要であり、例えば Donaldson [3] はトーリック多様体上の Kähler 計量の問題を多面体上の解析に帰着させて調べている。

上の様な凸多面体との関係は旗多様体 $Fl_n = U(n)/T$ の場合にも知られている. この場合に現れる凸多面体は Gelfand-Cetlin 多面体と呼ばれるもので,¹ 旗多様体とは以下のように関わる:

- (i) $U(n)$ の既約表現 (Borel-Weil 理論によりこれは Fl_n 上のある直線束の切断の空間で与えられる) は Gelfand-Cetlin 多面体の整数点で添え字付けられた基底 (Gelfand-Cetlin 基底) を持つ (Gelfand-Cetlin [4]).
- (ii) Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる Fl_n 上の完全可積分系 $\Phi: Fl_n \rightarrow \mathbb{R}^N$ (但し $N = \dim_{\mathbb{C}} Fl_n$) の像が Gelfand-Cetlin 多面体となる (Guillemin-Sternberg [7]).

ここで完全可積分系とはシンプレクティック多様体 M 上の $\frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} M$ 個の独立な関数の組で, Poisson 括弧に関して互いに可換なものをいう. トーリック多様体の運動量写像は完全可積分系の例であり, (i), (ii) はそれぞれトーリック多様体上の単項式, 運動量写像に対応するものと見ることができる. トーリック多様体の場合との一番の違いは, 旗多様体の場合は二つが同一のトーラス作用から来ているわけではないことである. 例えば Gelfand-Cetlin 系の定めるトーラス作用は複素構造を保たないので, 特に切断の空間 ($U(n)$ の表現空間) への作用を定めない.

旗多様体の場合には多面体との関係がもう一つある.

- (iii) 旗多様体は Gelfand-Cetlin 多面体から定まるトーリック多様体に退化する (Gonciulea-Lakshmibai [6], Kogan-Miller [8], Batyrev et al. [2]).²

このトーリック退化で切断の基底や完全可積分系の構造もこめて変形されることを期待することは自然であろう. 実際これは正しく, Gelfand-Cetlin 基底がトーリック多様体上の単項式に変形されることは Kogan-Miller [8] により示されている. ここでは Gelfand-Cetlin 系がトーリック多様体の運動量写像に自然に変形できることについて述べたい.

なお, この結果は一般化された旗多様体 (partial flag manifold) でも正しい. 実際, 狭義の旗多様体からの自然な射影により以下の議論のほとんどは一般化された旗多様体上に落ちる. 議論の本質的な部分は (狭義の) 旗多様体の場合にあるため, ここでは簡単のためこの場合のみを考える. 詳しい証明や一般化された旗多様体の場合の議論は [9] を参照されたい.

これ以降の内容は次の通り. まず 2 節でこの後用いる旗多様体の基本的な事実を簡単にまとめた後, 3 節, 4 節でそれぞれ Gelfand-Cetlin 系, Gelfand-Cetlin 基底の構成を振り返る. 5 節では Kogan-Miller [8] に従って旗多様体のトーリック退化がどのように構成されるかを述べる. 最後に 6 節で Gelfand-Cetlin 系の運動量写像への変形について述べたい.

¹ Cetlin の綴りはこの他に Zetlin, Zeitlin, Tsetlin など何通りかあるので注意されたい. 因みにキリル文字では Цетлин である.

² 旗多様体はこれ以外のトーリック退化を持つことが Alexeev-Brion [1] により示されている.

2 旗多様体

旗多様体 Fl_n とは $\mathbb{C}^n$ 内の部分空間の列

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n, \quad \dim V_k = k$$

全体のなす $n(n-1)/2$ 次元複素多様体である. Fl_n は等質空間として

$$Fl_n = GL(n, \mathbb{C})/B = U(n)/T$$

と表される. ここで $B \subset GL(n, \mathbb{C})$ は下三角行列全体, $T \subset U(n)$ は対角行列全体のなす部分群である.

これからの話では旗多様体の (余) 随伴軌道と Plücker 埋め込みによる記述を用いる. まず余随伴軌道としての記述を思い出す. ここでは $\mathfrak{u}(n) = \text{Lie } U(n)$ の Ad-不変な内積 $\langle, \rangle$ を使って $\mathfrak{u}(n)^*$ を Hermite 行列全体 $\sqrt{-1}\mathfrak{u}(n)$ と同一視して, 随伴軌道として表すことにする.

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n), \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$$

をひとつ固定し, $\mathcal{O}_\lambda \subset \sqrt{-1}\mathfrak{u}(n)$ を固定された固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を持つ Hermite 行列全体のなす空間とすると, Fl_n は

$$Fl_n = U(n)/T \cong \mathcal{O}_\lambda, \quad gT \longmapsto g\lambda g^*$$

によって $\mathcal{O}_\lambda$ と同一視できる. $\mathcal{O}_\lambda$ は **Kostant-Kirillov** 形式と呼ばれる標準的なシンプレクティック形式 ω_λ を持つ. $x \in \mathcal{O}_\lambda$ に対し, その点での接ベクトルは $\text{ad}_\xi(x) = [\xi, x]$, $\xi \in \mathfrak{u}(n)$ と表されることを思い出しておく. このとき ω_λ は

$$\omega_\lambda(\text{ad}_\xi(x), \text{ad}_\eta(x)) = \langle x, [\xi, \eta] \rangle$$

で定義される. ω_λ はもちろん λ に依っている. このシンプレクティック形式は複素構造と整合的で, これにより Fl_n は Kähler 多様体となる.

次に旗多様体の Plücker 埋め込みを思い出す. 各 $k = 1, \dots, n-1$ に対し $\mathbb{P}_k := \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ とおく. このとき Plücker 埋め込みは

$$\iota: Fl_n \hookrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k, \quad (0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n) \mapsto (\bigwedge^1 V_1, \dots, \bigwedge^{n-1} V_{n-1})$$

で与えられる. Plücker 座標を用いるとこれは以下のように書ける. $n \times n$ 行列 $z = (z_{ij})$ と $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ に対し, z の小行列 z_I を

$$z_I = \begin{pmatrix} z_{i_1 1} & z_{i_1 2} & \cdots & z_{i_1 k} \\ z_{i_2 1} & z_{i_2 2} & \cdots & z_{i_2 k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{i_k 1} & z_{i_k 2} & \cdots & z_{i_k k} \end{pmatrix}$$

で定めると, Plücker 座標は

$$p_I(z) := \det z_I$$

たちで与えられる. つまり, Plücker 埋め込みはこれらの p_I たちを並べて

$$\iota = ([p_I]_{|I|=k})_{k=1, \dots, n-1} : Fl_n = GL(n, \mathbb{C})/B \longrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k$$

で与えられる. 言い換えると Fl_n は $\mathbb{C}[p_I; |I| = 1, \dots, n-1]$ の “multiple Proj” として得られる:

$$Fl_n = \text{multiple Proj } \mathbb{C}[p_I; |I| = 1, \dots, n-1] \subset \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k.$$

ここで $\text{multiple Proj } \mathbb{C}[p_I]$ は $\mathbb{C}[p_I]$ に対応する $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k = \prod_{k=1}^{n-1} \text{Proj } \mathbb{C}[Z_I; |I| = k]$ の部分代数多様体, すなわち p_I たちの満たす関係式を定義方程式とする $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k$ の部分多様体である. このとき, ω_λ は $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k$ 上の計量

$$\tilde{\omega}_\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \omega_{\text{FS}, k} \quad (1)$$

の制限 $\omega_\lambda = \iota^* \tilde{\omega}_\lambda$ として得られる. ただし $\omega_{\text{FS}, k}$ は $\mathbb{P}_k$ 上の Fubini-Study 形式である.

例 2.1. $n = 3$ のとき Fl_3 は 3 次元で, Plücker 埋め込み

$$\iota = ([p_1 : p_2 : p_3], [p_{12} : p_{13} : p_{23}]) : Fl_3 \longrightarrow \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$$

により $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ に超曲面として埋め込まれる. $[Z_1 : Z_2 : Z_3]$, $[Z_{12} : Z_{13} : Z_{23}]$ をそれぞれ $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ の斉次座標とすると, Fl_3 の定義方程式 (Plücker 関係式) は

$$Z_1 Z_{23} - Z_2 Z_{13} + Z_3 Z_{12} = 0$$

で与えられる.

全ての λ_i が整数のとき (実際には $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ たちが整数であれば良い), λ は T の指標 (すなわち T の $\mathbb{C}$ への作用) を定める. このとき, この作用との対角作用による商として Fl_n 上の正則直線束

$$\mathcal{L}_\lambda = (U(n) \times \mathbb{C})/T \longrightarrow Fl_n = U(n)/T \quad (2)$$

が得られる. $\mathbb{C}$ の標準的な内積から定まる $\mathcal{L}_\lambda$ の Hermite 計量 h を考えると, この曲率がちょうど Kostant-Kirillov 形式となっている:

$$c_1(\mathcal{L}_\lambda, h) = \frac{1}{2\pi} \omega_\lambda.$$

Plücker 埋め込みの方で見ると, $\mathcal{L}_\lambda$ は $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k$ 上の直線束

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(\lambda_1 - \lambda_2) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n-1}}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) \quad (3)$$

の Fl_n への引き戻しと一致する. ここで $\boxtimes$ は外部テンソル積を表すものとする. 例えば Fl_n の反標準束 $\mathcal{K}_{Fl_n}^{-1}$ は全ての i に対し $\lambda_i - \lambda_{i+1} = 2$ (即ち λ が正ルートの和 2ρ) の場合に対応する:

$$\mathcal{L}_{2\rho} = \mathcal{K}_{Fl_n}^{-1}.$$

特に ω_λ が Kähler-Einstein であるための必要十分条件は

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n-1} - \lambda_n$$

である.

3 Gelfand-Cetlin 系

この節では Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる旗多様体の完全可積分系について振り返る. これを見るのは (余) 随伴軌道による記述を用いるのが便利である.

各 $x \in \mathcal{O}_\lambda$ に対して, その左上の $k \times k$ 小行列を $x^{(k)}$ と書くことにする. $x^{(k)}$ も Hermite 行列なので, 実固有値 $\lambda_1^{(k)}(x) \geq \lambda_2^{(k)}(x) \geq \cdots \geq \lambda_k^{(k)}(x)$ を持つ. $x = x^{(n)}$ の固有値は固定されているので, それより小さいサイズ $k = 1, \dots, n-1$ をすべて考えると, ちょうど Fl_n の実次元の半分の個数の関数

$$\Phi : \mathcal{O}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}, \quad x \longmapsto \left(\lambda_j^{(k)}(x) \right)_{\substack{k=1, \dots, n-1, \\ j=1, \dots, k}}$$

を得る. これは $(\mathcal{O}_\lambda, \omega_\lambda)$ 上の完全可積分系になる (証明は [7] 参照). これを Gelfand-Cetlin 系という. この Φ による $\mathcal{O}_\lambda$ の像を見てみる. まず λ_i と $\lambda_i^{(n-1)}$ の関係から考えると, Mini-Max 原理から

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^{(n-1)} \geq \lambda_2 \geq \lambda_2^{(n-1)} \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_{n-1}^{(n-1)} \geq \lambda_n \quad (4)$$

を満たすことが分かる. 従って $\lambda_j^{(i)}$ たちは

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & & \lambda_n \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ & \lambda_1^{(n-1)} & & \lambda_2^{(n-1)} & & & & \lambda_{n-1}^{(n-1)} & \\ & & \searrow & \nearrow & & & & \searrow & \nearrow \\ & & \lambda_1^{(n-2)} & & \lambda_{n-2}^{(n-2)} & & & & \\ & & & \searrow & \nearrow & & & & \\ & & & \lambda_1^{(1)} & & & & & \end{array}$$

を満たす. これを満たす数の組を λ に対する Gelfand-Cetlin pattern という. Gelfand-Cetlin pattern 全体のなす凸多面体 Δ_λ を Gelfand-Cetlin 多面体と呼ぶ. Φ による $\mathcal{O}_\lambda$ の像は Gelfand-Cetlin 多面体全体に一致することは容易に確かめられる. 図 1 は $n = 3$ のときの Gelfand-Cetlin 多面体ある.

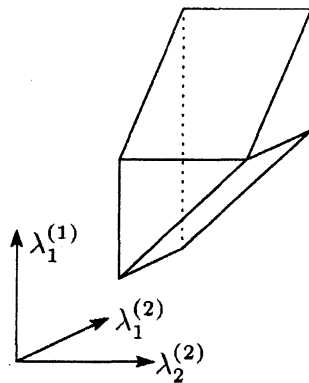


図 1: 3 次元の Gelfand-Cetlin 多面体

注意 3.1. $k = 1, \dots, n-1$ に対し $U(k)$ を次のようにして $U(n)$ の部分群とみなす:

$$U(k) \cong \left(\begin{array}{c|c} U(k) & 0 \\ \hline 0 & 1_{n-k} \end{array} \right) \subset U(n). \quad (5)$$

このとき $x \mapsto x^{(k)}$ は $(\mathcal{O}_\lambda, \omega_\lambda)$ への $U(k)$ 作用の運動量写像を与える. ただし前と同様 $u(k)^*$ を $\sqrt{-1}u(k)$ と同一視している.

注意 3.2. $\mathcal{O}_\lambda$ への T 作用の運動量写像は

$$x = (x_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられるが, これは

$$x_{kk} = \operatorname{tr} x^{(k)} - \operatorname{tr} x^{(k-1)} = \sum_i \lambda_i^{(k)} - \sum_i \lambda_i^{(k-1)},$$

と $\lambda_i^{(k)}$ たちで書くことができるので, T 作用は Gelfand-Cetlin 系に含まれている.

注意 3.3. Gelfand-Cetlin 系の定めるトーラス作用は Fl_n の複素構造を保たない. 実際, 複素構造を保つトーラスは $U(n)$ の極大トーラスだけ (中心は自明に作用するので $(n-1)$ 次元しかない) である. 従って一般に Gelfand-Cetlin

多面体の面の逆像は複素部分多様体ではない. 例えば $n = 3$ の場合, 図 1 の奥にある 2 つの台形の面の逆像は複素部分多様体だが, それ以外の 4 つの面の逆像は複素部分多様体ではない.

$\lambda_j^{(k)}$ の Hamilton 流は以下のように書くことができる. 一般の $x \in \mathcal{O}_\lambda$ に対し, $x^{(k)}$ の $\lambda_j^{(k)}$ 固有単位ベクトル $v = v_j^{(k)} \in \mathbb{C}^k$ をとり (もちろん x に依っている),

$$\tilde{v} := \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

とおく.

命題 3.4 (Giacobbe [5]). $\lambda_j^{(i)}$ の Hamilton 流の方程式は

$$\frac{d}{dt}x = [x, \sqrt{-1}\tilde{v} \otimes \tilde{v}^*]$$

となり, さらに $\tilde{v} \otimes \tilde{v}^*$ はこの流れに沿って定数である. 特に積分曲線は

$$x(t) = \text{Ad} \left(e^{\sqrt{-1}t\tilde{v} \otimes \tilde{v}^*} \right) x(0) = e^{-\sqrt{-1}t\tilde{v} \otimes \tilde{v}^*} x(0) e^{\sqrt{-1}t\tilde{v} \otimes \tilde{v}^*}$$

で与えられる.

最後に $n = 3$ の場合に Φ のファイバーの様子について見ておく. ほとんどのところではトーリック多様体の運動量写像の場合と同じで, k 次元の面上には k 次元トーラス T^k が並んでいる. 例えば Δ_λ の内部では T^3 ファイブレーションになっている. 唯一の例外が 4 本の辺が集まっている頂点 (図 1 で手前にある頂点) で, この上には S^3 がのっている. これを見てみよう. この頂点は

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 \\ & \parallel & & \parallel & \\ & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & \\ & \parallel & & \parallel & \\ & & \lambda_1^{(1)} & & \end{array}$$

で定義されるので, x がこのファイバーの点ならば

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

でなければならない. 従って x は

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_2 & z_1 \\ & \lambda_2 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \nu \end{pmatrix}$$

という形をしている. この行列の固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ であるための必要十分条件は

$$\nu = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)$$

であり, 特にファイバーは S^3 と同相である. また, 図 1 でこの頂点から縦に出ている二本の辺, 横に出ている二本の辺の逆像はそれぞれ合わせて一つの $\mathbb{P}^1$ で, S^3 とそれぞれ $z_1 = 0, z_2 = 0$ で定まる S^1 で交わる.

注意 3.5. 一般化された旗多様体の場合もまったく同様にして完全可積分系が得られる. 例えば $\mathbb{C}^4$ 内の 2 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $Gr(2, 4)$ の場合を考える. これは複素 4 次元多様体で, λ を $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4$ となるようにとれば, その随伴軌道と同一視できる. この場合も同様にして定まる $\lambda_i^{(k)}$ たちを考えると, Gelfand-Cetlin pattern の関係式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \lambda_1 & & \lambda_1 & & \lambda_3 & & \lambda_3 \\
 & \parallel & & \parallel & & \searrow & & \parallel \\
 & & \lambda_1 & & \lambda_2^{(3)} & & \lambda_3 & \\
 & & \searrow & & \parallel & & \searrow & \\
 & & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & \\
 & & & \searrow & & \parallel & & \\
 & & & & \lambda_1^{(1)} & & &
 \end{array}$$

から二つが定数関数になることが分かり, ちょうど $4 = \dim_{\mathbb{C}} Gr(2, 4)$ 個の定数でない関数が得られる. (狭義の) 旗多様体の場合と同様にこれらは $Gr(2, 4)$ 上の完全可積分系となる.

4 Gelfand-Cetlin 基底

(2) で定義された直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ に対し, その正則切断の空間 $H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda)$ は $U(n)$ の最高ウェイト λ の既約表現を与える (Borel-Weil 理論). Gelfand-Cetlin 基底はこのベクトル空間の基底で, Gelfand-Cetlin 多面体と関係があるもう一つの話である. この後用いることはないが, せっかくなのでここで簡単に振り返っておく.

再び (5) により $U(k)$ ($k = 1, \dots, n-1$) を $U(n)$ の部分群とみなし, $U(k)$ の表現として $H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda)$ を見る. まず $U(n-1)$ の表現として見ると $H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda)$ は既約でないので, その既約分解 $H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus V_\mu^{\oplus m_{\lambda, \mu}}$ を考える. ここで V_μ は $U(n-1)$ の最高重み $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1})$ の既約表現, $m_{\lambda, \mu}$ はその重複度である. すると次が成り立つ (例えば [11] 参照):

- 現れる既約表現 V_μ の重複度は 1,

- V_μ が既約成分として現れるための必要十分条件は

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

を満たすことである.

つまり, ちょうど Gelfand-Cetlin 系のときに出てきた条件 (4) と同じものが現れる. 順に行列のサイズを小さくしていくことにより最終的に $U(1)$ の表現としての既約分解ができるが, 上の事実から各既約成分は Gelfand-Cetlin 多面体の整数点 $\Lambda \in \Delta_{\lambda, \mathbb{Z}} = \Delta_\lambda \cap \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$ と 1 対 1 に対応する:

$$H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\Lambda \in \Delta_{\lambda, \mathbb{Z}}} V_\Lambda, \quad \dim V_\Lambda = 1.$$

この既約分解を **Gelfand-Cetlin 分解** といい, それぞれの V_Λ から基底をとってそれらを集めたものを **Gelfand-Cetlin 基底** という. 特に

$$\dim H^0(Fl_n, \mathcal{L}_\lambda) = \#\Delta_{\lambda, \mathbb{Z}}$$

である.

例 4.1. $U(3)$ の $\mathfrak{su}(3)$ への随伴作用は最高ウェイト $\lambda = (1, 0, -1)$ の 8 次元表現である. 図 2 の 8 つの黒い点が Gelfand-Cetlin 多面体の整数点で, それぞれが $U(1)$ の既約表現に対応している. また, 丸く囲ったところはそれぞれが $U(2)$ の既約表現を与える (つまり 1 次元表現と 3 次元表現がそれぞれ一つずつ, 2 次元表現が二つ現れる).

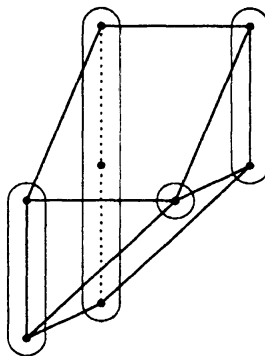


図 2: $U(3)$ の $\mathfrak{su}(3)$ への随伴作用の Gelfand-Cetlin 分解

5 旗多様体のトーリック退化

この節では旗多様体の Gelfand-Cetlin 多面体から定まるトーリック多様体への退化について振り返る. この退化は 2 節の Plücker 埋め込みを変形する

ことにより得られる。ここでは主に [8] に従ってこれについて簡単に説明したい。

Plücker 埋め込みを変形することは Plücker 座標 $p_I(z)$ たちを変形することと同じである。そこで, z_{ij} に次のような重みを導入する。

$$w_{ij} = \begin{cases} 3^{i-j-1}, & i > j, \\ 0, & i \leq j. \end{cases}$$

つまり重みの行列 (w_{ij}) は

$$w = (w_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 3 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 3^{n-2} & \dots & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

で与えられる。これに対し,

$$q_I(z, t) := t^{-\text{tr } w_I} p_I(t^{w_{ij}} z_{ij}) = t^{-\text{tr } w_I} \det(t^{w_{ij}} z_{ij})_I$$

とおく。 $p_I(t^{w_{ij}} z_{ij})$ の項の中で t の次数が一番小さいのは対角成分からなる項なので q_I は t に関しても多項式で, $t = 0$ のとき対角成分の項 (単項式) だけが残る。これを用いて多様体の族

$$\mathfrak{X} = \text{multiple Proj } \mathbb{C}[t, q_I; I \subset \{1, \dots, n\}] \subset \prod_i \mathbb{P}_i \times \mathbb{C}$$

が得られる。作り方から $t = 1$ のときがちょうど Plücker 埋め込みであり, $t = 0$ でトーリック多様体 X_0 に退化している。Kogan-Miller [8] により, このトーリック多様体が Gelfand-Cetlin 多面体から決まるものと一致することが示されている。以後, このトーリック多様体を **Gelfand-Cetlin** トーリック多様体と呼ぶことにする。 X_0 に作用するトーラスを Gelfand-Cetlin pattern の行ごとに分け, $T_{n-1} \times \dots \times T_2 \times T_1$ と書くことにする。ここで T_k は Gelfand-Cetlin pattern の下から k 行目に対応する k 次元トーラスである。

注意 5.1. 各 $t \neq 0$ に対し, そのファイバー X_t は複素多様体として旗多様体 Fl_n と同型である。一方, (1) で定義したシンプレクティック形式の制限 $\tilde{\omega}_\lambda|_{X_t}$ が Kostant-Kirillov 形式と一致するのは $|t| = 1$ のときのみである。

例 5.2. $n = 3$ の場合を見てみる。このときは Fl_3 は $Z_1 Z_{23} - Z_2 Z_{13} + Z_3 Z_{12} = 0$ で定まる $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の超曲面であったを思い出す。これに対し退化族は

$$\mathfrak{X} = \left\{ ([Z_1 : Z_2 : Z_3], [Z_{12} : Z_{13} : Z_{23}], t) \mid Z_1 Z_{23} - Z_2 Z_{13} + t Z_3 Z_{12} = 0 \right\}$$

となり, $t = 0$ でトーリック多様体

$$X_0 = \left\{ ([Z_1 : Z_2 : Z_3], [Z_{12} : Z_{13} : Z_{23}]) \mid Z_1 Z_{23} - Z_2 Z_{13} = 0 \right\}$$

に退化していることが分かる. X_0 は $Z_1 = Z_2 = Z_{13} = Z_{23} = 0$ に特異点を持ち, この点が Gelfand-Cetlin 多面体の 4 本辺が出ている頂点に対応している.

注意 5.3. 一般に Gelfand-Cetlin トーリック多様体は特異点を持つ. これは Gelfand-Cetlin 多面体が必ず上のような余分に辺などが集まる頂点 (より一般に面) を持つことから分かる. 一般化された旗多様体のときも自明な (すなわち射影空間の) 場合を除いて X_0 は特異となる.

(3) の直線束から定まる ample な直線束の族を $\mathcal{L}_\lambda \rightarrow \mathfrak{X}$ と書くことにする. このとき次の意味で旗多様体上の Gelfand-Cetlin 基底は Gelfand-Cetlin トーリック多様体上の単項式の基底に変形できる.

定理 5.4 (Kogan-Miller [8]). $H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{L}_\lambda)$ の $\mathbb{C}[t]$ 上の基底で, $t = 1$ では Gelfand-Cetlin 基底, $t = 0$ では X_0 上の単項式となるものが取れる.

Gelfand-Cetlin 系は小さいサイズのユニタリ群の作用を用いて作られていたが, この退化ではこれらの群作用がなくなってしまうため Gelfand-Cetlin 系の変形を考える上であまり都合が良くない. そこで, やはり [8] で導入された旗多様体の段階的退化を用いる. $t = (t_2, \dots, t_n)$ をパラメータとする. 各 $k = 2, \dots, n$ に対し

$$\tilde{w}_{k,ij} = \begin{cases} 0, & i < k, \\ w_{kj} - w_{k-1,j}, & i \geq k \end{cases}$$

とおき, z_{ij} の重みを

$$t^{\tilde{w}_{ij}} := t_2^{\tilde{w}_{2,ij}} t_3^{\tilde{w}_{3,ij}} \dots t_n^{\tilde{w}_{n,ij}}.$$

で定める. つまり,

$$(t^{\tilde{w}_{ij}})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ t_2 t_3^2 & & & & & \\ & t_3 & & 1 & & \\ t_2 t_3^2 t_4^6 & & t_3 t_4^2 & & t_4 & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots \\ t_2 t_3^2 t_4^6 \dots t_n^{2 \cdot 3^{n-3}} & t_3 t_4^2 \dots t_n^{2 \cdot 3^{n-4}} & \dots & & t_n & 1 \end{pmatrix}.$$

で与えられる重みを考える. t_k は k 行目以下にしか現れないことに注意する. q_I の代わりに

$$\tilde{q}_I(z_{ij}, t_2, \dots, t_n) = d_I(t^{\tilde{w}_{ij}})^{-1} p_I(t^{\tilde{w}_{ij}} z_{ij}) \in \mathbb{C}[z_{ij}, t_k].$$

を用いて $(n-1)$ 変数族

$$\tilde{f}: \tilde{\mathfrak{X}} = \text{multiple Proj } \mathbb{C}[\tilde{q}_I, t] \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

を作る. 但し, d_I は p_I の対角成分の項 (単項式) を表すものとする. このとき作り方から $\tilde{q}_I(z_{ij}, t, \dots, t) = q_I(z_{ij}, t)$ なので $X_{(1, \dots, 1)} := \tilde{f}^{-1}(1, \dots, 1)$ は Fl_n と同型であり, $X_{(0, \dots, 0)} = \tilde{f}^{-1}(0, \dots, 0)$ は Gelfand-Cetlin トーリック多様体 X_0 となる. ここで重要なのは,

- $t_2 = \dots = t_{k-1} = 1$ のとき各ファイバー $X_{(1, \dots, 1, t_k, \dots, t_n)}$ には $U(k-1)$ の作用が生き残っており,
- $t_{k+1} = \dots = t_n = 0$ では $X_{(t_2, \dots, t_k, 0, \dots, 0)}$ には X_0 に作用するトーラスの一部 $T_{n-1} \times \dots \times T_k$ が作用する

ということである. そこで, パラメータを後ろから順に

$$t = (1, \dots, 1) \rightsquigarrow (1, \dots, 1, 0) \rightsquigarrow (1, \dots, 1, 0, 0) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (0, \dots, 0)$$

と動かす退化の列を考える. t_k を動かす $(n-k+1)$ ステップ目の退化を

$$\begin{array}{ccc} f_k: \mathfrak{X}_k = \tilde{\mathfrak{X}}|_{\substack{t_2 = \dots = t_{k-1} = 1 \\ t_{k+1} = \dots = t_n = 0}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ X_{(1, \dots, 1, t_k, 0, \dots, 0)} & \longrightarrow & t_k \end{array}$$

とし, そのファイバーを $X_{k,t} := f_k^{-1}(t) = X_{(1, \dots, 1, t, 0, \dots, 0)}$ と書くことにする.

注意 5.5. このように段階的に退化させていった場合, 最後の段階 $f_2: \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ は自明な族となり, 従って実質的には $(n-2)$ 段階の退化を考えていることになる. 例えば, Fl_3 の場合の 2 変数族は

$$t_2 Z_1 Z_{23} - t_2 Z_2 Z_{13} + t_3^2 Z_3 Z_{12} = 0$$

で与えられる. この事実は $Fl_2 = \mathbb{P}^1$ がもともとトーリック多様体であり, この場合のトーリック退化は自明な族であることに対応している (以下の議論も参照されたい).

一段階目の退化の終点 (すなわち 2 段階目のスタート) $X_{n,0} = X_{n-1,1} = X_{(1, \dots, 1, 0)}$ について少し見ておく. そのために, 小さいサイズの旗多様体 Fl_{n-1} とその多変数退化族

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}^{(n-1)} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n-2} \\ \cup & & \cup \\ X_{t'}^{(n-1)} & \longrightarrow & t' = (t_2, \dots, t_{n-1}) \end{array}$$

を考える. これは $\mathbb{P}^{(n-1)} := \prod_k \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^{n-1})$ の中で変形されることを思い出す. 各 k に対し, 自然な射影 $\text{pr}_k: \mathbb{P}^{(n-1)} \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^{n-1})$ を考え, $\mathcal{E}_k =$

$\mathrm{pr}_k^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^{n-1})}(1)$ とおく. さらに $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{n-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{(n-1)}}$ を自明束とし, $\mathbb{P}^{(n-1)}$ 上の $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ -束

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1) \times_{\mathbb{P}^{(n-1)}} \mathbb{P}(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) \times_{\mathbb{P}^{(n-1)}} \cdots \times_{\mathbb{P}^{(n-1)}} \mathbb{P}(\mathcal{E}_{n-2} \oplus \mathcal{E}_{n-1})$$

を考える. 各 $X_{t'}^{(n-1)}$ に制限することにより得られる $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ -束の族を

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{X}}^{(n-1)} \\ \cup & & \cup \\ Y_{t'} & \longrightarrow & X_{t'}^{(n-1)} \end{array}$$

と書くことにする. このとき, 各 $X_{(t',0)}$ への全射双有理写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{X}}|_{t_n=0} \\ \cup & & \cup \\ Y_{t'} & \longrightarrow & X_{(t',0)} \end{array}$$

が次のように得られる. Z'_I , $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ を $\prod_k \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^{n-1})$ の斉次座標とし, $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{i-1} \oplus \mathcal{E}_i)$ のファイバー座標 $[u_i : v_i]$ を $u_i \in \mathcal{E}_{i-1}$, $v_i \in \mathcal{E}_i$ となるようにとると, 写像 $Y_{t'} \rightarrow X_{(t',0)} \subset \prod \mathbb{P}_k$ は各 $\mathbb{P}_k$ 上で

$$Z_I = \begin{cases} u_k Z'_I, & \text{if } n \notin I, \\ v_k Z'_{i_1, \dots, i_{k-1}}, & \text{if } I = \{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k = n\} \end{cases} \quad (6)$$

により得られる. ただし $Z'_\emptyset = Z'_{1, \dots, n-1} = 1$ としている. 特に $X_{n-1,1}$ の特異点解消

$$h_{n-1,1} : Y_{n-1,1} := Y_{(1, \dots, 1)} \longrightarrow X_{n-2,1} = X_{(1, \dots, 1, 0)}$$

は Fl_{n-1} 上の $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ -束 $Y_{n-1,1}$ で与えられる. このとき $X_{n-1,1}$ への $U(n-1)$ の作用は Fl_{n-1} への自然な作用から誘導される $Y_{n-1,1}$ への作用から来るものと一致している. 一方 T_{n-1} の作用は $Y_{n-1,1}$ のファイバーへの自然な作用が落ちてきたものとなっている.

この議論を繰り返すことにより, 各 $m = n-1, \dots, 2$ に対し $X_{m,1}$ の特異点解消 $h_{m,1} : Y_{m,1} \longrightarrow X_{m,1}$ が Fl_m 上にファイバー束の構造が積み重なったもの

$$Y_{m,1} \xrightarrow{(\mathbb{P}^1)^{n-1}} \cdots \xrightarrow{(\mathbb{P}^1)^m} Fl_m$$

で与えられることが分かる. Fl_m の Plücker 座標 $([Z'_I]_{|I|=k})_k$ とファイバーの座標 $([u_i^n : v_i^n])_{i=1, \dots, n-1} \in (\mathbb{P}^1)^{n-1}, \dots, ([u_i^{m+1} : v_i^{m+1}])_{i=1, \dots, m+1} \in (\mathbb{P}^1)^m$ をとると, $h_{m,1}$ は

$$Z_I = \chi_{I, I''}(u, v) \cdot Z'_{I'} \quad (7)$$

という形で与えられる. ただし $I = \{i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} < \cdots < i_l\} \subset \{1, \dots, n\}$ に対し $I' = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$, $I'' = \{i_{k+1}, \dots, i_l\} \subset$

$\{m+1, \dots, n\}$ であり, $\chi_{l, I''}(u, v)$ は (6) により帰納的に定まる u_i^k, v_j^l の単項式である. 各 t に対しても (7) は全射双有理写像 $h_{m,t} : Y_{m,t} \rightarrow X_{m,t}$ を定める.

6 Gelfand-Cetlin 系のトーリック退化

この節では旗多様体の Gelfand-Cetlin 系がトーリック退化で Gelfand-Cetlin トーリック多様体の自然なトーラス作用の運動量写像に変形できることを見る.

各 $m = 1, \dots, n-1$ に対し, $\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k$ への自然な $U(m)$ 作用を考える. これは旗多様体への作用の拡張になっている. この作用の運動量写像を

$$\mu^{(m)} : \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k \longrightarrow \sqrt{-1}\mathfrak{u}(m).$$

書くことにし, $\mu^{(m)}$ の値の固有値を対応させる関数を

$$\tilde{\lambda}_i^{(m)} : \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\lambda}_1^{(m)} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_m^{(m)}$$

とする. すると作り方から $\tilde{\lambda}_j^{(m)}$ たちは $X_1 = Fl_n$ に制限すると Gelfand-Cetlin 系になる. 以下, 斉次座標 Z_I の添え字は増加していないものも許し, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し

$$Z_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)} = (\text{sgn } \sigma) Z_{i_1, \dots, i_k}$$

という関係を満たすものとする. このとき $U(n)$ 作用の運動量写像 $\mu^{(n)}$ は

$$\mu^{(n)}(Z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\sum_{|I|=k} |Z_I|^2} \left(\sum_{|I'|=n_k-1} Z_{iI'} \bar{Z}_{jI'} \right)_{i,j=1, \dots, n} + \lambda_n \cdot 1_n$$

で与えられる. 従って $\mu^{(m)}$ は $\mu^{(n)}$ の左上の $m \times m$ ブロック

$$\mu^{(m)}(Z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\sum_{|I|=k} |Z_I|^2} \left(\sum_{|I'|=n_k-1} Z_{iI'} \bar{Z}_{jI'} \right)_{i,j=1, \dots, m} + \lambda_n \cdot 1_m \quad (8)$$

で与えられる.

同様に Gelfand-Cetlin トーリック多様体 X_0 へのトーラス作用を $\prod_{j=k}^{n-1} \mathbb{P}_k$ に拡張し, その運動量写像を

$$\tilde{\nu}_i^{(m)} : \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m \leq n-1$$

と書くことにする. これらを X_0 に制限すればやはりトーラス作用の運動量写像を与えることに注意する. T_m の作用は $\mathbb{P}_l$ 上では $I = \{i_1 < \dots < i_k <$

$i_{k+1} < \dots < i_l$ が $\{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ かつ $\{i_{k+1} < \dots < i_l\} \subset \{m+1, \dots, n\}$ のとき

$$Z_I \mapsto \tau_1^{(m)} \dots \tau_k^{(m)} Z_I, \quad (\tau_i^{(m)})_{i=1, \dots, m} \in T_m$$

で与えられる. これより

$$\tilde{\nu}_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\sum_{|I|=k} |Z_I|^2} \sum_{\substack{|I|=n_k, \\ i_j \leq m}} |Z_I|^2 + \lambda_n \quad (9)$$

となる. $\tilde{\lambda}_1^{(1)} = \tilde{\nu}_1^{(1)}$ であることに注意.

定理 6.1. $m = n, \dots, 2$ に対し $f_m : \mathfrak{X}_m \rightarrow \mathbb{C}$ を前節で定義された $(n-m+1)$ 段階目の退化とする. このとき, 次の意味で Gelfand-Cetlin 系は X_0 上の運動量写像に変形できる.

(i) 各 t に対し,

$$\Phi_{m,t} = \left(\tilde{\nu}_i^{(n-1)}, \dots, \tilde{\nu}_j^{(m)}, \tilde{\lambda}_k^{(m-1)}, \dots, \tilde{\lambda}_1^{(1)} \right) \Big|_{X_{m,t}} : X_{m,t} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

は $(X_{m,t}, \tilde{\omega}_\lambda|_{X_{m,t}})$ 上の完全可積分系となる. さらに $t = 0$ のとき, $X_{m,0} = X_{m-1,1}$ 上で

$$\tilde{\lambda}_k^{(m-1)} = \tilde{\nu}_k^{(m-1)}$$

である. つまり $\Phi_{m,0}$ は次の段階の出発点 $\Phi_{m-1,1}$ と一致する.

(ii) $\mathfrak{X}_m$ 上のベクトル場 ξ_m で, 完全可積分系の構造を保ったまま $X_{m,1}$ を $X_{m,t}$ ($t \in [0, 1]$) に流すものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} X_{m,1} & \xrightarrow{\exp(1-t)\xi_m} & X_{m,t} \\ & \searrow \Phi_{m,1} & \swarrow \Phi_{m,t} \\ & \Delta_\lambda & \end{array}$$

特に $\Phi_{m,t}$ による $X_{m,t}$ の像は常に Gelfand-Cetlin 多面体 Δ_λ である.

作り方から $\Phi_{n,1}$ は Gelfand-Cetlin 系であり, $\Phi_{2,0}$ はトーラス作用の運動量写像であることに注意.

証明 (i) $\tilde{\nu}_i^{(k)}$ たちはトーラス作用の運動量写像なので Poisson 可換である. 一方 $\tilde{\lambda}_i^{(k)}$ たち同士が Poisson 可換であることは次の補題から従う (Gelfand-Cetlin 系が Poisson 可換であることの証明と同様).

補題 6.2. コンパクト Lie 群 G がシンプレクティック多様体 (M, ω) に Hamiltonian に作用しているとし, $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とする. $M, \mathfrak{g}^*$ の

Poisson 括弧をそれぞれ $\{, \}_M, \{, \}_{\mathfrak{g}^*}$ と書くことにすると, $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対し

$$\{\mu^* f_1, \mu^* f_2\}_M = \mu^* \{f_1, f_2\}_{\mathfrak{g}^*}$$

が成り立つ. 特に f_1 (または f_2) が $\text{Ad}(G)^*$ 不変なら,

$$\{\mu^* f_1, \mu^* f_2\}_M = 0$$

が成り立つ.

$\tilde{\lambda}_i^{(k)}$ と $\tilde{\nu}_j^{(l)}$ ($k < m, l \geq m$) が可換であることは, これらを $X_{m,t}$ から $Y_{m,t}$ に持ち上げると分かる. 以下簡単のため $\lambda_n = 0$ と仮定し, 斉次座標を $\sum_{|I|=k} |Z_I|^2 = \sum_{|I|=k} |Z'_I|^2 = |u_i^k|^2 + |v_i^k|^2 = 1$ と正規化する. すると (8) と (7) から

$$\begin{aligned} h_m^* \mu^{(m)} &= \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left(\sum_{k=1}^l \sum_{\substack{I' \subset \{1, \dots, m\}, \\ |I'|=k-1, \\ I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} \chi_{l,I''} Z'_{iI'} \overline{\chi_{l,I''} Z'_{jI'}} \right)_{i,j=1, \dots, m} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left\{ \sum_{k=1}^l \left(\sum_{\substack{I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l,I''}|^2 \right) \left(\sum_{\substack{I' \subset \{1, \dots, m\}, \\ |I'|=k-1}} Z'_{iI'} \overline{Z'_{jI'}} \right)_{i,j=1, \dots, m} \right\} \end{aligned}$$

となる. T_l はファイバー $([u_i^j : v_i^j])_i$ のみに作用していたので, $h_m^* \mu^{(m)}$ は (従って $h_m^* \mu^{(k)}, k < m$ も) T_l 作用で不変である. 特に $X_{m,t}$ 上で

$$\{\tilde{\lambda}_i^{(k)}, \tilde{\nu}_j^{(l)}\} = \xi_{\tilde{\nu}_j^{(l)}} \tilde{\lambda}_i^{(k)} = 0, \quad k \leq m-1, \quad l \geq m$$

が成り立つ. ただし $\xi_{\tilde{\nu}_j^{(l)}}$ は $\tilde{\nu}_j^{(l)}$ の Hamilton ベクトル場である.

$X_{m,1} = X_{m+1,0}$ 上で $\tilde{\lambda}_j^{(m)} = \tilde{\nu}_j^{(m)}$ が成り立つことも同様に $Y_{m,1}$ に持ち上げることで見る事ができる. $h_m^* \mu^{(m)}$ は Fl_m への $U(m)$ 作用の運動量写像と同じような形をしているので, その固有値 $h_{m,1}^* \tilde{\lambda}_j^{(m)}$ は $U(m)$ 作用で不変である. 従って $h_{m,1}^* \tilde{\lambda}_j^{(m)}$ の値は Fl_m の標準的な旗のファイバー上で見ればよいことになる. 標準的な旗は, Plückere 座標では各 $\mathbb{P}_k$ 上で

$$Z'_I = \begin{cases} 1, & I = \{1, \dots, k\} \text{ のとき,} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる. これよりこのファイバー上で

$$h_m^* \mu^{(m)} = \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left\{ \sum_{k=1}^l \left(\sum_{\substack{I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l,I''}|^2 \right) \begin{pmatrix} 1_k & \\ & 0_{m-k} \end{pmatrix} \right\}$$

となるので, その固有値は

$$h_m^* \tilde{\lambda}_j^{(m)} = \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left\{ \sum_{k=j}^l \left(\sum_{\substack{I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l, I''}|^2 \right) \right\} \quad (10)$$

となる. 一方 (9) から

$$\begin{aligned} h_m^* \tilde{\nu}_j^{(m)} &= \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left(\sum_{k=j}^l \sum_{\substack{I' \subset \{1, \dots, m\}, \\ |I'|=k, \\ I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l, I''} Z'_{I'}|^2 \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left\{ \sum_{k=j}^l \left(\sum_{\substack{I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l, I''}|^2 \right) \left(\sum_{\substack{I' \subset \{1, \dots, m\}, \\ |I'|=k}} |Z'_{I'}|^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

となる. 今 $\sum_{|I'|=k} |Z'_{I'}|^2 = 1$ と仮定していたので,

$$h_m^* \tilde{\nu}_j^{(m)} = \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \left(\sum_{k=j}^l \sum_{\substack{I'' \subset \{m+1, \dots, n\}, \\ |I''|=l-k}} |\chi_{l, I''}|^2 \right)$$

となり, (10) と一致することが分かる.

(ii) のベクトル場は W.-D. Ruan [10] の勾配-Hamilton ベクトル場で与えられる. $\mathfrak{X}_m$ 上に $U(m-1)$ と $T_{n-1} \times \dots \times T_m$ の作用で不変な Kähler 形式で, 各 $X_{m,t}$ に制限すると $\tilde{\omega}_\lambda|_{X_{m,t}}$ に一致するものを取る. $f_m : \mathfrak{X}_m \rightarrow \mathbb{C}$ を正則関数と見なし, $\nabla(\operatorname{Re} f_m)$ で f_m の実部の勾配ベクトル場を, $\xi_{\operatorname{Im} f_m}$ で f_m の虚部の Hamilton ベクトル場を表すことにすると, f_m の勾配-Hamilton ベクトル場が

$$\xi_m = -\frac{\nabla(\operatorname{Re} f_m)}{|\nabla(\operatorname{Re} f_m)|^2} = \frac{\xi_{\operatorname{Im} f_m}}{|\xi_{\operatorname{Im} f_m}|^2}$$

により定義される. ここで二つ目の等号は Cauchy-Riemann 方程式から従う. このとき作り方から ξ_m の定める流れ $\exp(t\xi_m)$ は $X_{m,1} = f_m^{-1}(1)$ を別の超曲面 $X_{m,1-t} = f_m^{-1}(1-t)$ に移す. 正規化してあるため Hamilton ベクトル場ではないのでこの流れで $\mathfrak{X}_m$ の Kähler 形式は保たれないが, その各ファイバー $X_{m,t}$ への制限は保たれる (証明は [10] 参照). 従ってここで示すべきことは, このベクトル場が完全可積分系の構造も保つことである. これは次の命題から従う.

命題 6.3. $(\mathfrak{X}, \tilde{\omega})$ を Kähler 多様体とし, その上の正則関数 f により超曲面の族 $X_t = \{f = t\}$ ($t \in \mathbb{C}$) が与えられているとする. さらに $(\mathfrak{X}, \tilde{\omega})$ には各 X_t を保つコンパクト Lie 群 G の Hamilton 作用があるとする. $\mu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ をその運動量写像とすると, 各 $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対し $\mu^* h$ は f の勾配 Hamilton ベクトル場で不変である.

この命題は f が G 不変であることと、次の Noether 型の定理

補題 6.4. $h \in C^\infty(\mathfrak{X})$ が G 不変なら、 μ は h の Hamilton 流に沿って定数である。

から従う。 □

例 6.5. $n = 3$ の場合を考えるが、ここでは変形の全空間 $\mathfrak{X}$ の代わりに $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中での流れの様子を見る。退化族は

$$X_t = \left\{ ([Z_1 : Z_2 : Z_3], [Z_{12} : Z_{13} : Z_{23}]) \mid Z_1 Z_{23} - Z_2 Z_{13} + t Z_3 Z_{12} = 0 \right\}.$$

で与えられたので、ここで考える有理関数は

$$f = \frac{Z_2 Z_{13} - Z_1 Z_{23}}{Z_3 Z_{12}}$$

である。定理 6.1 により、各 t に対し

$$\Phi_t := (\tilde{\lambda}_1^{(2)}, \tilde{\lambda}_2^{(2)}, \tilde{\lambda}_1^{(1)})|_{X_t} : (X_t, \tilde{\omega}_\lambda|_{X_t}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

は完全可積分系であり、 $t = 0$ のときは Gelfand-Cetlin トーリック多様体のトーラス作用の運動量写像に一致する。 $X_1 \cap X_0 = \{Z_3 Z_{12} = 0\}$ は図 1 の奥にある Δ_λ の二枚の面の逆像になっているが、ここで勾配 Hamilton ベクトル場 ξ は消えている。つまり $X_1 \cap X_0$ は勾配-Hamilton 流で動かない部分である。この上では Gelfand-Cetlin 系とトーリック多様体のトーラス作用は一致している。最後に S^3 ファイバーの挙動を見たい。この S^3 は $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = \lambda_2$ で与えられるが、これは Plücker 埋め込みで $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の中に

$$\left\{ ([z_1 : z_2 : \lambda_1 - \lambda_2], [\lambda_2 - \lambda_3 : \bar{z}_2 : -\bar{z}_1]) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) \right\}$$

という形に埋め込まれる。定理 6.1 (ii) により、 S^3 の勾配-Hamilton 流による像は $\Phi_t^{-1}(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$ であるが、 $\tilde{\lambda}_j^{(k)}$ の定義からこれは

$$\phi_{1-t}(S^3) = \left\{ \mu^{(2)}(Z) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \cap X_t$$

と書ける。 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の局所座標 $(y_1, y_2, y_{23}, y_{13})$ を

$$y_i = \frac{Z_i}{\sqrt{\sum_j |Z_j|^2}}, \quad y_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{\sum_{k,l} |Z_{kl}|^2}}.$$

となるようにとると,

$$\begin{aligned}
\mu^{(2)} &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sum |Z_i|^2} \begin{pmatrix} |Z_1|^2 & \bar{Z}_1 Z_2 \\ Z_1 \bar{Z}_2 & |Z_2|^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\sum |Z_{ij}|^2} \begin{pmatrix} |Z_{12}|^2 + |Z_{13}|^2 & \bar{Z}_{13} Z_{23} \\ Z_{13} \bar{Z}_{23} & |Z_{12}|^2 + |Z_{23}|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \\ & \lambda_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sum |Z_i|^2} \begin{pmatrix} |Z_1|^2 & \bar{Z}_1 Z_2 \\ Z_1 \bar{Z}_2 & |Z_2|^2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\sum |Z_{ij}|^2} \begin{pmatrix} -|Z_{23}|^2 & \bar{Z}_{13} Z_{23} \\ Z_{13} \bar{Z}_{23} & -|Z_{13}|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} |y_1|^2 & \bar{y}_1 y_2 \\ y_1 \bar{y}_2 & |y_2|^2 \end{pmatrix} + (\lambda_2 - \lambda_3) \begin{pmatrix} -|y_{23}|^2 & \bar{y}_{13} y_{23} \\ y_{13} \bar{y}_{23} & -|y_{13}|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. これから

$$\phi_{1-t}(S^3) = \left\{ \sqrt{t}y = (\sqrt{t}y_1, \sqrt{t}y_2, \sqrt{t}y_{23}, \sqrt{t}y_{13}) \mid y \in S^3 \right\}$$

となっていることを確かめることができる. 特に t が小さくなっていくと球面が小さくなっていき, $t = 0$ で X_0 の特異点につぶれることが分かる.

参考文献

- [1] V. Alexeev and M. Brion, *Toric degenerations of spherical varieties*, Selecta Math. (N.S.) 10 (2004), no. 4, 453–478.
- [2] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds*, Acta Math. 184 (2000), no. 1, 1–39.
- [3] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties* (English summary), J. Differential Geom. 62 (2002), no. 2, 289–349.
- [4] I. M. Gel'fand and M. L. Cetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 71, (1950) 825–828.
- [5] A. Giacobbe, *Some remarks on the Gelfand-Cetlin system*, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 10591–10605.
- [6] N. Gonciulea and V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties*, Transform. Groups 1 (1996), no. 3, 215–248.
- [7] V. Gulemin and S. Sernberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 106–128.

- [8] M. Kogan and E. Miller, *Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand-Tsetlin polytopes*, Adv. Math. 193 (2005), no. 1, 1–17.
- [9] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda, *Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions*, in preparation.
- [10] W.-D. Ruan, *Lagrangian torus fibration of quintic Calabi-Yau hypersurface I: Fermat quintic case*, Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), 297–332, math.DG/9904012.
- [11] D. P. Zelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.