

W代数の表現について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 荒川 知幸

1 Introduction

よく知られているように, Virasoro 代数は $\{L_n; n \in \mathbb{Z}\}$ と c のはるベクトル空間に, 次の交換関係を入れて定義される無限次元のリー環である:

$$[L_n, c] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (1)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (n, m \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

このような Virasoro 代数, あるいはアフィンリー環などの無限次元リー環の持つ著しい特色の一つに, 一部の表現の持つ modular 不変性が挙げられる. アフィンリー環の可積分表現, あるいは Virasoro 代数の極小系列表現がそうした表現にあたる.

こうした現象は, 現在では共形場理論, あるいは頂点作用素代数 (vertex operator algebra, 以下 VOA と略) の立場から理解されている. すなわち, “良い VOA の表現” の指標は必然的に modular 不変になる, というわけである (文献 [FZ] 参照). 指標の modular 不変性のこうした捉え方は moonshine 予想の解決などに応用された.

VOA という概念は無限次元リー環のある種の拡張であり, 当然, 無限次元リー環という枠組みでは捉え切れない対称性も取り扱うことができる. そのような VOA として, 代表的なものに W 代数というものが存在する.

実は, 文献によって W 代数という言葉の意味するところはまちまちであるが, 一般に Virasoro 代数の一般化を総称して W 代数と言う. このような W 代数のなかに, 最も major なものとして, 有限次元複素単純リー環 $\bar{\mathfrak{g}}$ に対して定義されるクラスのものが存在し, これを $W(\bar{\mathfrak{g}})$ とかく. この立場からいえば

$$\text{Virasoro 代数} = W(\mathfrak{sl}_2) \text{ 代数}$$

ということになる. 歴史的には, 最初に Fateev-Zamolodchikov が $W_3 = W(\mathfrak{sl}_3)$ 代数を定義し, 次に Fateev-Lukyanov が A, D 型一般の場合に拡張した. しかし, これらの代数は非常に複雑なものとなった.

例 1.1. $W(\mathfrak{sl}_3) = W_3$ 代数は generating fields

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}, \quad W(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(n)z^{-n-3}$$

を持ち、これらの間の関係式は次で与えられる。

$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(m+n) + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n,m}c, \quad (3)$$

$$c \text{ は中心元}, \quad (4)$$

$$[L(n), W(m)] = (2n-m)W(n+m), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [W(n), W(m)] &= (n-m) \left\{ \frac{1}{15}(n+m+3)(n+m+2) - \frac{1}{6}(n+2)(m+2) \right\} L(n+m) \\ &\quad + \frac{16}{22+5c}(n-m)\Lambda(n+m) + \frac{c}{360}n(n^2-1)(n^2-4)\delta_{n+m,0}. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\Lambda(n)$ はここだけの記号であり、

$$\Lambda(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : L(n+k)L(-k) : - \frac{3}{10}(n+2)(n+3)L(n). \quad (7)$$

(6) 式の右辺に表れる $1/(22+5c)$ は、実際には (6) の両辺に $22+5c$ が掛かっているものとして理解する。また、(7) に現れる $:$ は normal ordering である。(7) 式では、無限和が現れているので、 $L(n), W(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$), c たちはブラケットで閉じていないということになる。したがって、 $\mathcal{W}_3$ はリー環ではなく、あくまでも VOA として定義される (リー環と見ることもできるが、その場合生成元は無限個必要であり、関係式が書けない)。

Feigin-Frenkel [FF2] は、上のような複雑な $\mathcal{W}$ 代数を直接定義することを避け、 $\bar{g}$ のアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ から、コホモロジカルな“還元法 (reduction)”によって $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}(\bar{g})$ を定義し、上に述べた場合には知られているものに一致することを示した。Feigin-Frenkel による $\mathcal{W}(\bar{g})$ の構成法は、複雑な関係式を直接扱わずにすむ点、また、同様な“還元法”によって、その表現もアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ の表現から関手的に得ることができるという点でも優れており、現在知られている最も一般的で強力な $\mathcal{W}$ 代数の構成法である。

なお、 $\mathcal{W}$ 代数の Feigin-Frenkel 構成法は、最近 Kac-Wakimoto 等によりスーパーリー環の場合へと (非自明に) 拡張され、現在までに知られている全てのスーパーコンフォーマル代数がこの方法で現れるという、著しい結果が得られている (文献 [KRW, KW4] 参照)。

さて、 $\mathcal{W}(\bar{g})$ の表現のうち、応用上重要なのは、アフィンリー環の可積分表現のように、指標が modular 函数になるような“良い”性質を持つ既約表現である。Virasoro 代数の場合、このような性質を持つ表現は、極小系列表現 (minimal series representations) と呼ばれた。一般の $\mathcal{W}(\bar{g})$ の場合も、このような性質を持つ表現は (conjectural な存在であったが) 極小系列表現と呼ばれている。

$\mathcal{W}$ 代数の極小系列表現に関しては、1992 年頃の Frenkel-Kac-Wakimoto 予想 ([FKW]) が基本的である。Frenkel-Kac-Wakimoto は、Feigin-Frenkel 理論によって、アフィンリー環 $\mathfrak{g}$ の principal admissible 表現が $\mathcal{W}(\bar{g})$ の極小系列表現に対応することを予想した。

以下、本稿では、最近の研究 [A1, A2] を基に、Feigin-Frenkel の $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}(\bar{g})$ の表現論について述べる。特に、我々の結果 [A1, A2] により、Frenkel-Kac-Wakimoto

予想はほぼ解決されたことになる。なお、証明等については論文 [A1, A2] を参照されたい。

2 Feigin-Frenkel construction の有限次元版 (Kostant の定理)

Feigin-Frenkel による $\mathcal{W}$ 代数の定義は、技術的には、semi-infinite cohomology という、現在のところあまり一般的でない概念を使う。そこで、彼らの定義を説明する前に、その有限次元版を簡単に説明することにする。図式的には次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{有限次元リー環 } \bar{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\text{アフィン化}} & \text{アフィンリー環 } \mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \\
 \text{Kostant 1978} \downarrow & & \downarrow \text{Feigin-Frenkel 1990} \\
 \text{中心 } \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\text{アフィン化}} & \mathcal{W} \text{ 代数 } \mathcal{W}(\bar{\mathfrak{g}})
 \end{array}$$

以下、引き続き、 $\bar{\mathfrak{g}}$ を有限次元複素単純リー代数とし、三角分解 $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$ を固定する。 $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \sqcup \bar{\Delta}_-$ を対応する $\bar{\mathfrak{g}}$ のルートの集合 $\bar{\Delta}$ の分解、 $\bar{\Pi} \subset \bar{\Delta}_+$ を単純ルートの集合、 $\bar{W}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ のワイル群とする。 $U(\bar{\mathfrak{g}})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の包絡環、 $\mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}})$ を $U(\bar{\mathfrak{g}})$ の中心とする。また、 $\{e_\alpha, f_\alpha, (\alpha \in \bar{\Delta}_+), h_1, \dots, h_{\text{rank } \bar{\mathfrak{g}}}\}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の Chevalley 基底とする。

$\bar{\mathcal{C}}l$ を、 $\bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$ とその標準的な 2 次形式に付随する Clifford 代数とする。したがって、 $\bar{\mathcal{C}}l$ は、次を生成元と関係式とする $\mathbb{C}$ 代数である。

生成元: $\psi_\alpha, \psi_\alpha^* (\alpha \in \bar{\Delta}_+)$

関係式: $\{\psi_\alpha, \psi_\beta^*\} = \delta_{\alpha, \beta}, \{\psi_\alpha, \psi_\beta\} = \{\psi_\alpha^*, \psi_\beta^*\} = 0 (\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+)$.

ただし、 $\{X, Y\} = XY + YX$. また、 ψ_α は $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対応する $\bar{\mathcal{C}}l$ の元だとみなしている。 $\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-), \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_+)$ を、それぞれ $\bar{\mathfrak{n}}_-, \bar{\mathfrak{n}}_+$ の Grassmann 代数とすると、ベクトル空間としては

$$\bar{\mathcal{C}}l = \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-) \otimes \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_+)$$

である。また、 $U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ には自然にスーパー代数の構造が入る。

元 $\bar{\delta} \in U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta} &= \bar{\delta}^{\text{st}} + \bar{\chi}, \\
 \bar{\delta}^{\text{st}} &= \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_+} f_\alpha \psi_\alpha^* - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \bar{\Delta}_+} c_{\alpha, \beta}^\gamma \psi_\alpha^* \psi_\beta^* \psi_\gamma, \quad \bar{\chi} = \sum_{\alpha \in \bar{\Pi}} \psi_\alpha^*.
 \end{aligned}$$

ただし、 $[f_\alpha, f_\beta] = \sum_{\gamma \in \bar{\Delta}_+} c_{\alpha, \beta}^\gamma f_\gamma$. すると、

$$\{\bar{\delta}^{\text{st}}, \bar{\chi}\} = 0, (\bar{\delta}^{\text{st}})^2 = (\bar{\chi})^2 = 0$$

が成立することが確かめられる。従って,

$$\bar{\partial}^2 = 0,$$

よって

$$(\text{ad } \bar{\partial})^2 = 0 \quad (8)$$

が $U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ 上で成立する。ただし, adjoint はスーパー代数での意味。
 $U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ の次数付けを,

$$\deg \psi_\alpha = 1, \deg \psi_\alpha^* = -1 \ (\alpha \in \bar{\Delta}_+), \quad \deg u = 0 \ (u \in U(\bar{\mathfrak{g}}))$$

で定めると, 定義から, $\text{ad } \bar{\partial}$ は次数 -1 を持つ。従って, (8) から複体 $(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial})$ が定まり, ホモロジー

$$H_*(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial})$$

が定義される。

$U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ の積構造は, $H_*(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial})$ に, graded $\mathbb{C}$ -algebra の構造を誘導する。このとき, Kostant の結果 [Kos] から, 次を示すことができる。

定理 2.1. (1) $H_i(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial}) = 0 \ (i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

(2) 対応

$$\begin{array}{ccc} Z(U(\bar{\mathfrak{g}})) & \rightarrow & H_0(U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l, \text{ad } \bar{\partial}) \\ z & \mapsto & z \otimes 1. \end{array}$$

は $\mathbb{C}$ 代数の同型を与える。

さて, $\bar{\mathfrak{g}}$ 加群 M に対し, $\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M) = M \otimes \Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ とおく。 $\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ 上には自然に $\bar{\mathcal{C}}l$ が作用するので, $\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M)$ は $U(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \bar{\mathcal{C}}l$ 加群となる。特に $\bar{\partial}$ が作用し, $(\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial})$ は複体となる。元 $\bar{\chi} \in \bar{\mathfrak{n}}_-^* \subset \bar{\mathcal{C}}l$ は, $\bar{\mathfrak{n}}_-$ の指標を定めることに注意すると, 定義から $(\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial})$ はリー環のホモロジー $H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M \otimes \mathbb{C}_{\bar{\chi}})$ を計算する Chevalley complex に他ならない。ここで, $\mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ は $\bar{\chi}$ の定める $U(\bar{\mathfrak{n}}_-)$ の一次元表現である。故に,

$$H_i(\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial}) = H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M \otimes \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (9)$$

となる。

注意 2.2.

$$H_i(\bar{\mathcal{C}}_*(\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \bar{\partial}^{\text{st}}) = H_i(\bar{\mathfrak{n}}_-, M) \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

である。

定理 2.1 による同一視

$$Z(\bar{g}) = H_0(U(\bar{g}) \otimes \bar{Cl}, \text{ad } \bar{\partial}) \quad (10)$$

を用いると, (9) から, $U(\bar{g}) \otimes Cl$ の $\bar{C}_*(\bar{n}_-, M)$ への作用は $Z(\bar{g})$ のホモロジー $H_i(\bar{n}_-, M \otimes C_{\bar{\chi}})$ への作用を誘導することがわかる. したがって, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ についての対応

$$M \rightsquigarrow H_i(\bar{n}_-, M \otimes C_{\bar{\chi}}) \quad (11)$$

は $\bar{g}$ 加群の圏から $Z(\bar{g})$ 加群の圏への関手を与える.

3 $\mathcal{W}$ 代数の Feigin-Frenkel による定義

Feigin-Frenkel[FF2] は, 中心 $Z(\bar{g})$ に関する上の構成をアフィン化することにより $\mathcal{W}$ 代数を定義した. つまり, $\bar{g}$ を $\bar{g}$ に付随するアフィンリー環

$$\mathfrak{g} = \bar{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

で置換え, 上の構成を行うのである. このとき, $\bar{n}_-$ は

$$L\bar{n}_- \stackrel{\text{def}}{=} \bar{n}_- \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \subset \mathfrak{g}$$

で置換わる. 対応して, $\bar{Cl}$ は $L\bar{n}_- \oplus (L\bar{n}_-)^*$ とその上の標準的な 2 次形式に付随する Clifford 代数 Cl に置換わる. ただし, $(L\bar{n}_-)^*$ は $L\bar{n}_-$ の graded dual. $L\bar{n}_-$ の元 $f_\alpha(n) = f_\alpha \otimes t^n$ に対応する Cl の元を $\psi_\alpha(n)$, その双対元を $\psi_\alpha^*(-n)$ と書く. したがって, Cl は次の生成元と関係式を持つ.

生成元: $\psi_\alpha(n), \psi_\alpha^*(n)$ ($\alpha \in \bar{\Delta}_+, n \in \mathbb{Z}$)

関係式: $\{\psi_\alpha(m), \psi_\beta^*(n)\} = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{m+n, 0}$ ($\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+, m, n \in \mathbb{Z}$),

$\{\psi_\alpha(m), \psi_\beta(n)\} = \{\psi_\alpha^*(m), \psi_\beta^*(n)\} = 0$ ($\alpha, \beta \in \bar{\Delta}_+, m, n \in \mathbb{Z}$).

また, $\bar{\partial}$ は次の作用素 ∂ に置き換わる.

$$\partial = \partial^{\text{st}} + \chi.$$

ここで,

$$\partial^{\text{st}} = \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_+, n \in \mathbb{Z}} f_\alpha(-n) \psi_\alpha^*(n) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \bar{\Delta}_+ \\ k+l+m=0}} c_{\alpha, \beta}^\gamma : \psi_\alpha^*(k) \psi_\beta^*(l) \psi_\gamma(m) :, \quad (12)$$

$$\chi = \bar{\chi} = \sum_{\alpha \in \bar{\Pi}} \psi_\alpha^*(0). \quad (13)$$

すると, やはり

$$\{\partial, \chi\} = 0, \quad \partial^2 = \chi^2 = 0$$

が成立することが確かめられ,

$$\partial^2 = 0,$$

従って,

$$(\text{ad } \partial)^2 = 0 \quad (14)$$

となる.

ただし, 式 (12) において無限和が現れるので, ∂ はもはや $U(\mathfrak{g}) \otimes Cl$ の元ではない. そこで, $\kappa \in \mathbb{C}$ について

$$U_\kappa(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) / (K - (\kappa - h^\vee))$$

とおき, $U_\kappa(\mathfrak{g}) \otimes Cl$ の適当な意味の完備化 ([FZ] の意味での完備化) $\widehat{U_\kappa(\mathfrak{g}) \otimes Cl}$ を考え, ∂ をその元だとみなす. ここで, $h^\vee$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の dual Coxeter number. そうしておいて,

$$\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}}) := H_0(\widehat{U_\kappa(\mathfrak{g}) \otimes Cl}, \text{ad } \partial) \quad (15)$$

と定義し, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ に付随するレベル $\kappa - h^\vee$ の $\mathcal{W}$ 代数と呼ぶ.

ただし, 最初に述べたように本来, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ は VOA (vertex operator algebra) として定義される. したがって, (15) によって定義されているのは, 対応する field たちのフーリエ係数である. しかし, ここでは, VOA を説明する余裕は無いので省略する. VOA としての $\mathcal{W}$ 代数の定義, および上の定義との関係については [FF2, FKW, FB] を参照して頂きたい.

注意 3.1. (1) $\kappa = 0$ のときには Virasoro field が定義できないので, $\mathcal{W}_0(\bar{\mathfrak{g}})$ は VOA ではなく, vertex algebra として定義される. また, $\kappa \neq 0$ のとき, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ の Virasoro field $L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ は次の交換関係を満たす.

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c(\kappa)}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m, 0} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

ただし,

$$c(\kappa) = \text{rank } \bar{\mathfrak{g}} - 12 \left(\kappa |\bar{\rho}^\vee|^2 - 2 \langle \bar{\rho}, \bar{\rho}^\vee \rangle + \frac{|\bar{\rho}|^2}{\kappa} \right). \quad (16)$$

ここで, $\bar{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_+} \alpha$, $\bar{\rho}^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_+} \alpha^\vee$.

(2) $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合, $\kappa = p/q$ とおくと,

$$c(p/q) = 1 - 6(p - q)^2 / pq$$

となる. これは, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(p, q) = 1$, $p, q \geq 2$ のとき極小系列表現の中心電荷になる.

(3) Introduction で登場した $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3) = \mathcal{W}_3$ と上の $\mathcal{W}_\kappa(\mathfrak{sl}_3)$ との関係は次のようになる.

$$\mathcal{W}_\kappa(\mathfrak{sl}_3) = \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3) / (c - c(\kappa)).$$

$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ については次が基本的である.

定理 3.2 (Frenkel-Ben-Zvi[FB]). $1 = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{\text{rank } \bar{g}}$ を $\bar{g}$ の exponents とする. このとき, conformal dimension $d_1 + 1, \dots, d_{\text{rank } \bar{g}} + 1$ を持つ $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ の $\text{rank } \bar{g}$ 個の field 達 $W_1(z), W_2(z), \dots, W_{\text{rank } \bar{g}}(z)$ が存在し, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ は VOA として, これらの field たちで生成される.

$W_1(z)$ は定数倍を除き Virasoro field $L(z)$ に一致する. しかし, 一般の $W_i(z)$ 達の具体形及び交換関係は知られていない.

注意 3.3. $\kappa = 0$, すなわち critical level のとき, $\mathcal{W}_0(\bar{g})$ は $U_0(\bar{g}) = U(\bar{g})/(K + h^\vee)$ の完備化 $\widehat{U_0(\bar{g})}$ の中心と一致することが Feigin-Frenkel より知られている.

$\mathcal{O}_\kappa$ をアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ のレベル $\kappa - h^\vee$ の BGG 圏とする; すなわち, $\mathcal{O}_\kappa$ は, 次の条件を満たす加群 M からなる $\mathfrak{g}$ 加群の圏の充満部分圏である;

- (1) M はレベル $\kappa - h^\vee$ である (中心 K は $\kappa - h^\vee$ で作用する);
- (2) M への, $\mathfrak{g}$ の上三角巾零部分代数 $\mathfrak{n}_+$ の作用は locally nilpotent.
- (3) M は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の作用に関してウェイト分解を持ち, 各ウェイト空間は有限次元.
- (4) $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ が存在し, M のウェイトの集合は $\bigcup_{i=1}^n \mu_i - Q_+$ に含まれる. ここで, $Q_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha$. また, Δ_+ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの集合.

さて, $\mathcal{F}(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ を $\psi_\alpha(n)1 = 0$ ($n > 0$), $\psi_\alpha^*(n)1 = 0$ ($n \geq 0$) なるベクトル 1 で生成される Cl の既約表現とする. $\mathcal{O}_\kappa \ni M$ について, $C_\bullet(L\bar{\mathfrak{n}}_-, M) = M \otimes \mathcal{F}(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ とおき,

$$H_i(M) := H_i(C_\bullet(L\bar{\mathfrak{n}}_-, M), \partial) \quad (17)$$

と定める. ただし, 有限次元の場合と異なり, 添字 i は $\mathbb{Z}$ 全体を動く.

注意 3.4. $H_\bullet(M) = H_{\infty+}(\bar{L\bar{\mathfrak{n}}_-, M \otimes C_\chi)$ である. ただし, 右辺は Feigin の semi-infinite homology. また, C_χ は指標 $\chi: L\bar{\mathfrak{n}}_- \rightarrow \mathbb{C}$ によって定まる $U(L\bar{\mathfrak{n}}_-)$ の一次元表現.

かくして, $i \in \mathbb{Z}$ をパラメーターとして持つ, $\mathcal{O}_\kappa$ から $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ 加群の圏への関手

$$M \rightsquigarrow H_i(M) \quad (18)$$

を得た.

$M(\lambda)$ を最高ウェイト λ の Verma 加群, $L(\lambda)$ を $M(\lambda)$ の唯一の既約商加群とする. 次は本質的には教科書 [FB] の結果である.

命題 3.5. 任意の λ について次が成立する.

$$H_i(M(\lambda)) = 0 \quad (i \neq 0),$$

$$\text{ch } H_0(M(\lambda)) = \frac{q^{\frac{|\lambda + \rho|^2}{2\kappa}}}{\eta(\tau)^{\text{rank } \bar{g}}}.$$

ここで, $\text{ch } H_0(M(\lambda))$ は正規化された指標. すなわち,

$$\text{ch } H_0(M(\lambda)) = \text{tr}_{H_0(M(\lambda))} q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}},$$

また, $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{i \geq 1} (1 - q^i)$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$.

4 Frenkel-Kac-Wakimoto 予想

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ で λ の $\bar{\mathfrak{h}}$ への制限を表す. $\kappa \in \mathbb{C}$ について, $\mathfrak{h}_\kappa^*$ をレベル $\kappa - h^\vee$ のウェイトの集合とする;

$$\mathfrak{h}_\kappa^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \langle \lambda + \rho, K \rangle = \kappa\}.$$

$\Delta^{\text{re}} = \Delta_+^{\text{re}} \sqcup \Delta_-^{\text{re}}$ を $\mathfrak{g}$ の実ルートの集合, W を $\mathfrak{g}$ のワイル群とする. また, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ について,

$$R^\Lambda = \{\alpha \in \Delta^{\text{re}}; \langle \Lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\} \subset \Delta^{\text{re}} \quad (19)$$

とし, W^Λ を Λ の integral Weyl group とする. すなわち,

$$W^\Lambda = \langle s_\alpha; \alpha \in R^\Lambda \rangle \subset W.$$

ここで, s_α は α に付随する reflection.

定義 4.1 (Kac-Wakimoto[KW2]). $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ は次を満たすとき, principal admissible であると呼ばれる.

- (1) Λ は regular dominant である. すなわち, 任意の $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ について $\langle \Lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.
- (2) $W^\Lambda \cong W$.

Λ が principal admissible のとき, $L(\Lambda)$ は principal admissible module と呼ばれる. principal admissible module は modular property を持つ ([KW1, KW2]).

注意 4.2. $\mathfrak{g}$ の既約な可積分表現は principal admissible module である. しかし, V が $\mathfrak{g}$ の可積分表現のときは, $H_*(V) \equiv 0$ となってしまうことが知られている ([FKW]).

Pr^κ をレベル $\kappa - h^\vee$ の principal admissible weight のなす集合とする. 次が知られている.

命題 4.3 (Kac-Wakimoto[KW2]).

$\text{Pr}^\kappa \neq \emptyset \iff \kappa = p/q, p \in \mathbb{Z}_{\geq h^\vee}, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, (p, q) = 1, (q, r^\vee) = 1$. ただし, $r^\vee$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の lacing number.

定義 4.4. (1) $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ は全ての $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+$ について $\langle \bar{\lambda}, \bar{\alpha}^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}$ であるとき非退化であると呼ばれる.

- (2) $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ は $\bar{\Lambda}$ が非退化なとき, すなわち, 全ての $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+$ について $\langle \bar{\Lambda}, \bar{\alpha}^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}$ であるとき非退化であると呼ばれる.

$Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ で非退化な principal admissible weight のなす Pr^κ の部分集合を表す. もちろん, 支配的整ウエイトは $Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ に入らない.

次の事実が知られている.

命題 4.5. $\kappa = p/q$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq h^\vee}$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $(p, q) = 1$, $(q, r^\vee) = 1$ のとき,
 $Pr_{\text{non-deg}}^\kappa \neq \emptyset \iff$ さらに $q \geq h (= \bar{g}$ の Coxeter 数).

例 4.6. $\bar{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のとき, $Pr_{\text{non-deg}}^\kappa \neq \emptyset$ である必要十分条件は, $\kappa = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $(p, q) = 1$ となる. つまり, 極小系列表現の中心電荷に丁度対応している (注意 3.1(2) 参照).

さて, $\bar{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合は, これまで知られていることを組み合わせると次がわかる.

命題 4.7 ([FKW]). $\bar{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ かつ $\Lambda \in Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ のとき次が成立する.

- (1) $H_i(L(\Lambda)) = 0$ ($i \neq 0$).
- (2) $H_0(L(\Lambda))$ は Virasoro 代数の既約な極小系列表現.

Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW] は一般に次が成立することを予想した.

予想 1 (Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW]). $\Lambda \in Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ のとき次が成立する.

- (1) $H_i(L(\Lambda)) = 0$ ($i \neq 0$)
- (2) $H_0(L(\Lambda))$ は既約な $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ 加群.

注意 4.8. 予想 (1) を認めると, Euler-Poincaré principal から, $\Lambda \in Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ についての $H_0(L(\Lambda))$ の正規化された指標 $\text{ch } H_0(L(\Lambda))$ が次の様に計算される.

$$\text{ch } H_0(L(\Lambda)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}_{H_i(L(\Lambda))} q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}} \quad (20)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}_{C_i(L_{\bar{n}}, L(\Lambda))} q^{L_0 - \frac{c(\kappa)}{24}}. \quad (21)$$

Frenkel-Kac-Wakimoto [FKW] は (21) の右辺を計算し, それが, modular property を持つことを示した ($q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$).

5 $\mathcal{W}$ 代数の既約表現のパラメータ付け

標準的な議論により, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ の最高ウエイト既約表現が, その最高ウエイト, すなわち生成場 $W_1(z), \dots, W_{\text{rank } \bar{g}}(z)$ の 0-mode $W_1(0), \dots, W_{\text{rank } \bar{g}}(0)$ の固有値でパラメータ付けされる事は容易にわかる. しかし, $W_i(z)$ 達の具体形がわからないため, 現在のところこのパラメータ付けは実用的ではない.

一方, $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ は実際には VOA として定義される. 一般に, V を VOA としたとき, V に対応する Zhu 代数 $A(V)$ というものが定義され, 次が成立する.

命題 5.1 (Zhu). L_0 固有空間分解を持つ V の既約表現と $\mathcal{A}(V)$ の既約表現とは一対一に対応する

ここでは, Zhu 代数の定義はしない ([FZ] 参照) が, 上の命題において, V の既約加群 M に対応する $\mathcal{A}(V)$ の既約表現は, M の L_0 の最低固有値に対応する固有空間である.

さて, 定理 2.1 を使い, 次を示すことができる.

定理 5.2 ([A2]). $\mathbb{C}$ 代数としての次の自然な同型が存在する

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \quad (22)$$

注意 5.3. 定理 5.2 の同一視のもとで,

$$[L_0] = \frac{1}{2\kappa} \Omega - \frac{\kappa}{2} |\bar{\rho}^\vee|^2 + \langle \bar{\rho}, \bar{\rho}^\vee \rangle,$$

となる. ここで, $[L_0]$ は L_0 の $\mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}}))$ の中でのクラスで, Ω は $U(\bar{\mathfrak{g}})$ の Casimir 元である.

Harish-Chandra isomorphism を $\gamma: \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} S(\bar{\mathfrak{h}})^{\bar{W}}$ とし,

$$\gamma_\lambda = (\text{evaluation at } \bar{\lambda} - \bar{\rho}) \circ \gamma: \mathcal{A}(\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})) = \mathcal{Z}(\bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathbb{C}$$

とおく. $L(\gamma_\lambda)$ を, infinitesimal character γ_λ に, 命題 5.1 によって対応する $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ の既約表現とする.

定理 5.4.

$$\{L(\gamma_\lambda); \bar{\lambda} + \bar{\rho} \in \bar{W} \setminus \bar{\mathfrak{h}}^*\}$$

は L_0 固有値分解を持つ既約な $\mathcal{W}_\kappa(\bar{\mathfrak{g}})$ 加群の完全代表系である.

6 主結果

以下, κ は non-critical, すなわち, $\kappa \neq 0$ であるとする.

$\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*$ について, その local composition factor に $L(w \circ \Lambda)$, $w \in W^\Lambda$, に同型な既約表現しか現れない加群からなる $\mathcal{O}_\kappa$ の充満部分圏を $\mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$ で表す. すると, 圏として,

$$\mathcal{O}_\kappa = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^* / \sim} \mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$$

となる. ここで, $\sim$ は $\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \mu \in W^\lambda \circ \lambda$ で定義された同値関係である.

定理 6.1. $\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*$ が非退化であるとき, 以下が成立する.

- (1) ([A1]) 任意の $\mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$ の対象 V について $H_i(V) = \{0\}$ ($i \neq 0$).
- (2) ([A2]) $H_0(L(w \circ \Lambda)) = L(\gamma_{\overline{w \circ \Lambda}})$ ($\forall w \in W^\Lambda$).

注意 6.2. Λ が非退化であることと, $w \circ \Lambda$ ($w \in W^\Lambda$) が非退化であることは同値である.

上の定理 6.1 を $\Lambda \in Pr_{\text{non-deg}}^\kappa$ の場合に適用すれば, 先に述べた Frenkel-Kac-Wakimoto の予想は解けた事になる. したがって, modular property を持つ $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ の既約表現が得られた.

さらに, 一般に, $\Lambda \in \mathfrak{h}_\kappa^*$ が非退化なとき, 定理 6.1(1) より, 対応

$$V \rightsquigarrow H_0(V)$$

は圏 $\mathcal{O}_\kappa^{[\Lambda]}$ から $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ 加群の圏への完全関手を与える. 従って, 命題 3.5 とあわせると, 非退化な $\bar{\lambda} \in \bar{\mathfrak{h}}^*$ に対応する $\mathcal{W}_\kappa(\bar{g})$ の既約表現 $L(\gamma_{\bar{\lambda}})$ の指標がわかったことになる.

References

- [A1] Arakawa, T.; Vanishing of cohomology associated to quantized Drinfeld-Sokolov reduction; math.QA/0303172, to appear in Int. Math. Res. Not.
- [A2] Arakawa, T.; Quantized reduction and representations of $\mathcal{W}$ -algebras, to appear
- [Bac] Backelin, E.; Representation of the category $\mathcal{O}$ in Whittaker categories. Int. Math. Res. Not. 1997, no. 4, 153–172.
- [Fei] Feigin, B. L.; Semi-infinite homology of Lie, Kac-Moody and Virasoro algebras. Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), no. 2(236), 195–196.
- [FF1] Feigin, Boris L. and Frenkel, Edward V.; Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, Comm. Math. Phys., 128, 1990, no. 1, 161–189
- [FF2] Feigin, B., Frenkel, E.; Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras. Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 199
- [Fre] Frenkel, E; $\mathcal{W}$ -algebras and Langlands-Drinfeld correspondence. New symmetry principles in quantum field theory (Cargse, 1991), 433–447, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 295, Plenum, New York, 1992.
- [FB] Frenkel, E., Ben-Zvi, D.: Vertex algebras and algebraic curves. Mathematical Surveys and Monographs, 88.
- [FKW] Frenkel, E., Kac, V., Wakimoto, M.: Characters and fusion rules for $\mathcal{W}$ -algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction. Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 2, 295–328.
- [FM] Frenkel, I. B., F. Malikov, F.; Kazhdan-Lusztig tensoring and Harish-Chandra categories, q-alg/9703010

- [FZ] Frenkel, I. B., Zhu, Y Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* 66 (1992), no. 1, 123–168.
- [KRW] Kac, V. G., Roan, Shi-shyr., Wakimoto, M.: math-ph/0302015.
- [KW1] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 85 (1988), no. 14, 4956–4960.
- [KW2] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Classification of modular invariant representations of affine algebras. *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, 138–177, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
- [KW3] Kac, V. G., Wakimoto, M.: Branching functions for winding subalgebras and tensor products. *Acta Applicandae Math.* 21, 3–39 (1990)
- [KW4] Kac, V. G., Wakimoto, M.: math-ph/0304011
- [Kos] Kostant, B.: On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.* 48 (1978), no. 2, 101–184. 329–387.
- [Zhu] Zhu, Y.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. American Math. Soc.* vol. 9, No. 1, 1996, 237–302.
- [V1] Voronov, A. A.: Semi-infinite homological algebra. *Invent. Math.* 113 (1993), no. 1, 103–146.
- [V2] Voronov, A. A.: Semi-infinite induction and Wakimoto modules. *Amer. J. Math.* 121 (1999), no. 5, 1079–1094.