

IV Core の問題 (1)

金 森 博 雄 (東大理)

core のことを知るためには，そこでの圧力 P ，温度 T ，密度 ρ などを知らなければならないが，それらの量は core をとり囲む mantle における P ， T ， ρ によつて影響される。そこではじめに地球内部の P ， ρ がどのような地球物理的な手続きで決められるか，それにはどのような不確定さがあるか，また得られた結果について地球物理ではどのように考えているかを述べる。

§ 1. 地震波の測定

地球内部の密度 ρ ，圧力 P などの分布をきめる基礎となるのは，地震波の伝播速度の測定である。一般に isotropic な弾性体の中では，よく知られているように 2 種類の波が伝わり得るが，それらの波の速さを

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{compressional wave (p-wave)} ; \text{速度 } V_p \\ \text{shear wave (s-wave)} ; \text{速度 } V_s \end{array} \right.$$

とする。内部の状態が中心からの距離 r だけの函数だと仮定すれば，震源からの angular distance の函数として波の到着時間から V_p ， V_s の分布を求めることは積分方程式を解く問題に帰着する。^{*} いくつかの仮定のもとに得られた結果を図 4-1 に示す。

* 実際には速度分布について多少の制約が必要である。

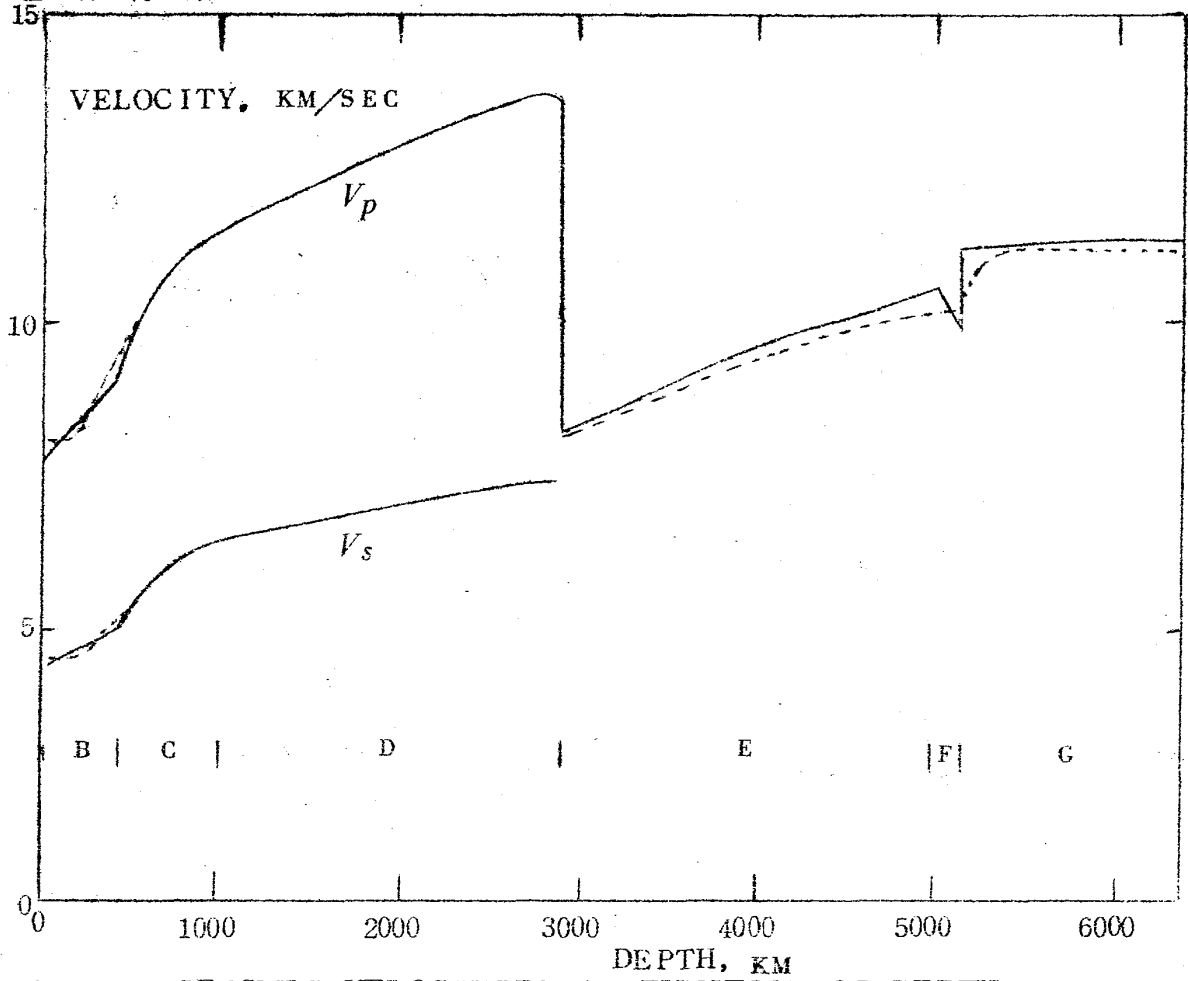


図 4-1. SEISMIC VELOCITIES AS FUNCTION OF DEPTH

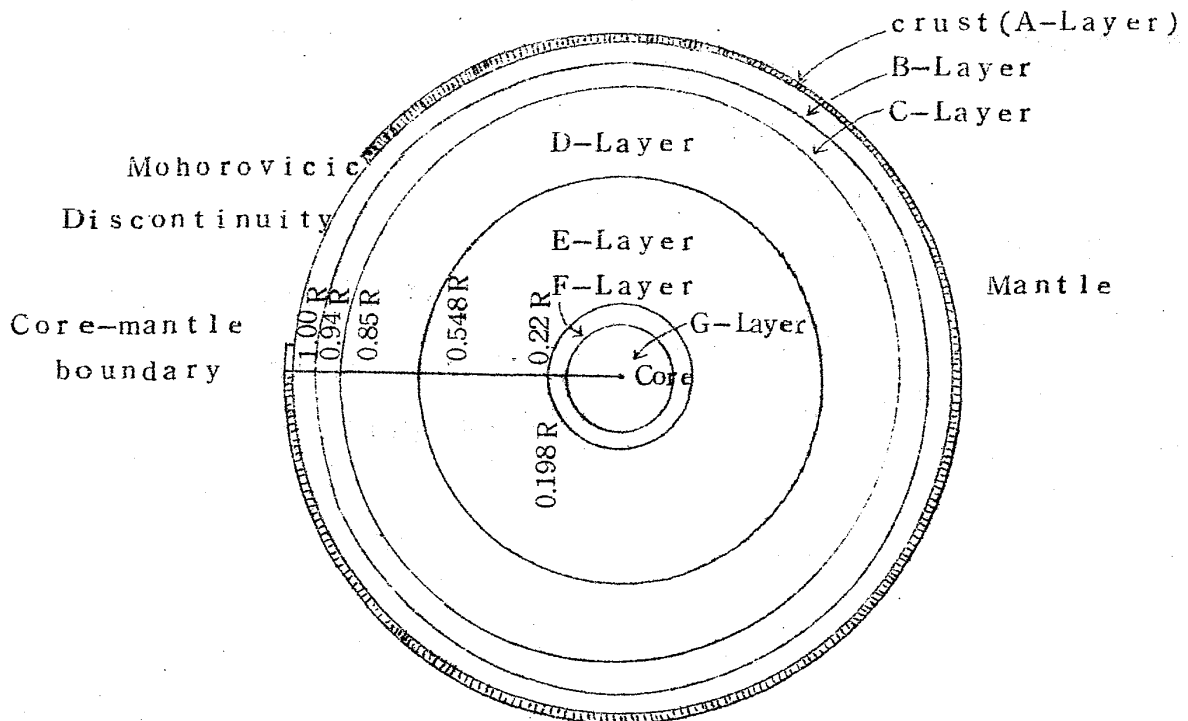
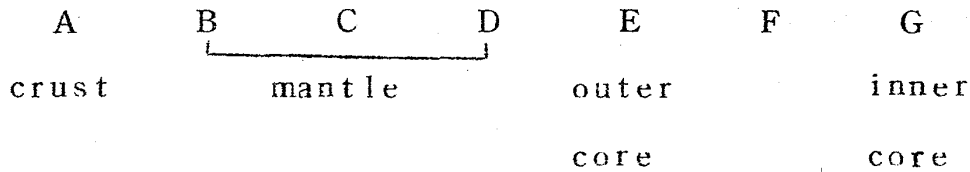


図 4-2. 地球の層構造 (Bullen)

これらの分布から地球内部を便宜上 A ~ G の layer structure と考えることができる。(図 4-2)



mantle-core の discontinuity のために、波が屈折して波の到着しないところ (shadow zone) が生じるが、これから core の存在が確かめられる。mantle-core の boundary は、ここでの波の反射が非常にはつきりおこることなどからみて、非常に sharp (巾 ~ 数 km) なものであると考えられている。

§ 2. Density distribution

K_s : adiabatic incompressibility, μ : 剛性率とすると, V_p , V_s は

$$V_p = \sqrt{\frac{K_s + 4\mu/3}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (4-1)$$

と表わされるがわかっているのはこれだけで、これから ρ を求めるにはいくつかの仮定が要る。

Assumption

(a) hydrostatic pressure : i.e.

$$dP = -\rho g dr \quad (4-2)$$

(b) chemical homogeneity, (phase change もない) : i.e.

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{K_T} \quad (4-3)$$

K_T : isothermal incompressibility.

(c) adiabatic temperature gradient.

もし (a)~(c) を仮定すれば，密度変化が断熱圧縮だけで起ることになるから

$$d\rho = \frac{\rho}{K_s} dP = -\frac{\rho g}{\phi} dr$$

$$\therefore \frac{d\rho}{dr} = -\frac{G\rho m}{\phi r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (4-4)$$

ただし， $\phi = V_p^2 - (4/3) V_s^2 = K_s/\rho$ でこれは地震波の観測結果から導かれる量， G は gravitational const, m は r より内部の mass である。地表での値 (m_0, ρ_0) は知られているから，地球内部が homogeneous であれば，(4-4) を m_0, ρ_0 を初期値として積分すれば， $\rho(r)$ は決められる。実際には地球は層構造をしているので (4-4) を地球表面から中心まで積分することはできない。しかし，(4-4) は各 homogeneous layer については成り立ち，各層についての初期値 (m_0, ρ_0), (m_1, ρ_1), …… が知られていれば，各層について ρ の分布を定めることができる。実際に知られているのはこれらのうち

$$m_0 (\text{total mass of the earth}) = 5.976 \times 10^{27} \text{ g}$$

$$\rho_0 (\text{density at the surface}) \cong 3.32 \text{ g/cm}^3$$

だけである。地球内部の不連続面の数は少なくとも三つ以上あると考えられているから，この問題は "indeterminate" である。

しかし，これらに二，三の条件及び仮定をつけ加えると，地球内部でのものとも確からしい密度分布を定めることができる。それらの条件及び仮定は：

(1) 地球の慣性能率 I が 6.77×10^{44} c.g.s. であること。(天文学的観測から定められる。)

(2) 地球の core の慣性能率を I_c とすれば，

$$I_c = x R_c^2 M_c \quad (R_c: \text{core の半径}, M_c: \text{core の質量})$$

と書ける。もし core が密度の一樣な球であれば $x = 0.4$ であるが，core

は実際には液体と考えられるから中心ほど ρ が大きいはずで、したがって

$$I_c < 0.4 R_c^2 M_c \quad (4-5)$$

でなければならない。

(3) C 層は homogeneous とは考えられない(後述)ので $\rho(r) = ar + br^2$ とおく。

これらの仮定, 条件をとると, ρ の分布決定の手続きは $(m_1, \rho_1), \dots, a, b$ を適当にとつて (4-4) を解き, I, I_c を適当に与えるように $\rho(r)$ を決めることになる。

一たび $\rho(r)$ が求まると, $g(r), P(r)$, 種々の elastic constants もつぎの式などによつて決めることができる。

$$g(r) = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (4-6)$$

$$P(r) = \int_r^R \rho(r') g(r') dr' \quad (4-7)$$

得られる結果を図 4-3, 4-4 に示す。inner core はその全質量の地球の全質量に対する比が小さいのでそこでの $\rho(r)$ についての不確定さは大きい。しかし total mass がおさえられているので $P(r)$ の方がよく決り, 地球中心における値も信頼できる。

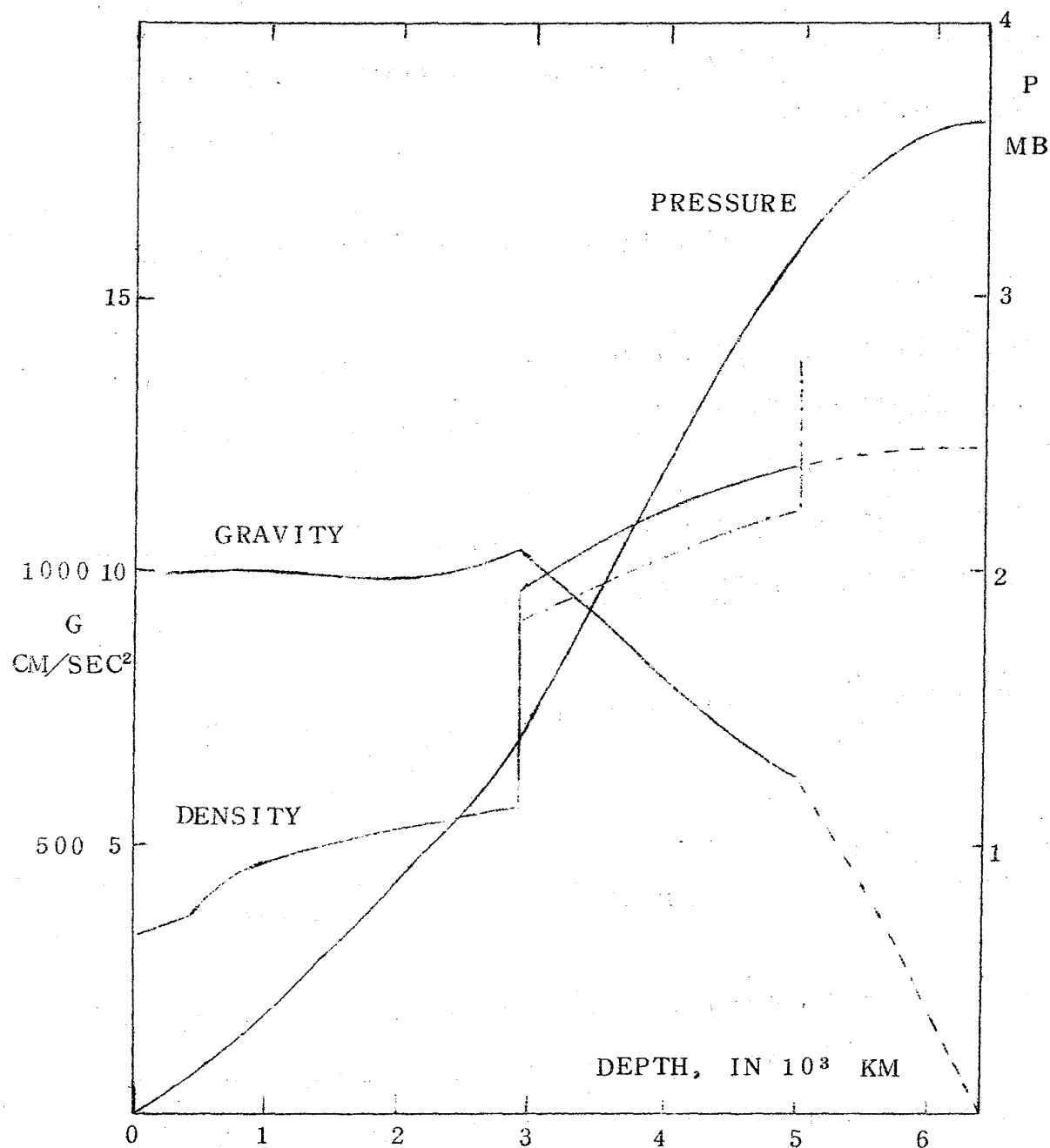


图 4-3. DENSITY, PRESSURE, AND ACCELERATION
WITHIN THE EARTH (AFTER BULLEN)

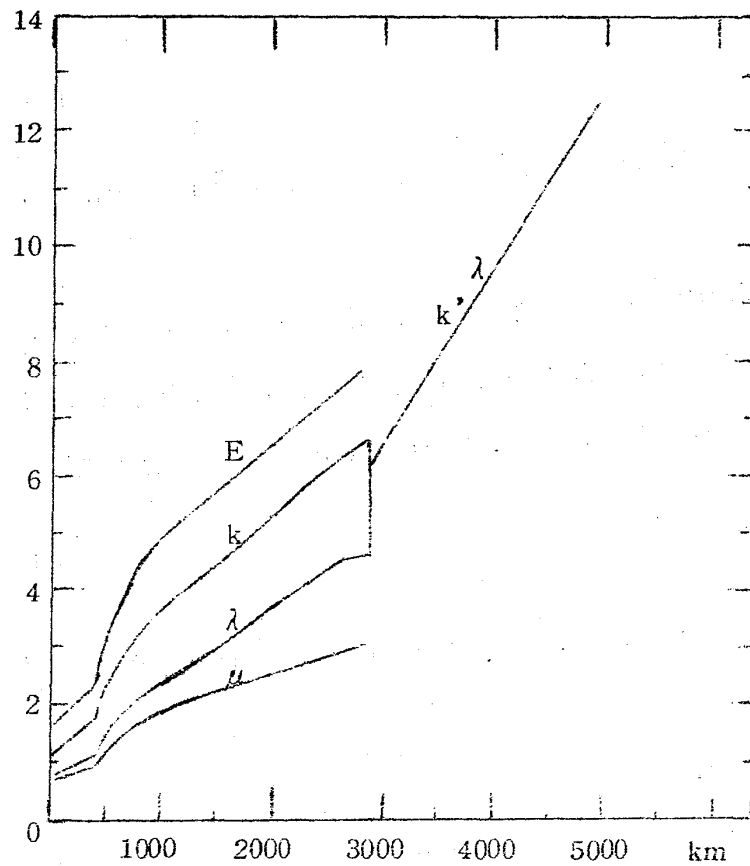


図 4-4. Variation of elastic constants (in 10^{12} dynes/ cm^2) with depth in kilometers (Bullen, 1947)

E : ヤング率 . k : incompressibility

λ, μ : Lamé の定数

Non-adiabatic temperature gradient

つぎに仮定(c) をはずすとどうなるかを考える。 $-\tau$ を non-adiabatic temperature gradient とすれば,

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_s - \tau = - \frac{T \alpha g}{C_p} - \tau \quad (4-8)$$

これから

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dr} = - \frac{\rho g}{\phi} + \alpha \rho \tau$$

$$= - \frac{\rho g}{\phi} \left(1 - r \frac{C_p \tau}{g} \right) \quad (4-9)$$

但し, α は volume thermal expansion, r は Grüneisen const である。

$r = 1 \sim 2$, $g \simeq 1000$ cgs, また C_p としては高温の C_v で代用して $6 \text{ cal/deg.mol} \simeq 10^7 \text{ erg/g.deg}$ (平均の原子量を 20 とした) ととると, $\tau \simeq 1 \text{ deg/km}$ ($(\partial T / \partial r)_s$ は 0.2 deg/km の程度) としても

$$r \frac{C_p \tau}{g} \sim 10^{-1} \quad (4-10)$$

となり, non-adiabatic temp. gradient の効果は, たかだか 10 % の程度と考えられる。

Chemical inhomogeneity

つぎに仮定 (b) をはずしたばあいを考える。このばあいには, 密度の深さによる増加は

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= -\rho g \frac{d\rho}{dP} = -\frac{\rho g}{\phi} \frac{K_s}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \equiv -\frac{\rho g}{\phi} \eta \\ \eta &= \frac{K_s}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \end{aligned} \quad (4-11)$$

ここに導入した η は homogeneous のとき (4-9) により $(1 - r C_p \tau / g)$ になることが判る。

η の表現に chemical inhomogeneity の影響を加えるために, ここでは chemical inhomogeneity として次の 2 種類のことを考えることにする。

(1) 化学組成が変化する場合

この場合の例としては, Forsterite ($\text{Mg}_2 \text{SiO}_4$) が Fayalite ($\text{Fe}_2 \text{SiO}_4$) におきかわる場合がある。このような場合を一般的に表わす,

パラメーターとして mean atomic weight w (1 モルあたりのグラム数を原子数でわつたもの) をとることにする。上の例では

Forsterite (Mg_2SiO_4) Fayalite (Fe_2SiO_4)

$$w = 20.10 \text{ g}$$

$$w = 29.11 \text{ g}$$

$$\rho = 3.21 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho = 4.34 \text{ g/cm}^3$$

であり, $\frac{\Delta\rho}{\Delta w} = 0.13 \text{ cm}^{-3}$ である。

(2) 結晶構造が変化する場合

この場合の例としては, phase change

olivine $\rightarrow$ spinel

quartz $\rightarrow$ coesite $\rightarrow$ stishovite

pyroxene $\rightarrow$ corundum

等の場合が考えられる。この場合のパラメーターとしては仮に closeness of packing y をとることにする。これ等の phase change に伴う密度の変化は,

quartz ($\rho = 2.6 \text{ g/cm}^3$) $\rightarrow$ coesite ($\rho = 2.9 \text{ g/cm}^3$) $\rightarrow$

stishovite ($\rho = 4.2 \text{ g/cm}^3$)

であり, 又 olivine $\rightarrow$ spinel transition による密度増加は約 10 % である。

この 2 つのパラメタ w , y を用いると, η は,

$$\eta = \frac{K_s}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = - \frac{K_s}{\rho^2 g} \frac{d\rho}{dr} = - \frac{K_s}{\rho^2 g} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_{\text{chemically homogeneous}} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w} \right)_{T,P,y} \frac{dw}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{T,P,w} \frac{dy}{dr} \right]$$

$$= (1 - r C_p \tau / g) - \frac{K_s}{\rho^2 g} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial w} \right)_{T,P,y} \frac{dw}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{T,P,w} \frac{dy}{dr} \right] \quad (4-12)$$

となる。 $(\partial \rho / \partial w)_{T,P,y}$ $(\partial \rho / \partial y)_{T,P,w}$ 等は前の例で示した様に色々な物についてある程度見つめることができるが，地球内部での $dw/dr, dy/dr$ を現在見つめることができないのでこの η を用いて(4.11)を積分することは出来ないが(4-12)は，内部構造についての各種の議論において極めて有用である。

§ 3. Finite strain theory

物体に有限の歪が生じ，物体上の点が (x_1, x_2, x_3) から (y_1, y_2, y_3) に移動したとする。このとき， (x_1, x_2, x_3) ， (y_1, y_2, y_3) における線素をそれぞれ ds_x, ds_y とすると，

$$ds_x^2 = dx_i dx_i, \quad ds_y^2 = dy_i dy_i$$

$$ds_x^2 - ds_y^2 = \left(\delta_{ik} - \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k \equiv 2\epsilon_{jk} dx_j dx_k$$

(4-13)

ここで ϵ_{jk} はstrain tensorの (i, j) 成分を表わす。

Hydrostaticのときに話を限ると，

$$x_i = y_i + \alpha y_i \quad (4-14)$$

と表わすことができ，これから

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{1}{1+\alpha} \delta_{jk},$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \frac{1}{2} [1 - (1+\alpha)^{-2}] \equiv \epsilon,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1+\alpha)^{-3} = (1-2\epsilon)^{\frac{3}{2}} = (1+2f)^{\frac{3}{2}} \quad (4-15)$$

が導かれる。ここで $f = -\epsilon$ は compression を表わすパラメーターである。

弾性論から、等温変化については、strain energy は Helmholtz の free energy に等しいことが導かれる。strain energy は thermal stress のようなものを考えない限り、strain の 2 次以上の項で表わすことができるはずだから、Helmholtz の free energy Ψ を f について展開し、

$$\Psi = af^2 + bf^3 + \dots \quad (4-16)$$

と表わすことができる。係数 a は $f \rightarrow 0$ での incompressibility から求めることができる。(4-15), (4-16) と

$$P = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial V} \right)_T$$

より状態方程式 ($T = \text{const}$) を求めると

$$P = 2K_0 f (1 + 2f)^{\frac{5}{2}} (1+B)$$

$$= \frac{3}{2} K_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] (1+B) \quad (4-17^*)$$

ここで、 B は (4-16) の f^3 以上の項からの寄与を表わす。

この結果を高圧実験の結果と比較すると、比較的 compressive な物質については $B=0$ で $\rho/\rho_0=2$ のあたりまでよく一致している。incompressive な物質については、 $B=0$ でよいかどうか判らないが、このばあいには f も

* Thomas Fermi の理論によれば、高圧下で degenerate state にある物質の $P \rightarrow \infty$ での漸近式は、 $P \sim \left\{ \left(\rho/\rho_0 \right)^{5/3} - \left(\rho/\rho_0 \right)^{4/3} + \dots \right\}$ となる。これは $\rho^{5/3}$ から始まるので (4-17) とは $P \rightarrow \infty$ において本質的に一致しない。この違いを説明するために、 ψ に atom 間の binding force を考慮した項をつけ加える試みがなされているが、未だ完全でない。

小さいので、通常は(4-16)の f^3 以上の項の寄与を無視して議論する。

$B=0$ のとき K_T は

$$K_T = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = K_0 (1+2f)^{\frac{5}{2}} (1+7f), \quad (4-18)$$

これから

$$\left(\frac{\partial K_T}{\partial P} \right)_T = \frac{12+49f}{3(1+7f)} \quad (4-19)$$

Compressibility-pressure hypothesis

地球内部の K_s の分布(図4-4)をみると、mantle と coreでは物質が異なるにもかかわらず、 K_s に大きな差がないように見える。

このことは物理的にもある程度示しうることである。即ち、Finite strain theory では、圧力 P のもとにおける二つの物質 A, B の K_A, K_B の比は

(4-17), (4-18) から

$$\frac{K_{0A} f_A (1+2f_A)^{\frac{5}{2}}}{K_{0B} f_B (1+2f_B)^{\frac{5}{2}}} = 1$$

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{K_{0A} (1+2f_A)^{\frac{5}{2}} (1+7f_A)}{K_{0B} (1+2f_B)^{\frac{5}{2}} (1+7f_B)}$$

ここで、 K_{0A}, K_{0B} は $P=0$ におけるそれぞれの incompressibility である。一例として $K_{0A}/K_{0B}=1.83$, $f_A=0.1$ とすると、 $K_A/K_B=1.24$ となり圧力が大きくなると K の物質により差は小さくなる。これらのことから

「高圧の limit で compressibility は物質によらない。」という仮説が得られる。

§ 4. Chemical inhomogeneity

地球内部での chemical inhomogeneity, phase change の有無を知るにはつぎのようにする。

homogeneous なときには (4-9), (4-11) からつぎの式が成り立つ。

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha \phi \tau}{g} \right) = \phi \frac{d\rho}{dP},$$

ここで $\rho = K_s / \phi$ なる関係を用いると,

$$\eta = 1 - \frac{\alpha \phi \tau}{g} = \frac{dK_s}{dP} + \frac{1}{g} \frac{d\phi}{dr}$$

が得られるが, 熱力学の公式 $K_s = K_T (1 + T \alpha r)$ を用いると, これから

$$1 - \frac{1}{g} \frac{d\phi}{dr} = \left(\frac{\partial K_T}{\partial P} \right)_T + T \alpha r A + (T \alpha r)^2 B + \alpha \phi \tau g^{-1} C$$

が導かれる。ここで, A, B, C は $(\partial K_T / \partial P)_T, \tau, K_T^{-1} (\partial K_T / \partial T)_P, \alpha^{-2} (\partial \alpha / \partial T)_P, C_p, C_v$ 等の函数である。

各種の高圧実験から得られた結果を総合すると,

$$\left(\frac{\partial K_T}{\partial P} \right)_T = 2 \sim 4, \quad \tau = 1.5 \quad \frac{1}{\alpha K_T} \left(\frac{\partial K_T}{\partial T} \right)_P = -4,$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_P = 4 \sim 5 \text{ (above Debye temperature)}$$

等であり, 地球内部の温度の大体の推定値を用いると, B についての項は無視できる程度になり, A と C の平均的な値はそれぞれ $-5, -2$ 程度となる事が予想される。そこで, 化学的に一様な地球についてはつぎの關係を得る。

$$1 - \frac{1}{g} \frac{d\phi}{dr} = \left(\frac{\partial K_T}{\partial P} \right)_T - 5 T \alpha r - 2 \tau \alpha \phi / g \quad (4-20)$$

この式の左辺は地震波の観測結果から導かれるものであり, 右辺第一項は地

球内部での compression f が大体判っているから，有限歪の理論の所で導いた式 (4.19) から評価することができる。又，第2項，第3項は第1項に較べるとかなり小さい (10 % 程度) 量であり，地球内部での T, α, r, g の推定値を用いて評価することができる。図 4-6 には $\odot, \circ$ で観測から得られた $1 - g^{-1} (d\phi/dr)$ ，実線 で理論的に推定される右辺第一項を示してある。

第2項，第3項の影響があるからこの線はある程度の中を持つて解釈されねばならない。しかし，この図において， $\circ, \odot$ と実線がひどく違っている場合には，そこでは，化学的に一様でないと考えられるし，よく一致している所では，大体化学的に一様であると考えても差し支えない。但し，温度分布については，(4-20) が T に敏感でないため，はつきりした事は言えない。ともかく，この様な比較から，C 層では homogeneous とは考えられないが，他の層では大体 homogeneous である様に見える。特に D 層 (マントル下層) では，観測値と理論値の一致が著しい事が注目される。

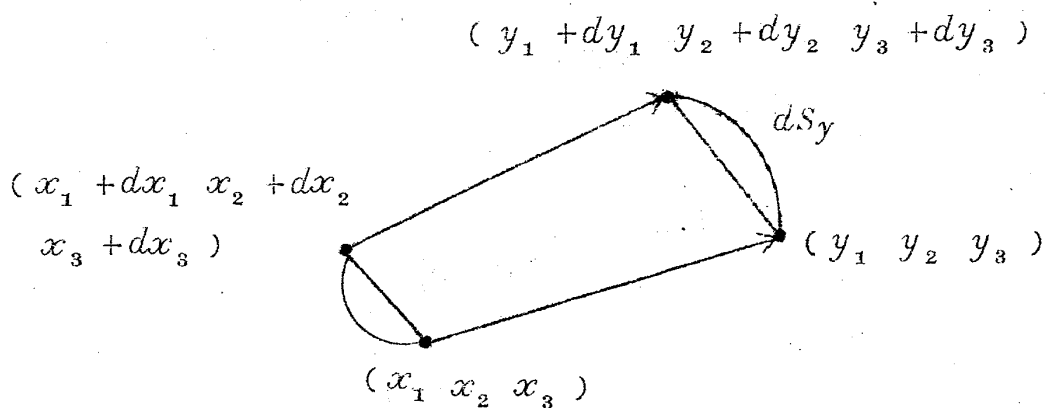


図 4 - 5

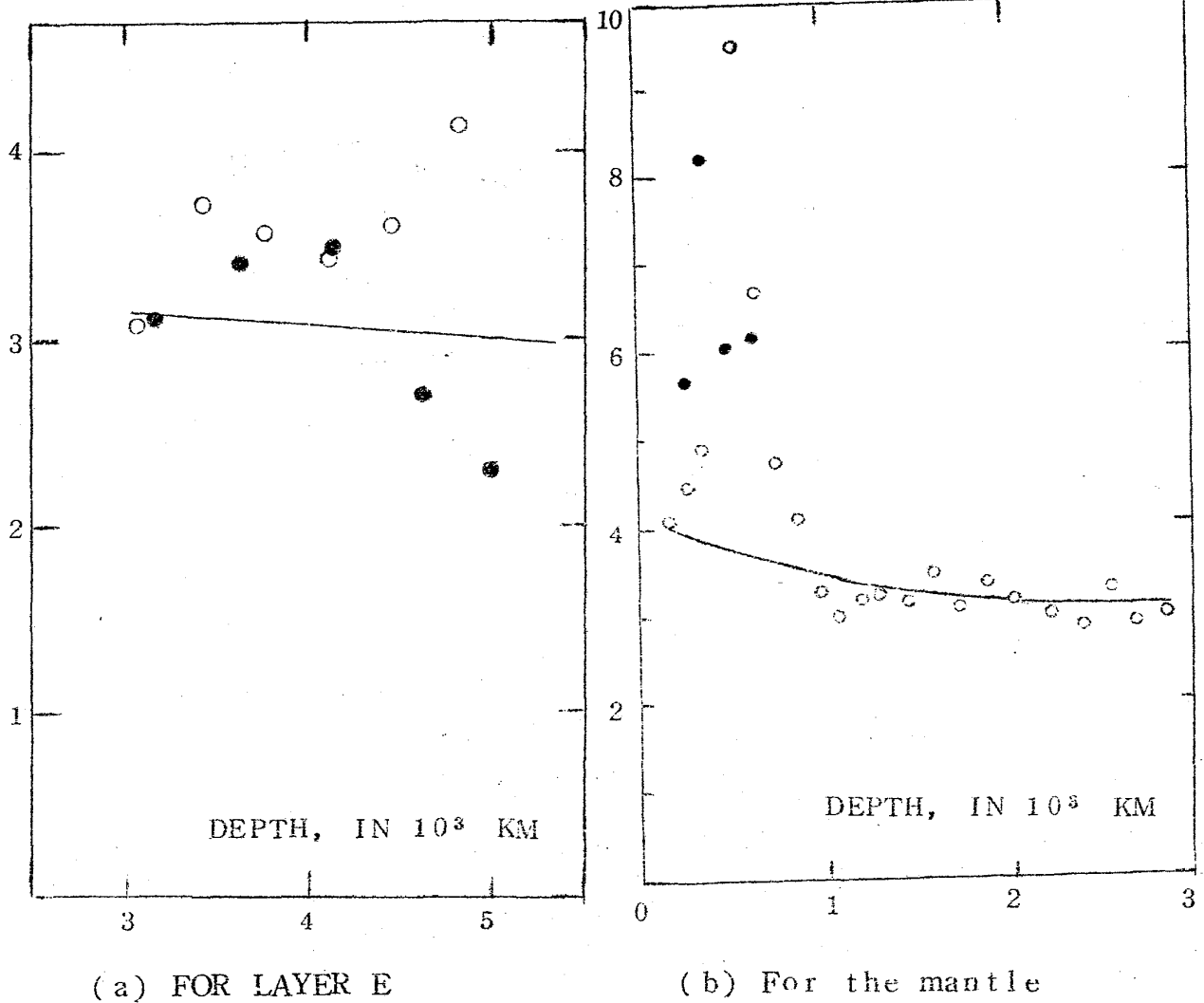


図 4-6. The function $1 - g^{-1} \Delta\phi / \Delta r$

§ 5. Core の構造

Core 中での地震波の速さの分布は、色々な悪条件がかさなるために、現在でも、非常に確定的なものはない。図 4-1 に示したものの他に図 4-7 に最も新しく報告されたものを示しておく。通常分類では、layer E を outer core と呼び、layer G を inner core と呼ぶが、図 4-7 に示したものについては layer E'', F.G をあわせて lower core と呼ばれることもある。

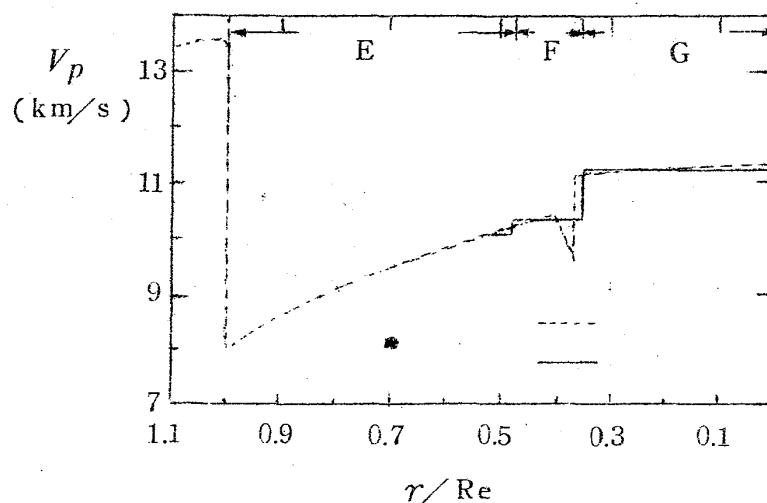


図4-7. Coreにおける V_p の分布

Outer core

outer core を構成する物質は，Fe を主成分とするという見方が普通である。根拠は：

- (1) iron meteorite (隕鉄) が core に相当するという考え。
 - (2) shock wave の実験で種々の element の高圧下の ρ と $(\partial P / \partial \rho)^{1/2}$ の関係が得られている。また実際の core についてこれに対応する関係は地震波の観測から得られるが，これは shock の実験の Fe のあたりに一番近い。
- (図 4 - 8)

(3) Fe について finite strain theory, Thomas-Fermi model による $\rho - P$ 曲線をそれぞれひき，中間の圧力領域について interpolate すると core のばあいによく一致する。(図 4 - 9)

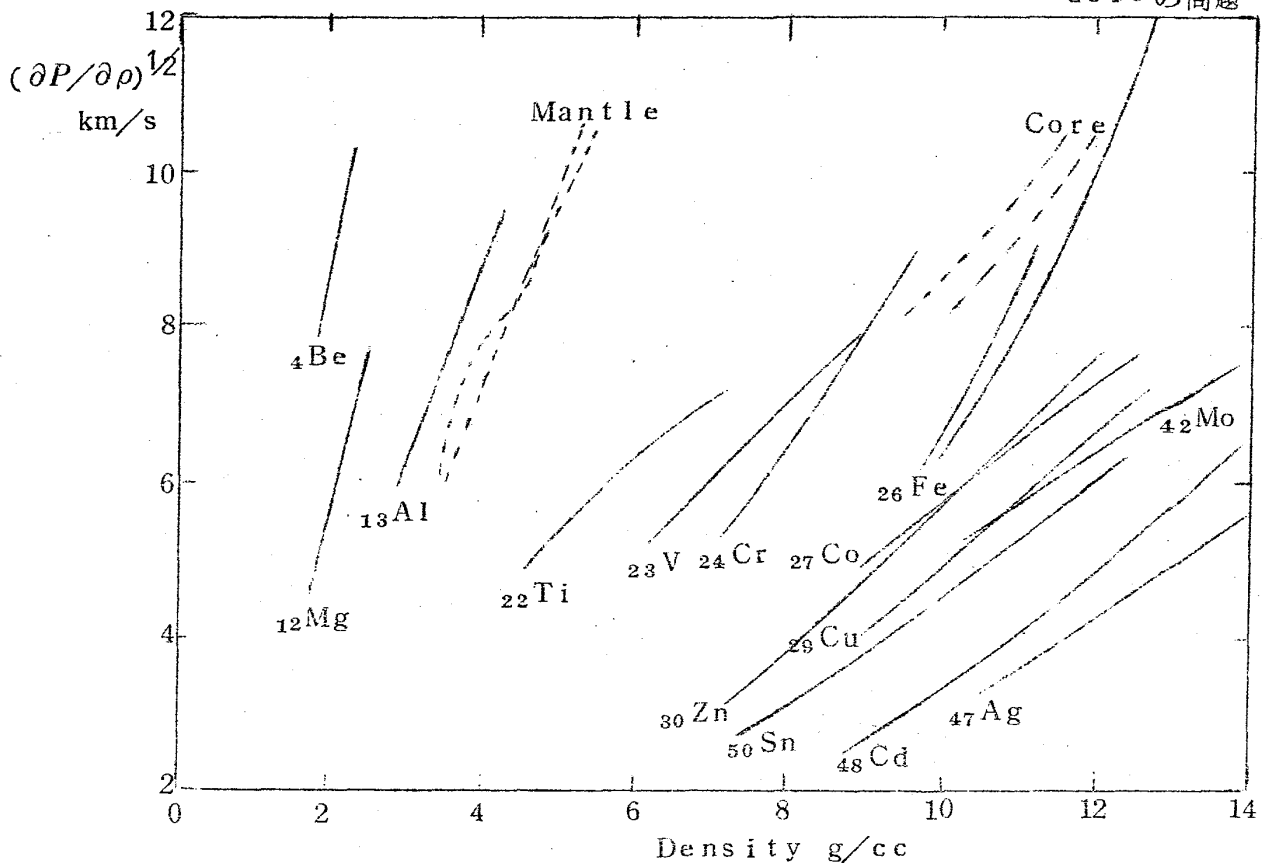


図 4-8. Hydrodynamical sound velocity as function of density for metals and for the Earth's mantle and core.

The velocities for the metals are from shock-wave studies to pressures of several megabars, principally by McQueen and Marsh. The second curve for iron represents the work of Al'tshuler & others. The numbers are atomic numbers.

これらのことから, outer core は Fe に多少の Si などの軽い element が入ったものと考えられる。

これに対して, core を silicate の metallic phase だとする考え (Ramsey) もある。しかし多成分の silicate が sharpe な phase change をおこすことは期待できず, ここでは mantle core boundary の sharpness は説明できないとする反論もある。それと, このばあい metallic phase でありながら液体であるということにいささか不自然な所が感じられる。

outer core は液体とみられているが, その理由は

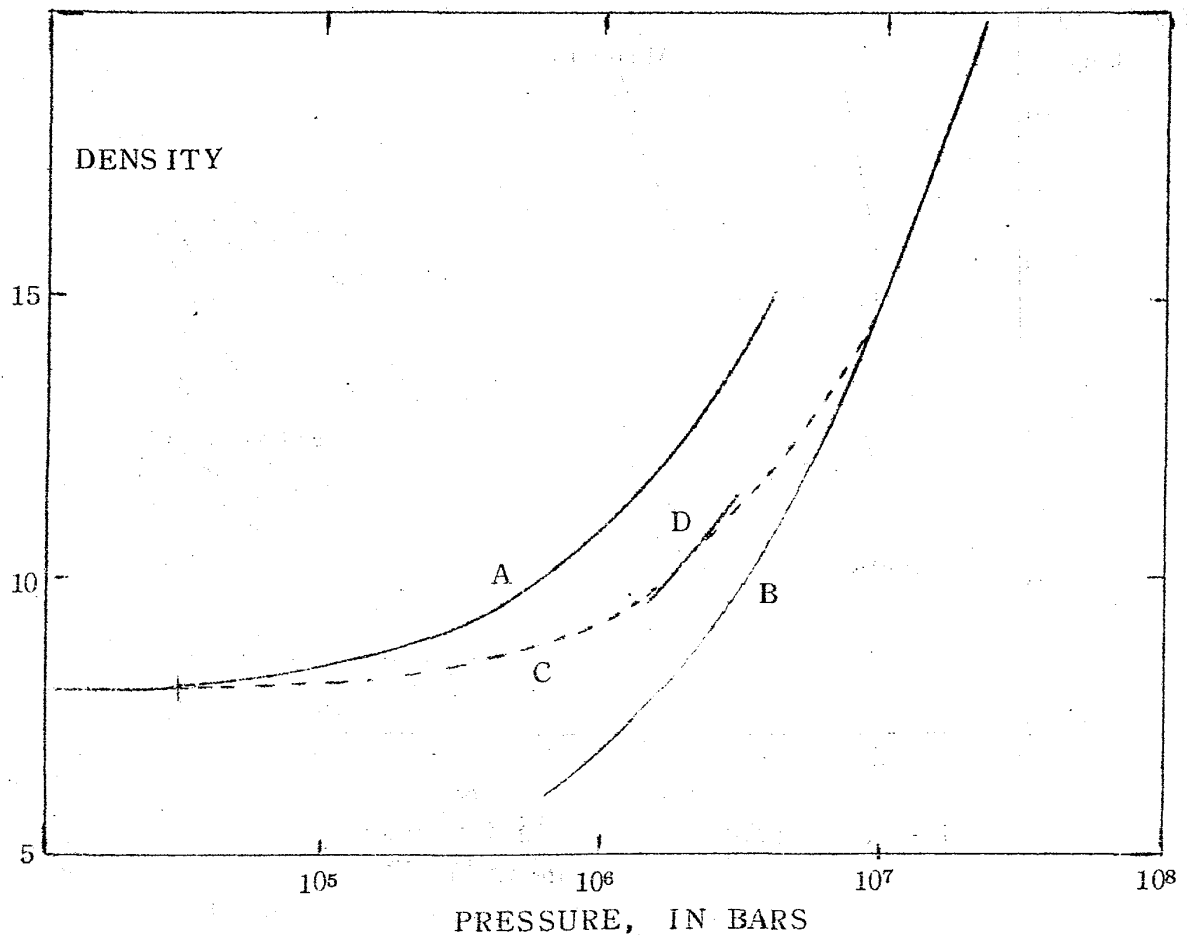


図 4-9. ESTIMATED DENSITY OF IRON AS FUNCTION OF PRESSURE

- A : Murnaghan curve for Fe
- B : Thomas-Fermi curve for Fe (Jensen)
- C : Jensen's interpolation
- D : Earth's core (Bullen)

- (1) s-wave が伝わらない,
- (2) 液体と考えると, 地球潮汐等の地球全体の運動についての観測結果がよく説明できる,
- などのことによる。

Inner core

普通 inner core は固体であると考えられている。その理由の一つは,

先にのべた compressibility hypothesis により k は inner core でも outer-core とあまり変わらないとすると, V_p を増すために, ρ が減る事は考えにくいので, どうしてもここでは μ がかなりの程度に大きいと考えるのが自然であること。もし Fe であるとする, ここで推定される ρ , K から inner core のポアソン比 σ は 0.35 位になることになり, かなり“硬い”固体になる。(液体のポアソン比は 0.5)

しかし, 現在迄の所 inner core の中を伝わった s-wave が観測されていないことから, inner core も液体だとする説がある。このとき V_p の増加を説明するのに, inner core に図 4-10 のように強い磁場 B があると考え。そうすると波の速さは $B=0$ のときの値 V_p から

$$V_p' = \sqrt{V_p^2 + V_h^2},$$

$$V_h = B^2 / 4\pi\rho \quad (4-22)$$

に変わる。(V_h は Alfvén wave の速さ) しか
し, V_p が 10 % 増すためには $B = 5 \times 10^5 \sim 6$ G

でなければならない。これは地磁気の dynamo

理論から想定される toroidal field (VI 参照)

の $10^2 \sim 3$ 倍という値で, この説明には無理があるように思われる。

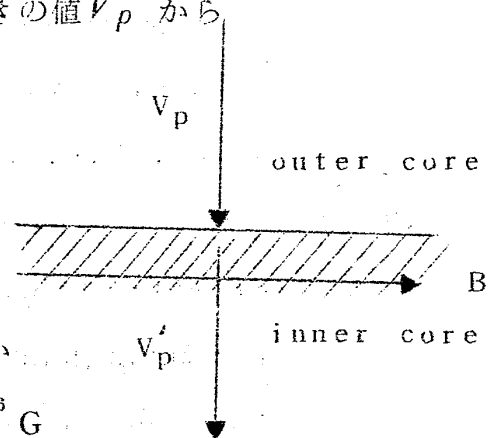


図 4-10.

Discussions

△成分が複雑でも phase change である限り transition は sharp であつてよいのではないか。boundary の sharpness だけでは core を silicate の metallic phase だとする説を否定することにはならぬと思う。

△silicate の metallic phase だとすると, 非常に融点の高いもの

が融解していることになり，その点からも無理があるように思われる。

References

- \$1 1) Bullard, E.C. (1954). The Interior of the Earth.
In: The Earth as a Planet, ed. Kuiper, pp. 57-136.
University of Chicago Press.
- 2) Bullen, K. E. (1959). An Introduction to the Theory
of Seismology. London : Cambridge Univ. Press.
- \$2 3) Birch, F.(1952). Elasticity and Constitution of the
Earth's Interior. J. Geophys. Res., 57, pp.227-286.
- 4) Bullard, E.C. (1954).loc.cit.,(1).
- 5) Bullen, K.E. (1959). loc.cit.,(2).
- \$3 6) Birch, F. (1938). The Effect of Pressure Upon the
Elastic Parameters of Isotropic Solids, According
to Murnaghan's Theory of Finite Strain. Journal of
Applied Physics, 9, pp. 279-288.
- \$4 7) Birch, F. (1952). loc. cit., (3).
- 8) Bullen, K. E. (1963). An Index of Degree of Chemical
Inhomogeneity in the Earth. Geophys. J., 6, pp.
584-592.
- \$5 9) Bolt, B.A. (1962). Gutenberg's Early PKP Observations.
Nature, 196, pp. 122-125.
- 10) Knopoff, L. and MacDonald, G.J.F. (1958). The
Magnetic Field and the Central Core of the Earth.
Geophys. J., 1, pp. 216-223.