

circulant 制約を持った隣接色制約付き彩色問題の応用と解析

上嶋 章宏 (UEJIMA Akihiro)* 真田 亜希子 (SANADA Akiko) 伊藤 大雄 (ITO Hiro)[†]
上原 秀幸 (UEHARA Hideyuki) 横山 光雄 (YOKOYAMA Mitsuo)

豊橋技術科学大学 情報工学系

(Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi Univ. of Technology)

1 はじめに

グラフ $G = (V, E)$ は節点集合 V と枝集合 $E \subseteq V \times V$ の組で定義される (本研究では単純無向グラフのみを扱う). グラフ G に対して, その節点集合を $V(G)$, 枝集合を $E(G)$ で表現することもある. $x \in V(G)$ に対し, $\text{adj}_G(x) := \{y \in V(G) | (x, y) \in E(G)\}$ と定義する. n 節点の完全グラフ, 閉路, 閉路の補グラフをそれぞれ K_n , C_n , $\overline{C_n}$ で表す. 本稿では彩色問題の拡張として以下のように定義される問題を取り扱う.

隣接色制約付き彩色問題

(Coloring Problem with Restrictions of Adjacent Colors (COLRAC))

入力: 被彩色グラフ G と隣接色制約グラフ H .

要請: すべての $(u, v) \in E(G)$ に対し $f(u) \neq f(v)$ で, かつ, $(f(u), f(v)) \notin E(H)$ を満足する関数 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ が存在するかを判定せよ.

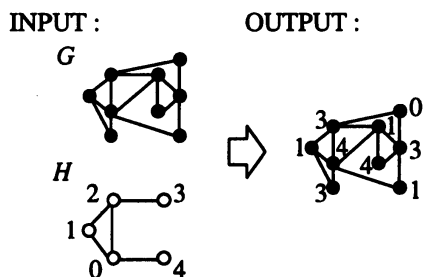


図 1: COLRAC の問題例

隣接色制約グラフ H の各節点 $i \in V(H)$ は色 i を表し, 任意の節点对 $i, j \in V(H)$ に対し $(i, j) \in E(H)$ ならば色 i と j は G での隣接節点对に彩色

不可能であることを意味する. $E(H) = \emptyset$ ならば, COLRAC は従来の彩色問題と等価である. 上記要請を肯定する関数 f を H での G の彩色関数と呼び, 彩色関数 f が存在するとき G は H で彩色可能と言う. 但し $E(H) = \emptyset$ の場合 $|V(H)|$ -彩色可能と言うこともある. また, COLRAC の入力グラフ H を限定するときその問題を H -COLRAC と記す. 但し $E(H) = \emptyset$ の場合 $|V(H)|$ -COLRAC あるいは $|V(H)|$ -彩色問題と記すこともある.

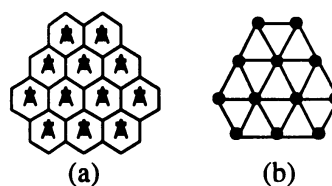


図 2: 無線通信局の配置 (a) と対応するグラフ (b)

COLRAC は我々が提案した概念であり [6], その応用の一つに無線通信でのチャネル割り当て問題が挙げられる. チャネル割り当て問題は電波の干渉を考慮し各セルの基地局にチャネルを割り当てる問題であり, サービスエリアの干渉関係は各セルを節点に干渉の恐れのあるセル間に枝を張ることでグラフにモデル化できる (図 2 は隣接するセル間にのみ干渉の恐れがある場合を示す). 異なるチャネル間に干渉の恐れがない場合 (図 3: 通常の場合), チャネル割り当て問題は彩色問題として定式化できる.

また, 異なるチャネル間に干渉の恐れがある場合 (図 3: 干渉のある場合), 従来の彩色問題での定式化は困難であったが, チャネルの干渉関係は各チャネルを節点に干渉の恐れのあるチャネル間に枝を張ることでグラフにモデル化でき, COLRAC

*E-mail: uejima@comm.ics.tut.ac.jp

[†]E-mail: ito@tutics.tut.ac.jp

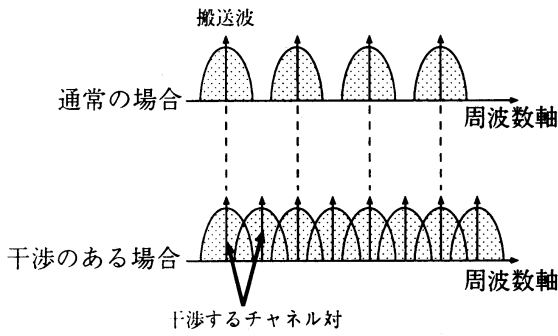


図 3: チャンネル配置の例

として容易に定式化できる．また，チャンネル割り当てに関して類似した問題を対象にいくつか研究が行なわれている [1][4][5] が，問題 COLRAC の定義はそれらの問題と比較して簡単である．

H と H' を隣接色制約グラフとする．任意の被彩色グラフ G に対し， G が H で彩色可能であるとき，そのときに限り， G が H' で彩色可能であるならば， H と H' が彩色に関して同値であると呼ぶ．

K_n -COLRAC は， K_n の形状から 1-彩色問題 (1-COLRAC) と等価ある．このことから K_n と K_1 は彩色に関して同値であると言える． K_n に対する K_1 のように，形状がより単純で彩色に関して同値なグラフが存在する可能性があり，そのようなグラフの発見が COLRAC の解法を容易にすると期待できる．そこで次の問題を定義する．

隣接色制約グラフ簡単化問題 (Restriction Graph Simplification Problem (SIMP))

入力： 隣接色制約グラフ H ．

要請： グラフ H の誘導部分グラフで，かつ， H と彩色に関して同値である最小の節点数を持つグラフ H' を見つけよ．

SIMP の入力グラフ H 自身が解のとき，グラフ H は SIMP において極小であると言う．彩色問題が NP-完全である [2] ことから，COLRAC も NP-完全であることは明らかである．しかし SIMP が NP-困難か否かは不明であり，むしろ様々な性質を含む興味深い問題であると考ええる．

2 諸性質

以下では，グラフが SIMP において極小でないことを示す性質として複合消去を示す．

定理 2.1 (複合消去) H を隣接色制約グラフとする． $\delta: B \rightarrow A$ を $A, B \subseteq V(H)$, $A \cap B = \emptyset$, に対する写像とする．以下の条件を考える．

置き換え可能性

任意の被彩色グラフ G に対して， H での G の彩色関数 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ が存在するならば，

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) \notin B \\ \delta(f(x)) & \text{if } f(x) \in B \end{cases}$$

は H での G の彩色関数である．

このとき，置き換え可能性が成立するための必要十分条件は以下の条件 (1) – (3) をすべて満足することである．

- (1) 全ての $b \in B$ に対して， $(b, \delta(b)) \in E(H)$ ．
- (2) 全ての $b \in B$ に対して， $\text{adj}_H(\delta(b)) - B \subseteq \text{adj}_H(b)$ ．
- (3) 全ての $b_i, b_j \in B$ ($b_i \neq b_j$) に対して， $(\delta(b_i), \delta(b_j)) \in E(H)$ または $\delta(b_i) = \delta(b_j)$ ならば， $(b_i, b_j) \in E(H)$ ． □

定理 2.1 の証明は省略する ([7] を参照のこと)．グラフ H で置き換え可能性が成立するならば， H で彩色可能な任意の被彩色グラフ G は $V(H) - B$ による誘導部分グラフでも彩色可能であり，その逆については自明である．つまりそれら 2 つのグラフは彩色に関して同値となる．従って，以下の定理が成立する．

定理 2.2 任意のグラフ H について置き換え可能性を成立させる集合 $A, B \neq \emptyset$ と関数 δ が存在するならば，グラフ H は SIMP において極小でない． □

3 Circulant graph

定義 3.1 節点数 n と $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ である k 個の整数 a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) によって定義されるグラフを *circulant graph* と呼び， $(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$ で表現する．このとき節点 i ($i =$

$0, 1, \dots, n-1$) は節点 $i \pm a_1, i \pm a_2, \dots, i \pm a_k$ ($\text{mod } n$) と隣接する。

n 節点の完全グラフ K_n , 閉路 C_n , 閉路の補グラフ $\overline{C_n}$ はそれぞれ $(n; 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$, $(n; 1)$, $(n; 2, 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$ で表現でき, circulant graph の部分クラスであることが分かる。以下では SIMP の入力をこれら 3 つのグラフに限定した場合の性質を示す。

3.1 完全グラフ

完全グラフ K_n に対し, ある節点 $i \in V(K_n)$ を考える。このとき, $A = \{i\}$, $B = V(K_n) - \{i\}$ とし, 任意の $b \in B$ に対し $\delta(b) = i$ とすると, これは定理 2.1 での置き換え可能性を満足する。従って $K_n (n \geq 2)$ は SIMP において極小でなく, 次の命題が得られる。

命題 3.2 K_n -COLRAC は 1-彩色問題と等価である。 $\square$

3.2 閉路

C_n の節点を時計回りに $\{0, 1, \dots, n-1\}$ と番号付けする。もし n が偶数ならば, $A = \{1, 3, \dots, n-1\}$, $B = \{0, 2, \dots, n-2\}$, 各 $b \in B$ に対し $\delta(b) = b+1$ とすると, この A, B, δ は定理 2.1 での置き換え可能性を満足する。従って, n が偶数の場合 C_n は SIMP において極小でなく, C_n -COLRAC は $n/2$ -彩色問題と等価である。同様に $n = 3$ ならば, $A = \{2\}$, $B = \{0, 1\}$, $\delta(0) = \delta(1) = 2$ は置き換え可能性を満足し, C_3 -COLRAC は 1-彩色問題と等価である。任意の奇数 $n \geq 5$ に対しては, C_n が SIMP において極小であることが示せる ([6][7] を参照)。以上の議論から, 以下の命題が得られる。

命題 3.3 C_3 -COLRAC は 1-彩色問題と等価である。任意の整数 $m \geq 2$ に対し, C_{2m} -COLRAC は m -彩色問題と等価である。 C_{2m+1} は SIMP において極小である。 $\square$

この性質から COLRAC が彩色問題を真に含むことが言える。グラフ H で彩色可能なグラフのクラスを $\mathcal{G}(H)$ と定義する。但し $E(H) = \emptyset$ の場合, $\mathcal{G}(H)$ を $\mathcal{G}(|V(H)|)$ と記すことがある。このとき

次の性質が証明できる (証明は省略。[7] を参照のこと)。但し $\subset$ は真部分集合を表す。

命題 3.4 任意の整数 $m \geq 2$ に対して, $\mathcal{G}(m) \subset \mathcal{G}(C_{2m+1}) \subset \mathcal{G}(m+1)$ 。 $\square$

3.3 閉路の補グラフ

前節と同様に, 閉路 C_n の節点を時計回りに $\{0, 1, \dots, n-1\}$ と番号付けし, 各節点 $i \in V(C_n)$ に対し $V(\overline{C_n})$ での対応する節点を $\bar{i}$ と表現する。

もし n が偶数ならば, $A = \{n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n-1\}$, $B = \{1, 2, \dots, n/2 - 1\}$ とし, 各 $b \in B$ に対し $\delta(b) = n-b$ とすると, これら A, B, δ は定理 2.1 での置き換え可能性を満足する。従って, n が偶数の場合 $\overline{C_n}$ は SIMP において極小でない。もし n が奇数ならば, $\overline{C_n}$ が SIMP において極小であることが示せる (証明は省略する。[7] を参照のこと)。従って次の命題が得られる。

命題 3.5 任意の整数 $m \geq 1$ に対し, $\overline{C_{2m}}$ は SIMP において極小でなく, $\overline{C_{2m+1}}$ は SIMP において極小である。 $\square$

4 彩色シミュレーション

隣接色制約がグラフ彩色に視覚的影響を与えることを確認することを目的に, COLRAC の直接的な応用例として平面グラフ彩色のシミュレーションを行なった。COLRAC の入力グラフを次のように限定する。

COLRAC の入力グラフ

被彩色グラフ : 平面グラフ。

隣接色制約グラフ : circulant graph $(n; 1, 2, \dots, p, (n; q, q+1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor))$ 。

このとき各節点には, 光の三原色 RGB を n 当分することで得られる各色が割り当てられており, RGB データの変化順序に従い, $(255, 0, 0)$ を節点 0 とし, 順次番号付けを行なう。circulant graph $(n; 1, 2, \dots, p)$ を同系色制約, $(n; q, q+1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$ を反対色制約と呼ぶ。これらの制約は彩色結果に視覚的效果を与え易いと考えられる。(図 4 参照。)

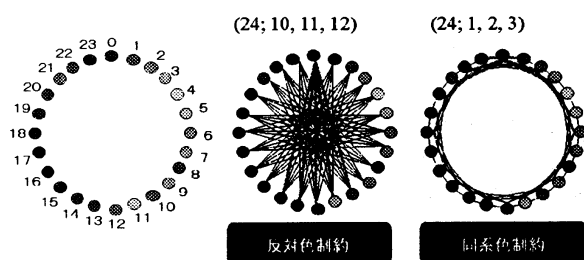


図 4: 反対色制約と同系色制約

彩色アルゴリズムは5-彩色アルゴリズムを基に、各節点に彩色可能な色の中からランダムに一色を選択するという方法を採用。

彩色結果への視覚的影響を観察すると、反対色制約については q を小さくするに従い、近傍に同系色が集まりグラデーションのような彩色結果が得られていることが分かる。同系色制約については、 p を大きくするに従い、反対色制約の場合とは逆に、近傍に反対色が集まるため各彩色エリアの境界が明確になるような彩色結果が得られた。付録Aとして、被彩色グラフをメッシュ状の地図の双対グラフとし、 $n = 24$ の場合の彩色結果を示す(彩色結果の詳細は、http://www.yilab.tutics.tut.ac.jp/uejima/coloring_data/LA_symp/を参照のこと)。

5 まとめ

本稿では、隣接色制約グラフを circulant graph に限定し、特に完全グラフ、閉路、閉路の補グラフについて SIMP における極小性を明らかにした。更に、興味深い結果として閉路で彩色可能なグラフのクラスの包含関係を示した。また、COLRACの彩色への視覚的効果を確認するために、制約グラフを反対色制約と同系色制約に限定し彩色シミュレーションを行ない、その結果から視覚的効果を確認した。

ごく最近、我々の提案した COLRAC とほぼ等価な問題として H -彩色問題が提案されていることが分かった。 H -彩色問題とは、固定されたグラフ H が与えられたとき以下のように定義される ([3]を参照のこと)。

H -彩色問題

入力: グラフ G .

質問: すべての $(u, v) \in E(G)$ に対し

$(f(u), f(v)) \in E(H)$ を満足する関数

$f: V(G) \rightarrow V(H)$ が存在するか?

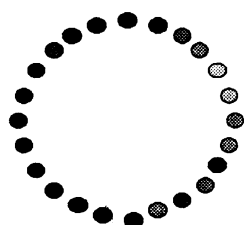
H -彩色問題は COLRAC と比較して、グラフ H での枝の扱い方が逆で、またグラフ H を固定する点で異なるが、ほぼ等価な問題と言える。この問題に対して多くの研究が行なわれており、当面の課題として H -彩色問題に関する既知の研究結果の調査と我々の研究結果との関連性あるいは新規性などの整理が挙げられる。

参考文献

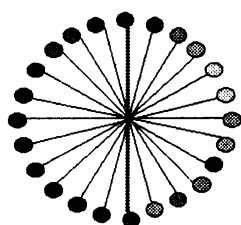
- [1] Cung, V., & Jiang, M., "Solving a very large scale multi-service frequency planning in civilian aviation," Technical Report of PRiSM, N° 97/005, 1997. (<http://www.prism.uvsq.fr/rapports/>)
- [2] Garey, M. R., Johnson, D. S., & Stockmeyer, L., "Some simplified NP-complete graph problems," Theoretical Computer Science, 1, pp. 237-267, 1976.
- [3] Hell, P., & Nešetřil, J., "On the Complexity of H -Coloring," Journal of Combinatorial Theory, B 48, pp. 92-110, 1990.
- [4] Miyamoto, Y. & Matsui, T., "Algorithms for channel assignment problems," Information Processing Society of Japan, Transactions on Mathematical Modeling and Its Applications, 40, SIG2(TOM1), pp. 23-32, 1999.
- [5] Sengoku, M., Tamura, H., Shinoda, S., Abe, T., & Kajitani, Y., "Graph theoretical considerations of channel offset systems in a cellular mobile system," IEEE Transactions on Vehicular Technology, 40, 2, pp. 405-411, 1992.
- [6] Uejima, A., Ito, H., Uehara, H., & Yokoyama, M., "Coloring problem with restrictions of adjacent colors," IFOS'99, Beijing, China, Aug, 1999.
- [7] 上嶋 章宏, "隣接色制約付き彩色問題に関する研究," 修士論文, 豊橋技術科学大学, Feb., 2000.

付録 A

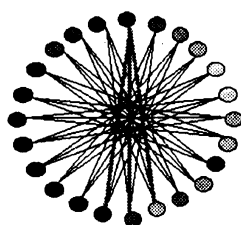
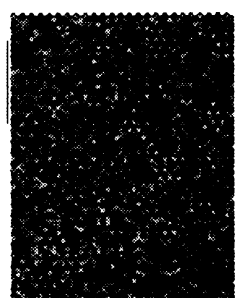
反対色制約



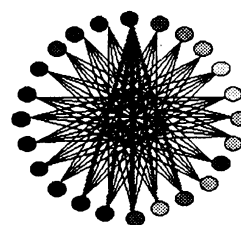
(24;)



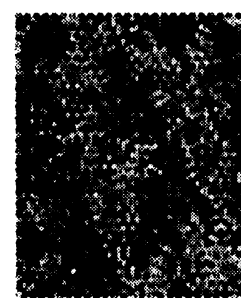
(24; 12)



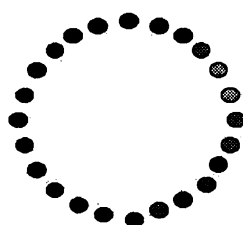
(24; 11, 12)



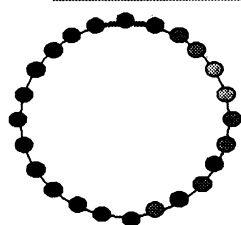
(24; 10, 11, 12)



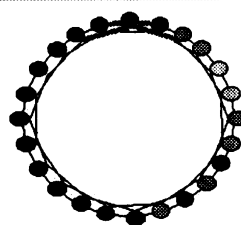
同系色制約



(24;)



(24; 1)



(24; 1, 2)



(24; 1, 2, 3)

