

On zeta functions of symmetric matrices and dimensions of Siegel modular forms

大阪大学教養部

伊吹山 知義 (Tomoyoshi Ibukiyama)

京都大学人間環境学研究科 齋藤 裕 (Hiroshi Saito)

1 前書き

本稿では、対称行列のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数を具体的に知られた関数で書き下し、その応用として torsion free な合同部分群に関する n 次ジーゲル保型形式の次元の完全に具体的な予想を与える。一般に概均質ベクトル空間のゼータ関数は、関数等式は持つが、オイラー積は持たない。これらの内の一部のゼータ関数は（オイラー積を持たないにも関わらず）有界対称領域上の保型形式の次元公式や幾何学的不変量などとの結びつきがあり、整数論的にも非常に興味深い対象である。たとえば前者については、ジーゲル保型形式に関する森田（康）、新谷両氏の研究があり（cf. [6], [8]）、後者については formally real Jordan algebra または self-dual homogeneous cone のゼータ関数に関わる佐武先生、尾形、石田氏等の研究がある（[7] およびその文献表参照）。いずれにおいても、ゼータ関数の 0 以下の整数値での値が次元公式の一部またはある種の幾何学的不変量として現れる。従ってこれらの値が有理数であることを期待するのはかなり自然である。（cf. Satake-Ogata [7]）このような特殊値については、従来、新谷先生の研究の流れをくむ contour integral による研究が佐武先生、栗原（章）氏、荒川氏等により試みられてきた。実際には、これらの方法にはいくつかの前提条件ないしは問題点があって、特殊値が本当に有理数であることがわかる場合は限られていたように思う。一方で、ゼータ関数自身を具体的に書く試みはほとんどなされてこなかったように思う。たとえば n 次対称行列のなすベクトル空間

V_n に対する概均質ベクトル空間 $(GL(n), V_n)$ に付随するゼータ関数（ジーゲル保型形式に
関係する場合）について言えば、 $n \geq 3$ では筆者の知る限りゼータ関数を具体的に書く試
みは全くなされていなかった。また特殊値についても、 $n = 3$ のときの 0 での値が、次元
公式とのからみで Riemann-Roch および Selberg trace formula を両方あわせて考えるとい
う非常に複雑な方法の副産物として知られていたのみである。（橋本・対馬氏、また $n = 2$
は古典的で Siegel、森田氏による。）実際、荒川氏の研究（ $n = 2$ の L 関数）にみるよう
に、contour integral で特殊値を計算するのは、いかにも大変である。このような事情も
あって、いままでは、特殊値を求めるのは難しく、また、たとえこれがきれいな量である
としても、ゼータ関数自身は（オイラー積も持たないことでもあるし）複雑怪奇な関数で
はないかと誤解されてきた嫌いがある。しかし実際には非常に簡単な具体的記述ができる
ことが示される。このゼータ関数の具体的公式を用いてほとんどすべての知られていた結
果の別証と多くの新結果が得られる。たとえば非正整数での特殊値は具体的にベルヌーイ
数の積で書けることが示される。われわれの証明においては既存の概均質ベクトル空間の
理論は全く使用しない。しかし証明は結果の単純さに比してかなり複雑でありハッセの原
理などの大域局所理論、ジーゲルの mass formula その他を用いる。

2 問題と結果の概要

まず多少一般的な形で問題を述べてみたい。問題として述べるにはいささかおおげさに
すぎるかもしれないが、少なくとも以下の方向での端緒は現れてきていると思う。

問題 1：任意の有界対称領域 D の、（torsion free な）算術的離散群 Γ についての保型
形式の具体的な次元公式を与えよ。

この問題はもちろん、極大放物型部分群の巾単根基の中心が formally real Jordan algebra の構造を持つことを通じて、cone のゼータ関数と密接な関係がある。従って、

問題 2 : なるべく多くの概均質ベクトル空間のゼータ関数を知られた関数、つまり代数体の各種のゼータ関数やアイゼンシュタイン級数（正則または実解析的）に付随するディリクレ級数等で具体的に書け。また、その特殊値を求めよ。

ということが問題となる。しかし、たとえばエプシュタインゼータ（もちろん概均質のゼータの一種）を考えてもわかるように、一部は尖点形式のディリクレ級数も内包しているのであるから、任意のゼータ関数（の係数）が完全に具体的に書けるなどということはいえない。概均質ベクトル空間 (G, V) および V の格子 L について、 L を含む “ G -genus” についての「ゼータの平均値」についてジエゲル公式の類推で、何らかのアイゼンシュタイン級数に近いものになってい、またそのようなものに対しては特殊値が比較的易しいと思うのが自然であろう。もちろん G について強近似定理が成り立てば、このような平均化は不要であろう。現在両方の問題に対する一般論は存在しないが、formally real Jordan algebra の典型的な Q -form については、個別的にかなり進展しつつある。しかし、本稿では前に述べた $(GL(n), V_n)$ の場合に限って結果を述べ、その後の進展については別の機会に論じたい。さて、詳しくはあとで述べることにしてわれわれの結果の概要は以下の通りで、その一部は文献 [1] に発表済みである。

1. $(GL(n), V_n)$ のゼータ関数はリーマンゼータ関数の平行移動ないしは重さ半整数の 1 変数アイゼンシュタイン級数に付随するディリクレ級数の積の和である。

2. このゼータ関数はリーマンゼータ関数とアイゼンシュタイン級数のディリクレ級数の関数等式に基づく簡単な関数等式を持つ。これは元々の新谷先生によるゼータ関数のなすベクトルの間の関数等式、および佐武先生によるその対角化ないしは簡易化よりも、我々の公式は更に単純である。
3. 非正整数でのゼータ関数の特殊値はベルヌーイ数の積で具体的に表される。
4. $Sp(n, Q)$ の主合同部分群に関する重さ k の n 次ジーゲル尖点形式への「中心的」べき単元の寄与が $k \geq 2n + 1$ のときに与えられる。
5. torsion free な主合同部分群に関する n 次ジーゲル尖点形式の具体的な次元公式の予想を与えた。
6. その他、 L 関数についてもわかり、ある種の指数和への応用もある。

3 主定理

まずゼータ関数の正確な定義を述べる。 V_n を $n \times n$ の Q -係数対称行列のなすベクトル空間とし、 $G = GL(n, Q)$ が $\rho(g)x = gx^t g$ ($g \in G, x \in V_n$) と作用するとする。さて、整数係数対称行列の集合を L_n 、半整数対称行列の集合を L_n^* と書くと、これらは $SL(n, Z)$ 不変な V_n の lattice である。(逆に $n \geq 3$ なら、 $SL(n, Z)$ 不変な lattice は定数倍を除き L_n または L_n^* に一致する。) V_n^i を符号が $(i, n-i)$ の実対称行列の集合とし、 $SL(n, Z)$ 不変な lattice L に対し、 $L^{(i)} = L \cap V_n^i$ とおく。以下では $n = 2$ かつ $i = 1$ の場合は除く。(この場合は例外的でもあり、また既に新谷先生により結果はわかっている。) L に付随する符号 $(i, n-i)$ のゼータ関数 $\zeta_i(s, L)$ は次で定義される。

$$\zeta_i(s, L) = c_n \sum_{x \in L^{(i)} / \sim} \mu(x) |\det(x)|^{-s}.$$

但し、 $c_n = 2\pi^{-n(n+1)/4} \prod_{k=1}^n \Gamma(k/2)$ であり、また

$$\mu(x) = \int_{Y_0} dg / \int_T (\det(y))^{-(n+1)/2} dy,$$

ここで $dg = (\det g)^{-n} \prod_{1 \leq i, j \leq n} dg_{ij}$, $dy = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dy_{ij}$, であり、 T は V_n^i 内の relatively compact open subset, $x \in L^{(i)}$ に対し $Y = \{g \in GL_n(R); \det(g) > 0; gx^t g \in T\}$, また Y_0 は Y の $\Gamma_x = \{\gamma \in SL(n, Z); \gamma x^t \gamma = x\}$ に関する基本領域である。 $\mu(x)$ は T の取りかたにはよらない。この定義によれば、見かけ上、1つの L に対し i ($1 \leq i \leq n$) に応じて $n+1$ 個のゼータ関数があるが、実際はこれらは ∞ での $\det$ の符号 $\delta = (-1)^{n-i}$ および Hasse invariant $\epsilon = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ にしかよらないことが、2次形式論より比較的容易にわかる。(このことは今まで認識されていなかったように思う。) よって、 $L = L_n$ または L_n^* に対し $\zeta_i(s, L) = \zeta(s, L, \delta, \epsilon)$ と書くことにする。但し、 (δ, ϵ) の組が異なっても、ゼータ関数は等しいこともある。より詳しく言えば n が奇数なら、1つの L に対し異なるゼータ関数は2個、 n が偶数なら3個しかない。結論は n が偶数と奇数ではかなり違うので、両方に分けて記述する。 i 次ベルヌーイ数 B_i を $te^t(e^t - 1) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i/i!$ で定義する。簡単のため $A_n = 2^{-(n-1)} \Gamma([(n+1)/2]) |\prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} B_{2i}|$ とおく。

定理 1

n を3以上の奇数とする。このとき、

$$\begin{aligned} \zeta(s, L_n, \delta, \epsilon) &= A_n \times (2^{(n-1)/2} \zeta(s - \frac{n-1}{2}) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - (2i-1)) \\ &\quad + \epsilon \delta^{(n+1)/2} (-1)^{(n^2-1)/8} \zeta(s) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - 2i)), \\ \zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) &= A_n 2^{(n-1)s} \times (\zeta(s - \frac{n-1}{2}) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - (2i-1)) \\ &\quad + \epsilon \delta^{(n+1)/2} (-1)^{(n^2-1)/8} \zeta(s) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - 2i)). \end{aligned}$$

となる。ここで $[x]$ は Gauss の記号である。

次に n 偶数の時を説明するために新たにディリクレ級数を2つ導入する。 Q 上の2次体 K に対し、 d_K を K の判別式とし χ_K を K に付随する2次指標とする。また、 $K = Q \oplus Q$ に対しては、 $d_K = 1$ とおき、 $\chi_K =$ 単位指標 とみなす。また $L(s, \chi_K)$ をディリクレの L 関数とする。さて n を4以上の偶数として、

$$D_n^*(s, \delta) = (-1)^{[n/4]} \sum_{(-1)^{n/2} \delta d_K > 0} 2(2\pi)^{-n/2} \Gamma(n/2) |d_K|^{(n-1)/2} L\left(\frac{n}{2}, \chi_K\right) \\ \times \frac{\zeta(2s) \zeta(2s - n + 1)}{L(2s - \frac{n}{2} + 1, \chi_K)} |d_K|^{-s}$$

とおく。ただし、 d_K は2次体 K の判別式または $K = Q \oplus Q$ に対しては1で、 $(-1)^{n/2} \delta d_K > 0$ のものをわたる。いま

$$D_n^*(s, \delta) = \sum_{d=1}^{\infty} H\left(\frac{n}{2}, d, \delta\right) d^{-s}$$

によってディリクレ級数の係数 $H(\frac{n}{2}, d, \delta)$ を定義し、

$$D_n(s, \delta) = \sum_{d=1}^{\infty} H\left(\frac{n}{2}, 4d, \delta\right) d^{-s}$$

とおく。これらは実は志村先生等の理論によれば、重さ $(n+1)/2$ の $\Gamma_0(4)$ に属する（実解析的または正則の）アイゼンシュタイン級数に対応するディリクレ級数であり、 $H(n/2, d, 1)$ は Cohen が定義した関数である。

定理 2

任意の4以上の偶数 n に対し、

$$\zeta(s, L_n, \delta, \epsilon) = A_n \times ((-1)^{[n/4]} D_n(s, \delta) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s - 2i) \\ + \epsilon \kappa(n, \delta) (-1)^{n(n+2)/8} \frac{2^{(n+2)/2} |B'_{n/2}|^{n/2}}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \zeta(2s - (2i - 1))), \\ \zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) = 2^{ns} A_n \times ((-1)^{[n/4]} D_n^*(s, \delta) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s - 2i) \\ + \epsilon \kappa(n, \delta) (-1)^{n(n+2)/8} \frac{2 |B'_{n/2}|^{n/2}}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \zeta(2s - (2i - 1)))$$

となる。ただし、 $|B'_{n/2}| = 2(n/2)!(2\pi)^{-n/2}\zeta(n/2)$ とおいた。また、 $(-1)^{n/2} \equiv \delta \pmod{4}$ ならば $\kappa(n, \delta) = 1$ 、それ以外では $\kappa(n, \delta) = 0$ とおいた。

4 関数等式

定理 1 によれば、 n が奇数のときはリーマンゼータの関数等式から $\zeta(s, L, \delta, \epsilon) (L = L_n, \text{ or } L_n^*)$ の関数等式が得られるのはあきらかである。定理 2 によれば、 n が偶数の時は関数等式はリーマンゼータ関数と $D_n(s, \delta)$, $D_n^*(s, \delta)$ の関数等式に帰着する。この関数等式はアイゼンシュタイン級数について通常のヘッケの議論により求められる。これとリーマンゼータの関数等式を組み合わせれば次のようになる。まず記号を簡単にするため

$$\gamma_n(s) = \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(s+1 + \frac{i}{2})$$

とおき、また

$$\begin{aligned} a(s) &= (\cos \frac{\pi s}{2})(\cos \pi s)^{(n-1)/2}, \\ b(s) &= (-1)^{(n^2-1)/8}(\sin \pi s)^{(n-1)/2} \times \begin{cases} \cos \frac{\pi s}{2}, & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sin \frac{\pi s}{2}, & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \\ c(s) &= (\cos \pi s)^{n/2-1} \sin \pi s. \end{aligned}$$

とおく。

定理 3

(1) 任意の 3 以上の奇数 n について、

$$\begin{pmatrix} \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, 1, 1) \\ \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, 1, -1) \end{pmatrix} = 2^{-ns+(n^2-1)/2} \pi^{-ns+n(n-1)/4} \gamma_n(s - \frac{n+1}{2}) \\ \times \begin{pmatrix} a(s) + b(s) & -a(s) + b(s) \\ a(s) - b(s) & -a(s) - b(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta(s, L_n, 1, 1) \\ \zeta(s, L_n, 1, -1) \end{pmatrix}.$$

任意の $n \geq 4$ となる偶数に対し、 $n \equiv 0 \pmod{4}$ ならば

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, 1, 1) \\ \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, 1, -1) \\ \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, -1, 1) \end{pmatrix} = \\
 & 2^{-ns+n^2/2-1} \pi^{-ns+n(n-1)/4} \gamma_n(s - \frac{n+1}{2}) \\
 & \times \begin{pmatrix} (\cos \pi s)^{n/2} + (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & (\cos \pi s)^{n/2} - (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & 0 \\ (\cos \pi s)^{n/2} - (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & (\cos \pi s)^{n/2} + (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & 0 \\ (\sin \pi s)^{n/2-1} & (\sin \pi s)^{n/2-1} & -2c(s) \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} \zeta(s, L_n, 1, 1) \\ \zeta(s, L_n, 1, -1) \\ \zeta(s, L_n, -1, 1) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

また $n \equiv 2 \pmod{4}$ ならば

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, 1, 1) \\ \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, -1, 1) \\ \zeta(\frac{n+1}{2} - s, L_n^*, -1, -1) \end{pmatrix} = \\
 & 2^{-ns+n^2/2-1} \pi^{-ns+n(n-1)/4} \gamma_n(s - \frac{n+1}{2}) \\
 & \times \begin{pmatrix} 2(\cos \pi s)^{n/2} & 0 & 0 \\ (\sin \pi s)^{n/2-1} c(s) + (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & c(s) - (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} \\ (\sin \pi s)^{n/2-1} c(s) - (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} & c(s) + (-1)^{n(n-2)/8} (\sin \pi s)^{n/2} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} \zeta(s, L_n, 1, 1) \\ \zeta(s, L_n, -1, 1) \\ \zeta(s, L_n, -1, -1) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

となる。

5 特殊値と次元予想

この節では、保型形式の次元への応用を述べる。 $Sp(n, Q)$ のレベル N の主合同部分群

$$\Gamma_n(N) = \{g \in Sp(n, Q); g \equiv 1_{2n} \pmod{N}\}$$

についての重さ k の cusp forms の空間を $S_k(\Gamma_n(N))$ と書こう。良く知られているように、 $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ は $k > 2n$ では、適当な積分核の跡公式 (Godement) で表される。跡公式はさらに $\Gamma_n(N)$ の元の共役類ごとの寄与の和になる。さて、単位元以外の $\begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ の形の元と $Sp(n, Q)$ -共役な元を中心的べき単元と呼ぶことにする。別の言葉で言えば、 $Sp(n, Q)$ の適当な maximal parabolic の unipotent radical の center に属する元のことである。特に $\text{rank}(x) = r$ のものと共役の時、rank r の中心的べき単元ということにする。整数 r ($0 \leq r \leq n$) に対し Π_r を $\Gamma_n(N)$ の rank r の中心的べき単元の集合とする。Shintani [8] により Π_r の $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ への寄与はよくわかる初等的な量と $\zeta(r - n, L_n^*)$ の積であることが知られている。しかし、このゼータ関数の具体的な値に付いては $n \geq 3$ では今までほとんど知られていなかった。今回特殊値が皆わかったわけだが、 $L = L_n^*$ の方だけ書いておく。

定理 4

m を任意の自然数とする。

(1) n が奇数のとき、

$$\zeta(1 - m, L_n^*) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} |B_2 B_4 \cdots B_{n-1}| B_{m+\frac{n-1}{2}} B_{2m} B_{2m+2} \cdots B_{2m+n-3}}{2^{(2m+1)(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)! m(m+1) \cdots \left(m + \frac{n-1}{2}\right)},$$

(2) n が偶数のとき $nm \neq 2$ なら、

$$\zeta(1 - m, L_n^*) = \frac{(-1)^{[\frac{n}{4}] + \frac{nm}{2}} |B_2 B_4 \cdots B_{n-2} B_{n/2}| B_{2m} B_{2m+2} \cdots B_{2m+n-2}}{2^{nm + \frac{n-2}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)! m(m+1) \cdots \left(m + \frac{n-2}{2}\right)},$$

で、また $\zeta(0, L_2^*) = 1/48$ である。

次に Π_r の $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ への寄与 $I_n(\Pi_r, N, k)$ を書こう。記述を単純にするために少し記号を準備する。整数 r ($0 \leq r \leq n$) に対し

$$C_{n-r} = C_{n-r}(k, N) = [Sp(n, Z) : \Gamma_n(N)] N^{-r(n-\frac{r-1}{2})} \prod_{t=1}^{n-r} \frac{t!}{(2t-1)!!} \binom{k-1-\frac{n}{2}+\frac{t}{2}}{t}$$

とおく。但し任意の自然数 t に対し $\binom{\alpha}{t}$ は 2 項係数

$$\binom{\alpha}{t} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-t+1)}{t!},$$

のことで、また $(2t-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2t-1) = 2^{-t}t! \binom{2t}{t}$ とした。もし $r = n$ なら、上で積の部分は 1 とみなす。任意の自然数 n, N, k ($k > 2n$) に対し、寄与 $I_n(\Pi_r, k, N)$ は次で与えられる。

(1) 奇数の r で $1 \leq r \leq n$ となるものについて、

$$I_n(\Pi_r, k, N) = C_{n-r} \times \frac{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]} |B_{n-\frac{r-1}{2}} B_2 B_4 \cdots B_{r-1} B_2 B_4 \cdots B_{2n-2r} B_{2n-2r+2} B_{2n-2r+4} \cdots B_{2n-r-1}|}{2^{n+\frac{r-1}{2}} (n - \frac{r-1}{2})! (\frac{r-1}{2})!}.$$

特に、もし $n - \frac{r-1}{2}$ が奇数で 1 より大きければ $I_n(\Pi_r, k, N) = 0$.

(2) 偶数の r で $0 \leq r \leq n$ となるものについて、

$$I_n(\Pi_r, k, N) = C_{n-r} \times \frac{(-1)^{r(1+\delta_{nr})/2} |B_2 B_4 \cdots B_{r-2} B_{\frac{r}{2}}| \cdot |B_2 B_4 \cdots B_{2n-2r} B_{2n-2r+2} B_{2n-2r+4} \cdots B_{2n-r}|}{2^{2n-\frac{r}{2}} (\frac{r}{2})! (n - \frac{r}{2})!},$$

但し δ_{nr} は the Kronecker 記号。特に $r \equiv 2 \pmod{4}$ かつ $r \neq 2$ なら、 $I_n(\Pi_r, k, N) = 0$ である。

もし $N \geq 3$ なら、何人かの数学者により独立に中心的べき単元または単位元以外のなす共役類の $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ への寄与は消えると予想されている。従って、自然に次の予想に導かれる。われわれの予想のポイントはすべてが explicit な所である。

次元の具体的予想

もし $N \geq 3$ であつ $k > 2n$ ならば

$$\dim S_k(\Gamma_n(N)) = \sum_{r=0}^n I_n(\Pi_r, k, N)$$

である。ここで $I_n(\Pi_r, k, N)$ はそれぞれ定理 5 で *explicit* に与えられている。

個々の n についての数値例は論文 [1] を参照されたい。

詳しい文献表はプレプリントを参照されたい。

参考文献

- [1] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions of Siegel modular forms of general degree. International Mathematics Research Notices No.8, 161-169, Duke Math. J (1992)August.
- [2] T. Ibukiyama and H. Saito, On L-functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee-Weintraub. to appear in J. Number theory.
- [3] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I: An explicit form of zeta functions. Preprint.

- [4] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices II: Functional equations and special values. In preparation.
- [5] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices III: An explicit form of L -functions. In preparation.
- [6] Y. Morita, An explicit formula for the dimensions of spaces of Siegel modular forms of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA 21(1974), 167-248.
- [7] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, in "Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties", Adv.St. in Pure Math. 15, Kinokuniya and North-Holland (1989)1-27.
- [8] T. Shintani, On zeta functions associated with vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA 22(1975), 25-65.