

二次元多重連結領域内における構造安定な非圧縮流れの文字列表現アルゴリズム

坂上貴之 京都大学大学院理学研究科・JST CREST

横山知郎 京都教育大学教育学部・JST CREST

澤村陽一 名古屋大学大学院工学研究科・JST CREST

1 はじめに

本稿では非圧縮流体で満たされた二次元外部領域を考える．特にその中に一様流が存在すると仮定し，また，その中に複数の障害物が含まれているような多重連結領域を取り扱う．数学的に見ればこのような障害物は流れを構成するベクトル場の中に空いた「穴」と見なすことができるが，応用上はこのような流れは例えば河川に砂州や橋脚がいくつも存在しているような場合に現れる．この他，生命流体に関連する問題においても，ある種の理想化の下で鳥や魚の群れといった飛行・遊泳物体の相互作用を表す数理モデルとして用いることもできる．

我々がここで紹介するのは，こうした多重連結領域における流れの位相的分類の理論である．位相的というのは数学の専門用語であり，トポロジー（位相幾何学）とも呼ばれる幾何学の一分野を指している．例えば，我々が高校生の頃に習う幾何学では三角形や四角形はその角の数の違いにより異なる図形と見なすが，位相幾何学の立場ではそういった細かい情報を見ず，三角形と四角形を例えば輪ゴムを変形させて互いに移りあえるという立場にたって，これらを同じ図形と見なす．一方で，円の中にもう一つ円がくりぬかれているような円環領域があったときに円と円環領域は一つのゴムの変形では互いに変形できないので，異なる図形と見なす．上に述べた多重連結領域についてみれば，空いている穴の数が異なれば，それらの図形は位相的に異なると見なす一方で，穴の形さえ同じであれば，その穴の形が円であろうが三角形であろうが線分であろうが同じ領域とみなす．

この立場において，我々が流れの位相的分類とよぶときは，流れを特徴づけるある特定の構造（位相構造と呼ぶ，これは後ほど詳しく述べる）を捕まえて，その特定の構造をもった流れが二つあったときに，その双方を特定の構造の連続的な変形によって互いに変形できないものは異なる流れと見なす．この見方は連続的な摂動では変わらない構造を同じとするため，数値計算や実験で得られる連続的な変動を解析的に記述する従来の見方とは異なる．また，従来流れの解析手法に比べれば，位相的分類は非常にラフな見方を提供しているにすぎないが，そのラフさ故に数学的な厳密さをもって完全な流れの分類を可能になる．

加えて、ここでは構造安定な流れ（ベクトル場）に注目する。この「構造安定な流れ」とは、そこに小さな擾乱（乱れ）が加わっても流れの位相的構造が変化しないものを呼ぶ。これはすべての起こりうる流れのパターンに対してある種の制限をつけることになるが、実のところそれは全く問題にならない。というのも、通常、我々が流れの様子を観測したり、計算機によって流れの様子を可視化した場合、そこには観測誤差や計算誤差が入るので、こういった誤差によらない流れ構造が観測されやすいからである。

本論文では、論文 [4, 6] の中で与えられた構造安定な非圧縮流れのベクトル場の流線構造に対して一意にある文字列 (Word representation) を与えるアルゴリズムとその適用方法について詳しく紹介する。こうした文字列による表現は、数学的にはすべての構造安定なベクトル場の組み合わせ論的な分類を可能にする。それだけでなく応用上は数値計算結果にせよ実験にせよ流線の特定の構造の特徴を説明するための共通言語として用いることができる。また、流れの位相構造のパラメータによる変化や時間発展を、それらに対応する文字列の変化として表現できるようにもなる。なお、ここでは与えられた流れの文字列の方法に焦点を合わせ、本理論の数学的な背景については必要最低限の事実にのみ触れるものとする。それらの詳細については論文 [6] を参照していただきたい。

2 流れの構成要素

本論文では境界をもつ領域内での流れを取り扱うので、流れの境界条件を考える必要がある。そこで、我々は非圧縮流れが「非粘性」という仮定をおくことにする。このとき、境界における流れは滑り境界条件 (slip boundary condition) となるが、実際の流体流れは粘性を持っているため、この仮定は本語表現の理論の実際の流体問題への応用における大きな制限をもたらす。というのも粘性流体では滑りなし境界条件 (no-slip boundary condition) を考える必要があるからである。したがって、数学的にみれば、ここで与えられる語表現は非粘性・非圧縮流れに対する語表現ということになるが、粘性流体への本理論の適用については後ほど例とともに考えることにする。

いま、 $M+1$ 個の「穴」を持つ二次元多重連結外部領域を二次元空間を複素 z 平面内の領域と同一視して、 $D_z(M)$ と書くことにする。ここでいうベクトル場における「穴」という用語には若干の注意を要する。この領域における流れの流線の位相的な構造に影響を与える流れの構成要素は障害物、渦構造 (vortex structures)、停留点 (stagnation points) および一様流 (uniform flow) である。まず、障害物は多重連結領域のベクトル場における文字通りの穴のことであり、ここでは流れの位相的分類にのみ興味があるので、その形状は円としてにおいても数学的な結果に影響はない。次に、渦構造はそのまわりで回転する流れを作る要素であり、位相的にみれば図 1(a) のような流れを作り出す。例えばポテンシャル流における点渦のような流れ構造に対応する。ただ、一般に渦構造は粘性によって時間発展とともに散逸するので、厳密には構造安定ではないが、ここでは非粘性・非圧縮流体と仮定しているのでケルビンの循環定理から渦構造は一旦生成されればそれが消えることがない。そのため、渦構造の中心にある速度場のゼロ点はベクトル場における「穴」と同一に見なせる。停留点は速度場のゼロ点であるが、流れが非圧縮ベクトル場（すなわち流れ関数を

ハミルトニアンとするハミルトンベクトル場)であるということから、双曲型 (saddle) か楕円型 (center) の停留点のいずれかとなる。そのうち楕円型の停留点は渦構造と同様にベクトル場を開いた「穴」とみることができる。停留点の方は流れも変化にともなって消えてもよいように思われるが、実は流れがもつ位相的な制約 (ベクトル場の指数) によってそういう変化は起こらない。したがって、以後本稿で「ベクトル場の穴の数が M 」というときは

$$M = \text{障害物の数} + \text{楕円型の停留点の数} + \text{渦構造の数}$$

となっていることに注意する。

最後の構成要素である一様流とは川の流れていえば基本的な流れのことであり、領域全体を横切るような流れである。この流れが位相幾何学的にどのような流線構造を構成するかを考える必要がある。論文 [6] において、一様流はベクトル場における 1-source-sink 点 (吸い込み湧き出し対) として定義されることが示されている。それによると、一様流は $D_z(M)$ におけるポテンシャル流なので、その複素速度ポテンシャルは $z \rightarrow \infty$ で $W_U(z) \sim Ue^{-ix}z$ (U は一様流の流速, χ はその実軸に対する傾き) と表現される。無限遠点でのベクトル場の特徴づけは以後の理論的な取り扱いの上では面倒なので、外部領域 $D_z(M)$ と複素 ζ 平面における単位円内の有界領域 $D_\zeta(M)$ の間の等角写像 $z = g(\zeta)$ で、 z 平面における無限遠点を ζ 平面の原点にうつすもの、すなわち a をある定数として $g(\zeta) \sim a/\zeta$ ($\zeta \rightarrow 0$) なるものを考えると、一様流に対応する複素速度ポテンシャルの原点近傍での振る舞いは以下のようになる。

$$W_U(\zeta) \sim Ue^{-ix}\frac{a}{\zeta}, \quad \zeta \rightarrow 0.$$

このとき、主要項 $\frac{1}{\zeta}$ は原点における「吸い込み湧き出し対 (source-sink pair)」の流れを表しており、その流線は原点付近で $\text{Im}[1/\zeta] = -\frac{1}{r}\sin\theta$ なる極座標表示を持つ。その流線構造は図 1(b) に示すようなものになっている。原点から無数の流線が湧き出して自分自身に戻っていく軌道からなっていることに注意してほしい。この一本一本の流線は等角写像の逆写像で外部領域に戻したときに、そこでの一様流の流線を表している。なお、このような点は微小な摂動で二つの特異点渦に分解されるので数学的には構造不安定となるが、ここでは一様流の存在を仮定しているので、この点だけは摂動できないとしておく。

さて、今後 Schematic に流れ場を表現するため、上で導入した等角写像 $z = g(\zeta)$ が ζ 平面の原点を z 平面の無限遠点に写すだけでなく、 ζ 平面の単位円の内部領域を z 平面のある外部領域に写すものとしておく。このとき、 z 平面に $M+1$ 個の穴を持つ外部領域 $D_z(M)$ は ζ 平面内に M 個の穴を持つ単位円の内部領域 $D_\zeta(M)$ にうつされる。流線の位相構造は、こうした等角写像の作用のもとで不変であることから、一般性を失うことなく本論文では、理論的な記述の際にはすべての流れパターンを図 2(a) のように $D_\zeta(M)$ の中に表現するものとする。なお、後述する応用例では、物理的な流れとの対応を見るために外部領域に戻して考えることとする。

このような領域における構造安定な流れの位相的分類を行う特徴的な軌道 (流線) を図 2(a) にしたがって記述する。まず吸い込み湧き出し対から出て自分自身に戻ってくる軌道を ss-orbit (図 2(a) の a.) と呼ぶ。次に吸い込み湧き出し対から出て境界の上につながる

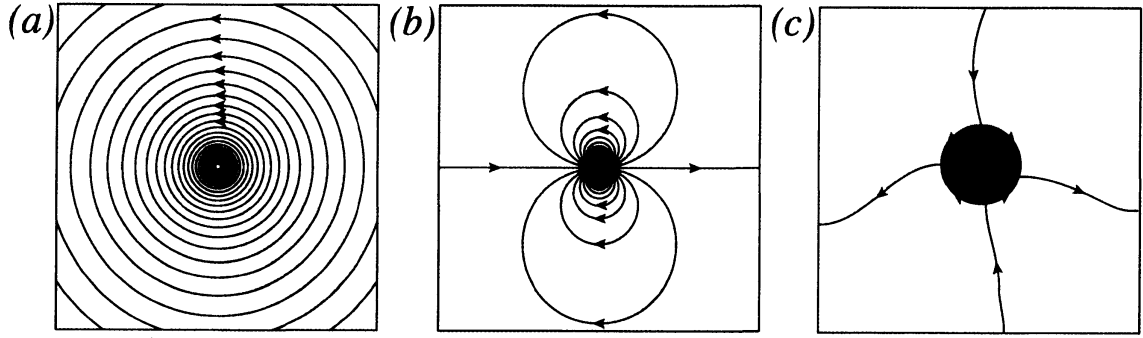


図 1: 構造安定な流れのパターンの模式図. (a) 渦まわりの閉軌道. (b) 吸い込み湧き出し対まわりの流れ. (c) 4サドル点を持つ境界まわりの流れ.

軌道を **ss- ∂ -saddle connection** (図 2(a) の b.), その軌道がつながっている境界上の点を **ss- ∂ -saddle** (図 2(a) の c.) と呼ぶ. 吸い込み湧き出し対からではなく, ある境界上の点から出て同じ境界上の点につながる軌道を **∂ -saddle connection** (図 2(a) の e.), これによってつながれている境界上の点を **∂ -saddle** (図 2(a) の d.) と呼ぶ. また境界上にない点で図 2(a) の h. のような点を **saddle point** と呼ぶが, 吸い込み湧き出し対から出る軌道で, この saddle point につながる軌道を **ss-saddle connection** (図 2(a) の f.) という. 境界や渦の回りを作る閉曲線軌道を **closed orbit**, saddle point から出てそれ自身に戻るような軌道を **homoclinic saddle connection** という. 我々が対象とする構造安定な流れはこれらの軌道の組み合わせによってしか表現されないことが論文 [6] の中で証明されている.

我々は構造安定な流れをすべて書き出すにあたり, 穴の数が $M-1$ 個ある $\mathcal{D}_\zeta(M-1)$ の流れに一つ穴 (とそれに伴う流れの構造) を付け足すことで, 一つ穴の多い多重連結領域 $\mathcal{D}_\zeta(M)$ の構造安定な流れ場を帰納的に構成していくことを考える. そのため, まずはもっとも簡単な $\mathcal{D}_\zeta(0)$ や $\mathcal{D}_\zeta(1)$ における, これらの帰納的構成の初期構造となるものを求める必要がある. それらを示したのが図 2(b)–(d) である. まず穴が一個の $\mathcal{D}_\zeta(0)$ にある構造安定な流れは図 2(b) と (c) であり, それぞれパターン I とパターン II と呼ぶことにする. これらのパターンはともに吸い込み湧き出し対を持ち, 数学的にはこれらしかないことが論文 [6] で証明されている. さて, 吸い込み湧き出し対を持つような流れに対して, 原則的には $\mathcal{D}_\zeta(1)$ より大きな穴を持つ領域の構造安定な流れはこれらから構成されるが, 吸い込み湧き出し対を持たない流れはここから構成されないので, そういった流れを構成するために別の初期流れが必要である. それが図 2(d) で表現される流れである. これをパターン O と書くことにする.

なお, 今後これらの流線パターンを模式的に表現するために, 流線の位相構造に影響を与えない ss-orbits や closed orbits は省略し, 吸い込み湧き出し対は ⑤ と略記しておくことで各図 2(b)–(d) の下図のような表示法を用いるものとする. 1-source-sink 点 (一様流) が存在するとき, この表示法を **ss-saddle connection diagram** と呼び, 1-source-sink 点を持たないときの表示法を **saddle conneciton diagram** と呼ぶことにする.

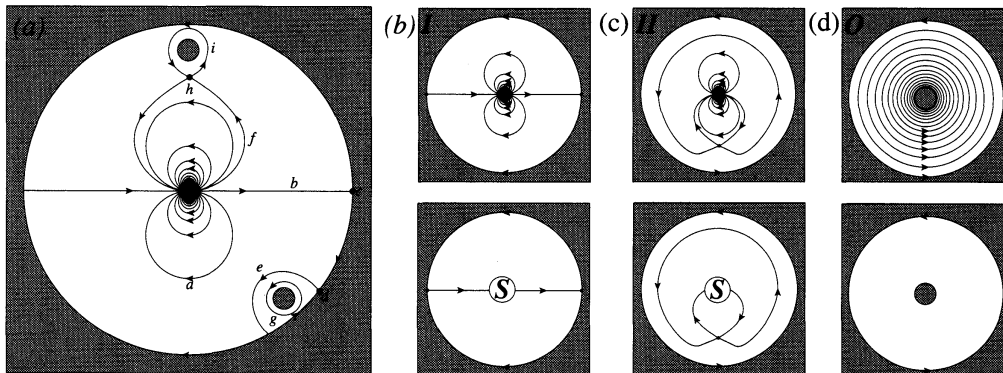


図 2: (a) 構造安定な流れを特徴づける軌道の一覧. a. ss-orbit; b. ss- ∂ -saddle connection; c. ss- ∂ -saddle; d. ∂ -saddle; e. ∂ -saddle connection; f. ss-saddle connection; g. closed orbit; h. saddle point; i. homoclinic saddle connection. (b) $\mathcal{D}_\zeta(0)$ における吸い込み湧き出し対 (一様流) を持つ構造安定なパターン I. これは二つの ss- ∂ -saddle connections を持つ. (c) もう一つの構造安定なパターン II. これは homoclinic saddle point と二つの ss-saddle connection を持つ. (d) パターン O. これは吸い込み湧き出し対を持たない $\mathcal{D}_\zeta(1)$ における構造安定な流れである. これらのパターンにおいて, ss-orbits や closed orbits は流れの位相構造に影響しないので表示せず, また 1 source-sink 点は $\textcircled{S}$ とシンボル化して下のように略記する. このような図式を以後, 流線の (ss-)saddle connection diagram とよぶ.

3 構造安定な流れの位相構造の語表現

帰納的に構造安定な流れを構成するために, 構造安定な流れの流線に対して, 穴を一つとそれに伴う流れの構造を追加する「操作」を定義する. 論文 [6] では構造安定性を維持しながらそのようなことを可能にする操作は以下の五つしかないことが示されている. その操作は以下の通りである. (図 3 もみよ.)

- (A₀) 一本の ss-orbit を 内部に穴をもつ homoclinic saddle connection と二つの ss-saddle connection に置き換える操作.
- (A₂) 一本の ss-orbit を 二つの ss- ∂ -saddle connection と新たに追加した境界上の二つの ∂ -saddles に置き換える操作.
- (B₀) 一本の closed orbit を 一つ穴と saddle point を追加して 8 の字をした日本の homoclinic 軌道に置き換える操作
- (B₂) 一本の closed orbit を新たに追加した穴の境界上に二つ ∂ -saddles をつけてそれを一本の ∂ -saddle connection でつなぐような軌道に置き換える操作
- (C) 既に $2k$ 個 ($k > 0$) の ∂ -saddles を持つ境界に新たに二つの ∂ -saddles を付け加えて, それを一本の ∂ -saddle connection でつなぎ, その中に新たに穴を付け加える操作.

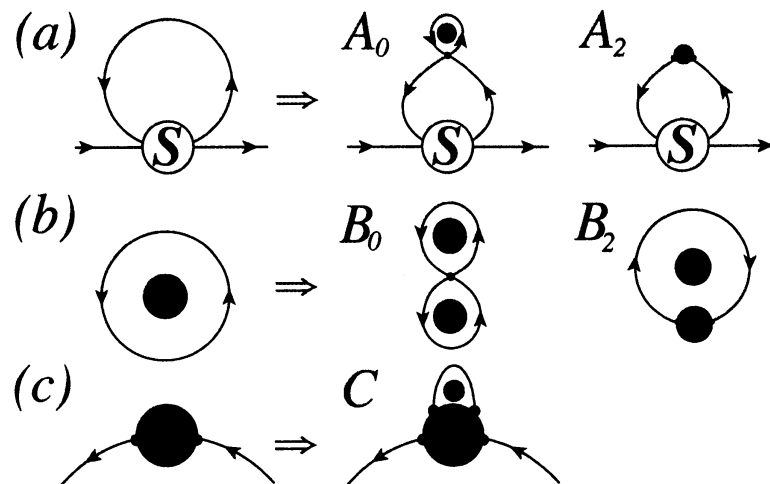


図 3: 穴を一つ付け加えて構造安定な流れを構成する 5 つの操作の模式図. (a) 操作 A_0 と A_2 は一本の ss-orbit に対して行われる. (b) 操作 B_0 と B_2 は一本の closed orbit に対して行われる. (c) 操作 C は既に ∂ -saddles を持つ境界に対して行われる.

前章で与えた初期パターン I , II , O からこれらの操作を行って一つずつ穴を増やすことで多くの穴を持つ領域における流れが構成されるので, その操作列を文字と見なして列挙することで流れ場の語表現 (Word representation) が得られる. しかしながら, これらの文字列は上の 5 つの操作を適当に並べてできるわけではなく, 数学的な理由から様々な制約がつく. それらの制約は I , II , O のどこからはじめるかによって異なるので, それぞれに対するルールを以下に記述する.

まず, 湧き出し吸い込み対を持たない O のパターンからはじめる場合には次のようなルールがある. O から始まる語表現に対して, それが構造安定な流れを表すために以下が必要十分である.

O-1) 施すことができる操作は B_0 , B_2 , C のみであり, その結果 O から始まる語表現はこれら三つの語を列挙したものである.

O-2) 操作列の語表現において C の語が含まれるためには, それ以前に必ず B_2 が存在しなければならない.

このような文字列を O -語表現 (O -Word) と呼ぶ.

次にパターン I から始まる語表現については, 以下のルールが成り立つ必要がある.

I-1) 実施可能な操作は A_0 , A_2 , B_0 , B_2 , C のすべてであり, その結果 I から始まる語表現はこれら五つの語を列挙したものである.

I-2) 操作列の語表現において B_0 あるいは B_2 の語が含まれるためには, それ以前に必ず C か A_2 が存在しなければならない.

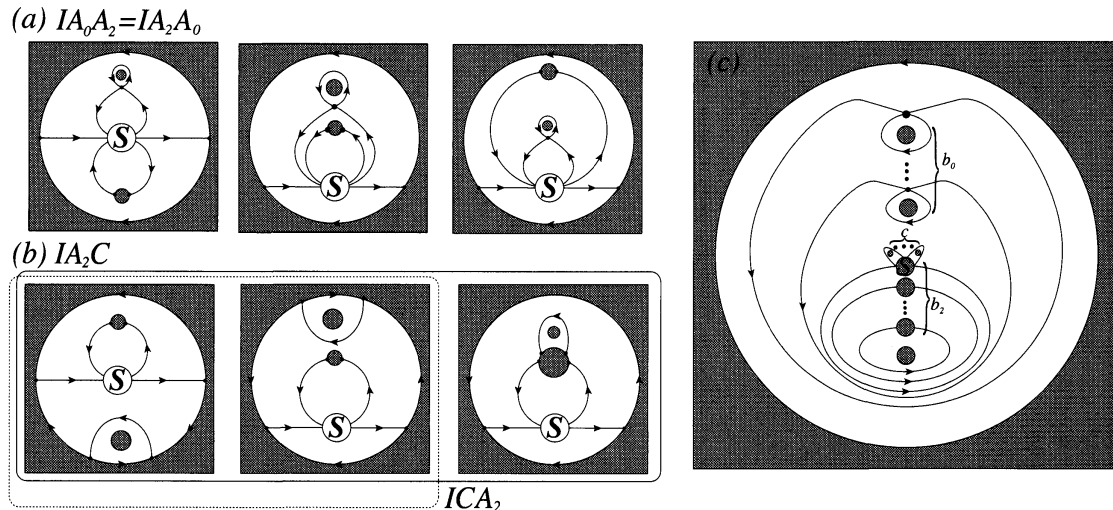


図 4: (a) 語表現 IA_0A_2 と IA_2A_0 を持つ構造安定な流れ場. (b) 語表現 IA_2C を持つ三つの構造安定な流れ場. そのうち二つは ICA_2 なる語表現も許す. (c) 極大 O -語表現 $OB_2^{b_2}C^cB_0^{b_0}$ および $OB_2C^cB_0^{b_0}B_2^{b_2-1}$ をもつ構造安定な流線パターン. 操作 B_2 によって作られたもっとも外側にある境界を S としている.

このような文字列を I -語表現 (I -Word) と呼ぶ.

最後にパターン II から始まる語表現については, 以下のルールが成り立つ必要がある.

II-1) 実施可能な操作は A_0, B_0, B_2, C であり, その結果 I から始まる語表現はこれら四つの語を列挙したものである.

II-2) 操作列の語表現において C の語が含まれるためには, それ以前に必ず B_2 が存在しなければならない.

このような文字列を II -語表現 (II -Word) と呼ぶ.

原則的にはすべての構造安定な流れの位相構造は上で定義されたルールを満たす形で操作を表す文字を列挙することで表現することができるが, この時点で注意しておくべきことは「一つの流れパターンを表現する語表現は複数ある」ということである. また一方で「一つの語表現で表される流れのパターンも複数ある」という点である. 例えば図 4(a) にあるようなパターンの集合は I パターンに操作 A_0 と A_2 を独立に行うと得られるので, IA_0A_2 や IA_2A_0 の二つの語表現を持つ. 語表現という観点からすれば後者の点は特に大きな問題ではない, というのも, ある一つの語がある流れパターンの集合 (グループ) を表現するにすぎないからである. 一方, 前者の点は一つの流れを複数の語が表現するとたいへん紛らわしい. そこで, 我々は文字列の現れる順番に一定のルールを付け加えた「極大語表現 (maximal word representation)」と呼ばれる文字列を導入してこの問題を解決する.

極大語表現は, I 系列, II 系列, O 系列で与えられている操作を表す文字列の順序の入れ替えによって, それが表現している流れの集合の包含関係がどうなるかを調べるこ

によって導入される。例えば、図4(a)における文字 IA_0A_2 と IA_2A_0 なる二つの語表現について、これらが表す流れのパターンは同じなので、 A_0 と A_2 の入れ替えによって表現されるパターンは変化しない。そこで、「 A_0 のほうが A_2 より先に語表現の中で現れる」というルールを追加して IA_2A_0 という表現を排除する。このような文字の入れ替えに関して起こる、語表現されるパターンの集合の不変性を記号として $A_0A_2 = A_2A_0$ のように表現することにする。

一方で、語を入れ替えることによって、それが表現するパターンの集合が変化する場合もある。例えば A_2 と C を入れ替えて出来る二つの I -語表現、 IA_2C と ICA_2 を考える。これらの文字列が表現する流線パターンは図4(b)に示されている。これによると IA_2C が表すパターンは三つあるが、その内二つは ICA_2 という語表現も許すことがわかる。すなわち前者が表すパターンの集合は後者が表すパターンの集合を含む。すなわち、集合の記号を使えば、 $(ICA_2) \subset (IA_2C)$ となる。このことは、操作 C が適用できる境界の数が I と IA_2 では異なることに起因するが、このような文字列の順序の入れ替えによって一方が一方のパターンの集合を含んでしまう場合は、含まれる側の語表現は排除して、より大きな流線を含む語表現のみを採用する。この関係式を象徴的に $CA_2 \leq A_2C$ と表現することにする。全ての操作に対応する語の入れ替えによって得られる包含関係をまとめると、入れ替えが自由な等号関係は $A_0A_2 = A_2A_0$, $A_0C = CA_0$, $A_2B_0 = B_0A_2$, $A_2B_2 = B_2A_2$ の四つ、入れ替えによって包含関係が生まれるのは $B_0A_0 \leq A_0B_0$, $B_2A_0 \leq A_0B_2$, $CA_2 \leq A_2C$, $B_2B_0 \leq B_0B_2$, $B_0C \leq CB_0$ である。唯一の例外は B_2 と C であり、これは入れ替えても包含関係が成立しないので、この二つは入れ替えることができない。

さて、これらの語表現の入れ替えによりできる極大語表現は、一つのパターンに対して少なくとも一つ存在することが論文 [6] で示されている。さらにこれに基づいてその極大語表現の標準形を考えることができる。まず、非負の整数 s, t, u に対して、 $W(s, t, u) = (B_0)^s(B_2)^t(C)^u$ と書くことにすると、極大 O -語表現に対する以下の標準形を得る。

定理 3.1. $\mathcal{D}_\zeta(M)$ における構造安定な流線パターンの任意の極大 O -語表現は、ある整数 $k \geq 1$, $s_m, t_m \geq 0$ ($m = 1, \dots, k$) および $u_m > 0$ ($m = 1, \dots, k-1$) に対して次の標準形を持つ。

$$OW(s_1, t_1, u_1) \cdots W(s_{k-1}, t_{k-1}, u_{k-1})W(s_k, t_k, 0). \quad (1)$$

ただし、 $t_m > 0$ ($m < k$) であり、 $M = 1 + \sum_{m=1}^{k-1}(s_m + t_m + u_m) + s_k + t_k$ である。

一様流を持つ構造安定な流線パターンの極大 I -語表現と極大 II -語表現については以下の標準形を得る。

定理 3.2. p, q, r を非負の整数とする。このとき、 $\mathcal{D}_\zeta(M)$ における任意の構造安定な流線パターンの極大 I -語表現は、 $p + r > 0$ のとき、ある整数 $k \geq 1$, $s_m, t_m \geq 0$ ($m = 1, \dots, k$) および $u_m > 0$ ($m = 1, \dots, k-1$) に対して以下のような標準形を持つ。

$$I(A_0)^p(A_2)^q(C)^rW(s_1, t_1, u_1) \cdots W(s_{k-1}, t_{k-1}, u_{k-1})W(s_k, t_k, 0). \quad (2)$$

ただし、 $t_m > 0$ ($m < k$) であり、 $M = p + q + r + \sum_{m=1}^{k-1}(s_m + t_m + u_m) + s_k + t_k$ である。 $p + r = 0$ の場合は $I(A_2)^q$ となり、このとき $M = q$ である。

定理 3.3. p を非負整数とする. このとき $\mathcal{D}_c(M)$ における任意の構造安定な流線パターンの極大 II -語表現は, ある $k \geq 1$, $s_m, t_m \geq 0$ ($m = 1, \dots, k$) および $u_m > 0$ ($m = 1, \dots, k-1$) に対して以下のような標準形を持つ.

$$II(A_0)^p W(s_1, t_1, u_1) \cdots W(s_{k-1}, t_{k-1}, u_{k-1}) W(s_k, t_k, 0). \quad (3)$$

ただし $t_m > 0$ ($m < k$) であり, $M = p + \sum_{m=1}^{k-1} (s_m + t_m + u_m) + s_k + t_k$ となる.

このことから, 任意に与えられた構造安定な流線パターンは上で与えられた三つのいずれかで書き表されることから, 逆に与えられた M に対して, これらの文字列の指数 p, q, r, s_m, t_m, u_m の総和が M になるように分配することですべての構造安定な流れのパターンを決定することでできる. 実際, 論文 [6] では $M = 1$ および $M = 2$ における全流線パターンが与えられている.

さて, ここで一つ注意すべきことは, 任意に与えられた流線パターンは少なくとも一つの極大語表現を持つということである. すなわち, その極大語表現は一意でないことがある. 例えば図 4(c) の流線パターンを見ると, この極大 O -語表現は二つ存在しうることが以下のようにしてわかる. まず, 基本 O -パターンに操作 B_2 を b_2 回行う. このとき B_2 によって一番外側にできた円境界を S と呼ぶ. 次にこの S に C を c 回施して, 最後にその外側にある周期軌道に対して B_0 を b_0 回施せばこの流線パターンができる. こうするとその極大 O -語表現は $OB_2^{b_2}C^cB_0^{b_0}$ と書ける. 一方で, このパターンには別の極大 O -語表現 $OB_2C^cB_0^{b_0}B_2^{b_2-1}$ も許される. なぜなら, 初期パターン O に一回だけ B_2 を施して, このときにできる円境界をして S する. この S に C を c 回, その外側の周期軌道に B_0 を b_0 回施した後に $b_2 - 1$ 回, S の内側にある周期軌道に B_2 を施しても同じパターンが得られるからである. こうした極大語表現に一意性がないのは, 与えられた流線から一つずつ構造を選んで文字を割り当てる順序が異なることに起因しているので, 逆に構造を抜き出す順番さえ決めてやればその極大語表現は一意にできる. そのアルゴリズムが Algorithm 1 と Algorithm 2 である. 基本的な考え方は, 与えられた流線から B_2, B_0, C の構造をすべてなくなるまで選んで消去しては該当する文字を割り当て, それを後ろから並べたあとで, A_0 と A_2 をなくなるまで選んで消去しては文字を割り当て, それを後ろから並べることで一意極大語表現が与えられる.

4 応用例：流れの時間発展問題の語表現

この語表現理論の応用例の一つとして論文 [4] で与えられた, 二次元外部領域における粘性・非圧縮流体を考え, 図 5(a) に示すように, その中に有限の厚みを持つ薄い一枚の平板が一様流に対して一定の角度で傾いておかれているとする. 我々は物体に働く揚力と抗力およびその比 (揚抗比) の時間変化を取り上げる. 揚抗比を大きくしたまま流れを安定化させることが効率的な飛翔物体の設計には重要だが, 一般に流体運動が非定常である場合は揚抗比は一定でなく時間的に大きな変動を示す. このような変動が周辺の流れの構造のどのような変化によってもたらされるかといった点に注目して語表現による記述を試みる.

この粘性・非圧縮流れの時間発展は二次元のナビエ・ストークス方程式を Volume penalization 法 (VP 法) [1] で数値的に求める. 空間離散化はフーリエ・スペクトル法を用いて

Algorithm 1 極大 O -語表現を与えるアルゴリズム

Require: $M+1$ を領域の穴の数とし, D を与えられた saddle connection diagram とする.

$i \leftarrow M$

while D が saddles 点か ∂ -saddles 点を持つ. (i.e. $i \neq 0$) **do**

while ∂ -saddle connection で結ばれた二つの ∂ -saddles しか持たない円境界が存在する. **do**

 一つの円境界とそれにつながる流線を D から消去して, $O_i = B_2$ とおく.

$i \leftarrow i - 1$

end while

while 8 の字をした B_0 に対応する (内部に構造を持たない) 流線構造が存在する. **do**

 一つの 8 の字構造の流線を D から消去して, $O_i = B_0$ とおく.

$i \leftarrow i - 1$

end while

while 内部に構造を持たない ∂ -saddle connection によって結ばれた少なくとも四つ以上の ∂ -saddles をもつ境界が存在する. **do**

 一つの ∂ -saddle connection を D から消去して, $O_i = C$ とおく.

$i \leftarrow i - 1$

end while

end while

return $OO_1 \cdots O_M$

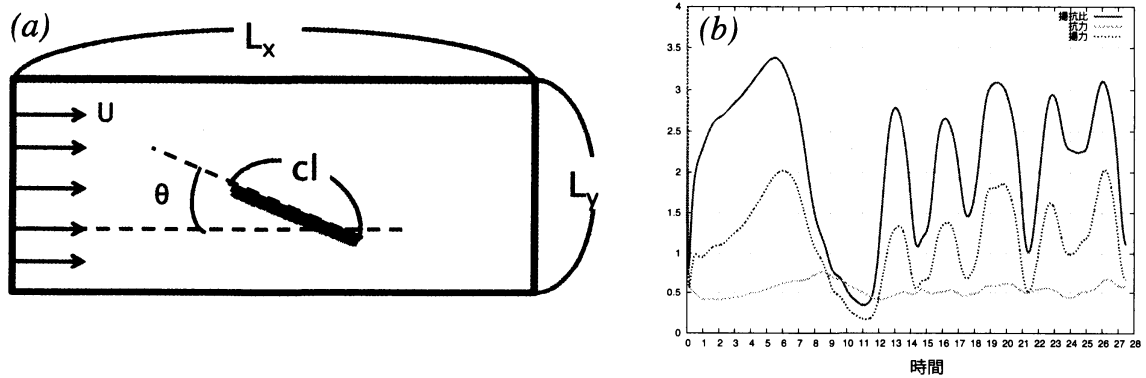


図 5: (a) 流れの問題設定とパラメータ. (b) 流体から平板に加わる揚抗比 (赤)・揚力 (青)・抗力 (緑) の時間発展. 横軸は時間, 縦軸は揚抗比を表す.

Algorithm 2 極大 I -語表現および極大 II -語表現を与えるアルゴリズム

Require: M を領域の穴の数, D を ss-saddle connection diagram とする.

```

 $i \leftarrow M$ 
while 1-source-sink 点につながらない  $\partial$ -saddle connections あるいは homoclinic saddles
が存在する. do
  while  $\partial$ -saddle connection で結ばれた二つの  $\partial$ -saddles しか持たない円境界が存在す
  る. do
    一つの円境界とそれにつながる流線を  $D$  から消去して,  $O_i = B_2$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
  while 8 の字をした  $B_0$  に対応する (内部に構造を持たない) 流線構造が存在する. do
    一つの 8 の字構造の流線を一つ  $D$  から消去して,  $O_i = B_0$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
  while 内部に構造を持たない  $\partial$ -saddle connection によって結ばれた少なくとも四つ以
  上の  $\partial$ -saddles をもつ境界が存在する. do
    一つの  $\partial$ -saddle connection を  $D$  から消去して,  $O_i = C$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
end while
if  $D$  が ss- $\partial$ -saddles を持たない. then
  ss-saddle とそれにつながる流線を一本消去する.
  while  $D$  が ss-saddles (i.e.  $i \neq 0$ ) を持つ. do
    一つの ss-saddle とそれにつながる流線を  $D$  から消去して,  $O_i = A_0$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
  return  $IO_1 \cdots O_M$ 
else
  ss- $\partial$ -saddle とそれにつながる流線を一本消去する.
  while  $D$  が ss- $\partial$ -saddles を持つ. do
    一つの ss- $\partial$ -saddles とそれにつながる流線を  $D$  から消去して,  $O_i = A_2$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
  while  $D$  が ss-saddles (i.e.  $i \neq 0$ ) を持つ. do
    一つの ss-saddle とそれにつながる流線を  $D$  から消去して,  $O_i = A_0$  とおく.
     $i \leftarrow i - 1$ 
  end while
  return  $IO_1 \cdots O_M$ 
end if

```

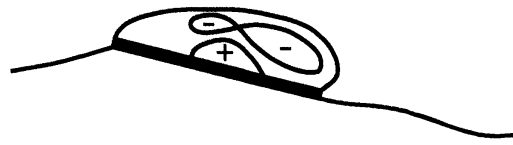
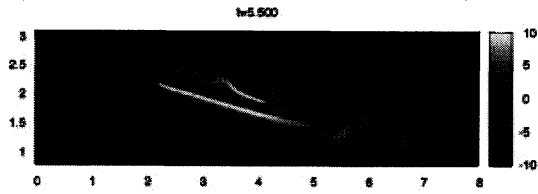
行い、 x 軸、 y 軸方向に周期境界条件を課している。平板で生じる渦が流れ去って x 方向の周期境界条件の影響で再び前方からその渦が流入する影響を取り除くため、渦度を人工的に消すフリンジ領域を設けている。その手法及びパラメータは文献 [5] を参考とした。また、平板に対してガウシアンフィルタを用いて平板の形状にやや丸みをもたせている。その手法の詳細は文献 [2] にある。数値計算のパラメータとしては、空間のサイズは x 方向 $L_x = 16$ 、 y 方向 $L_y = 4$ 、すなわち計算領域は縦横比 1 : 4 の長方形である。また、格子点数は x 方向に 1024、 y 方向に 256 とっている。時間方向の積分は 4 段 4 次精度ルンゲクッタ法を用い、時間刻み幅は 5×10^{-4} としている。VP 法特有のパラメータとしては境界への浸透率があり、このパラメータは 10^{-3} としている。流体の初期条件は静止状態からスタートし、一様流の速度を 1 とし与えた、平板形状はコード長（長辺）を $cl = 2$ 、厚み（短辺）を 0.1 とし、一様流速度を代表速度、平板のコード長を代表長さとしたレイノルズ数は 1370 である。また平板の一様流に対する迎角は $\theta = 15$ 度である。

まず、図 5(b) は上記の計算条件下において計算された一枚平板に加わる揚抗比（赤線）、揚力（青線）、抗力（緑線）の時間変化を表している。この図によれば時刻 $t = 5$ まで揚抗比は単調に増加した後で急激に減少し、それ以降は揚抗比の振動が見られる。時刻 $t = 5$ までの、静止状態の初期値からある一定の準定常的な運動状態にいたるまでは一種の遷移過程と考えられるので、揚抗比が振動を繰り返すようになる時刻である $t = 5$ 以後、特に揚抗比振動の最初の一周期（ $t = 5.5$ から $t = 12.8$ まで）の変動について検討する。

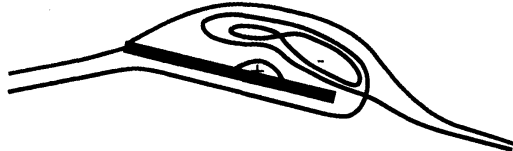
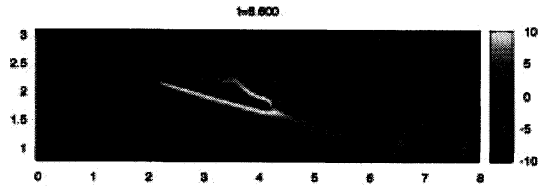
図 6 左側には揚抗比が最大になる $t = 5.5$ から $t = 11$ 前後で極小に陥ってから再び $t = 12.6$ で極大になるまでの渦度の時間発展の様子を示している。図の黄色い部分は反時計回りの正向きの渦成分がある領域を青い部分は時計回りの負向きの渦成分がある領域を表している。これらの時間発展は連続的な変化をしているために、通常の見方ではこれらの渦度場だけでは揚抗比の変動とその流れの変化とを特徴づけて捉えることは容易でない。そこで、これらの流れに対して語変換アルゴリズムを適用して、各時刻における流線の位相構造の語表現を与える。

既に述べたように、ここで扱っている流体は粘性流体であるため境界条件の違いを考慮しなければならない。そこで、与えられた数値計算結果から、この語変換アルゴリズムをどう適用するかを解説する。まず、流線の位相構造は数値計算によって計算された流れ関数の等高線をプロットすることで得られるので、境界から離れた領域ではこれら等高線の中から saddle point や ss- ∂ -saddle connections, ∂ -connections, ∂ -saddles といった構造安定な流線を構成する軌道をすべて抽出することができる。次に図 6 によると、平板の境界付近では境界層が形成され、その中では渦度が層状（すなわち、黄色や青色の薄い層）に分布しており、この近傍での流れ関数の振る舞いは平板にほぼ平行になっている。このことから、平板の境界を少し拡大して、境界層の上端を仮想的な境界と見なすことで、流れ場の境界条件が滑り境界条件とすることができて、我々の非粘性流体に対する語表現の理論を適用できる。なお、このような境界層の穏やかな振る舞いは常に保証されるわけではなく、本数値計算で用いた程度のレイノルズ数で成り立っている状態であることを注意しなければならない。実際に流れの速度が速くなったりしてレイノルズ数が高くなると、もはやこうした境界層の穏やかな振る舞いは期待できず、そのような流れ場に対しては我々の

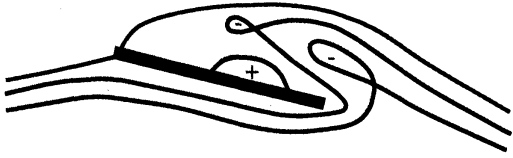
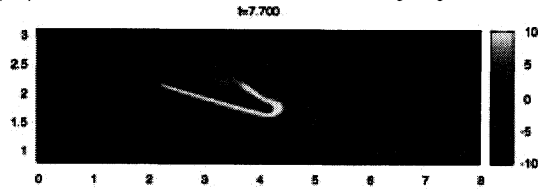
(a) $time = 5.5$ Word: $ICCB_0$



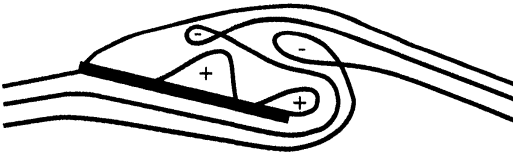
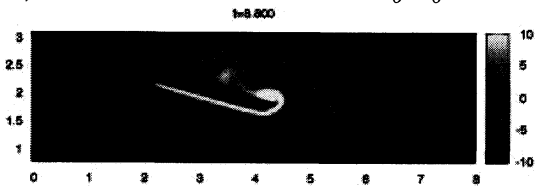
(b) $time = 6.6$ Word: IA_0B_0C



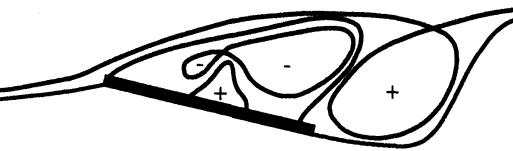
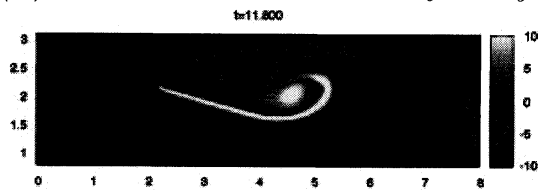
(c) $time = 7.7$ Word: IA_0A_0C



(d) $time = 8.8$ Word: IA_0A_0CC



(e) $time = 11.8$ Word: IA_0CCB_0



(f) $time = 12.6$ Word: $IA_0A_0CCB_0$

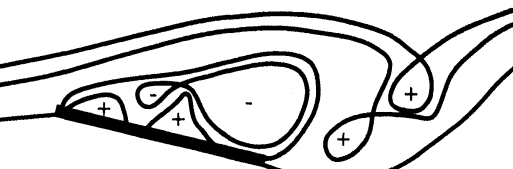
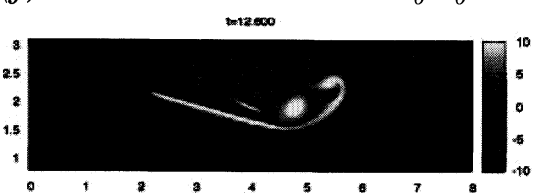


図 6: 時刻 $t = 5.5$ から 12.6 までの渦度の時間発展の様子とその極大 I -語表現. この間に揚抗比は最大から極小へ変化した後, 再び極大に変化している.

語変換アルゴリズムでは境界付近での流れを表現することは困難になることも予想される。

図 6 右側は上記の流線抽出のアルゴリズムを用いて時刻 $t = 5.5$ から $t = 12.6$ までの流線の位相構造の極大 I -語表現を示し、それに対して語表現を与えたものである。時刻 $t = 5.5$ のとき (図 6(a)) の流線構造は $ICCB_0$ で表現されるが、この CCB_0 に対応する渦構造は平板の上に ∂ -saddle connection によって「閉じ込められて」いる。こうした閉じ込め渦の存在が平板に加わる揚力を増加させ、最大の揚抗比を実現している。しかし、この閉じ込め渦は安定には存在できず、時間発展とともに流れの構造は変化して次第に揚力が減少していく。時刻 $t = 6.6$ の流線の位相構造 (図 6(b)) の語表現は IA_0B_0C となる。前の時刻で閉じ込められていた渦のうち B_0 に対応する 8 の字状に閉じこめられた双子渦構造は A_0 によって作られる homoclinic saddle connection に取り込まれてしまうため平板の上にもはやとどまれなくなっている。この B_0 に対応する双子渦構造は IA_0A_0C なる語表現を持つ $t = 7.7$ の流線構造 (図 6(c)) においては A_0A_0 なる二つの渦構造に分解して、その後は平板の外側への押し出される。一方で、時刻 $t = 8.8$ (図 6(d)) において、平板上側に生成する境界層から生成された渦度が平板の後端に集まってくることで、語 C に対応する新しい渦構造が生成され、その語表現は IA_0A_0CC に変化する。次の時刻 $t = 11.8$ の流線の位相構造 (図 6(e)) までは語表現は変化せず IA_0A_0CC のままであるが、この間で揚抗比は極小に達する。その後、時刻 $t = 11.8$ からは再びその位相構造の変化が始まる。時刻 $t = 11.8$ の流線構造は $IA_0A_0CCB_0$ で表現されるが、このときには平板の上に語 CCB_0 に対応する ∂ -saddle connection によって閉じ込められた $t = 5.5$ の時と同様の渦構造が再び生成されて、その構造が時刻 $t = 12.6$ まで継続する。この遷移のおかげで時刻 $t = 11$ 付近で極小状態にあった揚抗比が、この閉じ込め渦の出現により次の極大状態への遷移していることがわかる。なお、時刻 $t = 11.8$ や時刻 $t = 12.6$ (図 6(f)) における流線構造とそれに対応する語表現は少し変化するが、その語の中に含まれる CCB_0 という語に対応する閉じ込め渦の構造が消えないことから、この CCB_0 の閉じこめ渦構造が揚抗比の極大化に重要であることが示唆される。実際に、この時刻以後 CCB_0 に対応する閉じ込め渦は再び崩れて急速に揚抗比が次の極小状態へと向かっていく。

5 おわりに

本稿では、二次元多重連結領域における構造安定な非圧縮性（非粘性）流体の流線の位相構造に一意の文字列を割り当てる理論と、その文字列を具体的に生成するアルゴリズムについて解説し、その時間発展問題への応用例を一つ紹介した。一見区別のつきにくい流体運動の見せる流線パターンの位相構造を文字列によって明確に特徴づけることが可能になり、うまく行く場合には流れの時間発展を文字列の変化として表現することが可能になる。現時点では、各時刻における瞬間の流線構造の記述のみを行うだけだが、一旦文字列に置き換えることで、二つの異なる流線構造の語表現が与えられたとき、そのパターン間の遷移が可能になるか？また可能な場合は、どのような中間状態を経て移りあうかなどといった情報が文字列情報から判定できるようになる。この判定法については論文 [7] で解説されているが、こうした流れパターンの遷移の同定のみならず、語表現は流体構造の代

数表現を可能にするので、計算機などを用いて様々な新しい流線解析の手法を今後提供するものと考えている。

参考文献

- [1] P. ANGOT, C.-H. BRUNEAU AND P. FABRIE 1999 A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Num. Math.* **81**, 497–520.
- [2] D. KOLOMENSKIY AND K. SCHNEIDER 2009 A Fourier spectral method for the Navier-Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *J. Comput. Phys.* **228**, 5687–5709.
- [3] G. S. PATTERSON AND S. A. ORSZAG 1971 Spectral calculation of isotropic turbulence: Efficient removal of aliasing interaction. *Phys. Fluids* **14**, 2538.
- [4] T. SAKAJO, Y. SAWAMURA AND T. YOKOYAMA 2013 Unique encoding for streamline topologies of incompressible and inviscid flows in multiply connected domains. *Fluid Dynamics Research* to appear.
- [5] Y. SAWAMURA AND T. ISHIHARA 2012 Volume penalization 法による翼果まわりの流れの数値解析. *RIMS Kokyuroku on Study of bio-fluid mechanics and related problems* **1808**, 101–120.
- [6] T. YOKOYAMA AND T. SAKAJO 2013 Word representation of streamline topology for structurally stable vortex flows in multiply connected domains. *Proc. Roy. Soc. A* **469** doi:10.1098/rspa.2012.0558
- [7] T. SAKAJO AND T. YOKOYAMA 2014 Transition between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains, submitted.