

ベクトル空間の拡張と集合最適化問題

Extension of vector space and set optimization problem

秋田県立大学 システム科学技術学部 経営システム工学科

Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

荒谷 洋輔 (Araya, Yousuke) *

1 はじめに

集合の代数演算については、次の基本的な性質がある。

命題 1.1 (Rådström[26], Rockafellar, Convex Analysis[27], 金 [14]). $A, B, D \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \mu_1 \geq 0$ とすると、次が成り立つ。

$$(i) \quad A + B = B + A$$

$$(ii) \quad (A + B) + D = A + (B + D)$$

$$(iii) \quad A + \{0\} = A$$

$$(iv) \quad 0_Y \in A + (-A)$$

$$(v) \quad A + \hat{A} = \{0_Y\} \text{ となるような } \hat{A} \in \mathcal{V} \text{ が存在するとは限らない。}$$

$$(vi) \quad \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(vii) \quad (\lambda_1 + \mu_1) \cdot A \subset \lambda_1 \cdot A + \mu_1 \cdot A$$

もし、 A が凸集合ならば、 $(\lambda_1 + \mu_1) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \mu_1 \cdot A$ が言える。

$$(viii) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$$

$$(ix) \quad 1 \cdot A = A$$

$$(x) \quad 0 \cdot A = 0_Y$$

Rådström[26] は、ベクトル空間における集合の加法とスカラー倍に関する性質を指摘している。上記の性質 (iv)、(v)、(vii) に着目することで Rådström は、加法半群を群に埋め込むことができるか、また正のスカラーの場合に新しい乗算が半群上の元の乗算と一致するようにスカラーとの乗算をこの群に拡張できるかどうかという疑問を提示した。それに対して Rådström は、ノルム空間における埋め込み定理を与えることで解決に至った。さらに塗矢-黒岩 [16, 21] は、その埋め込み定理における本質的なアイデアを集合最適化問題に適用している。

本稿では、集合最適化問題を取り扱う上でより適したベクトル空間の拡張を考える。さらには、集合関係 [15] における代数構造・順序構造について考察する。所々に、筆者の感想がある。

*(E-mail: y-araya@akita-pu.ac.jp)

2 Semi-vector space

本稿では Y を線形位相空間、 $\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、 A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\text{int}A$ 、 $\text{cl}A$ と表す。以下の記号を導入する。

- $\mathcal{V} : Y$ の空でない部分集合全体、
- $\text{conv}(\mathcal{V}) : Y$ の空でない凸部分集合全体、
- $\text{int}(\mathcal{V}) : Y$ の空でない開部分集合全体、
- $\text{cl}(\mathcal{V}) : Y$ の空でない閉部分集合全体。

$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $V \in \mathcal{V}$ に対して、2つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$(\text{OP}) \quad V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, \quad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

また、 $V_1, V_2 \in \text{cl}(\mathcal{V})$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $V \in \text{cl}(\mathcal{V})$ に対して、2つの集合の和・スカラー積は、以下のように定義される。

$$(\text{cl-OP}) \quad V_1 + V_2 := \text{cl}\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, \quad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

さらに、 $V_1, V_2 \in \text{int}(\mathcal{V})$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $V \in \text{int}(\mathcal{V})$ に対して、2つの集合の和・スカラー積は、以下のように定義される。

$$(\text{int-OP}) \quad V_1 + V_2 := \text{int}\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, \quad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

命題 1.1 の性質に注目して、次の概念が導かれる。

定義 2.1 (semi-vector space). 空でない集合 Z に加法演算 $+: Z \times Z \rightarrow Z$ 、正のスカラー乗法 $\odot: \mathbb{R}_+ \times Z \rightarrow Z$ を定義する。 Z が零元 $\theta \in Z$ をもつ semi-vector space であるとは、任意の $z, z_1, z_2 \in Z$ と $\alpha, \beta \geq 0$ に対して、以下の公理が満たされるときである。

$$(\text{SV1}) \quad (z_1 + z_2) + z = z_1 + (z_2 + z)$$

$$(\text{SV2}) \quad z + \theta = z$$

$$(\text{SV3}) \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(\text{SV4}) \quad \alpha \odot (\beta \odot z) = (\alpha\beta) \odot z$$

$$(\text{SV5}) \quad 1 \odot z = z$$

$$(\text{SV6}) \quad 0 \odot z = \theta$$

$$(\text{SV7}) \quad \alpha \odot (z_1 + z_2) = \alpha \odot z_1 + \alpha \odot z_2$$

$$(\text{SV8}) \quad \alpha \odot z + \beta \odot z = (\alpha + \beta) \odot z$$

Z が位相空間であるとき、もし演算 $+$ と $\odot$ に関して連続ならばそれは topological semi-vector space と呼ばれる。

上記の公理に注目すると、まずはベクトル空間と比べて加法に関する逆元の存在性が保障されていない。また、分配法則の一部である公理 (SV8) も特徴的である。これは、すべての一点集合は凸であることを主張している。Prakash-Sertel[24] は (SV8) を “pointwise convex” と呼んでいる。

例 1 ([19]). ある一点集合は凸でないこともあり得ることに注意する。 $Z = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ のべき集合) として、 $A := \{0, 1\} \in Z$ を考える。すると、次が確かめられる。

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \neq A$$

命題 2.2 ([19, 23]). 任意の *semi-vector space* について、次は同値である。

- (i) すべての一点集合は凸である。
- (ii) (SV8) を満たす。

上記の Semi-vector space に非常に似ている（あるいは全く同じ）概念は、過去に様々な文献で検証されている。以下は、その一例である。

- Löhne[18, 19] for conlinear space
- Gähler-Gähler[7](semi vector space) for problems of fuzzy analysis
- Pap[22] for problems of measure theory
- Godini[9](almost linear space) for approximation theory
- Prakash-Sertel[23, 24](semivector space) for topological fixed point problems
- Janyška-Modugno-Vitolo[12] proposed the concept of positive spaces and their rational powers and showed that how these concepts can be used as scale spaces in a broad class of physical theories.

例 2 ([9, 18, 23]). *semi-vector space* の例は、以下のものがある。

- (1) 全てのベクトル空間 V 。
- (2) $\mathbb{R}_+ := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$ とその一点 compact 化した空間 $[0, \infty]$ 。
- (3) *semi-vector space* で $0_Z \in C$ を持つような全ての凸錐 $C \subset Z$ 。
- (4) $(\text{conv}(\mathcal{V}), +, \cdot)$ と演算 (OP)。
- (5) $(\text{cl}(\text{conv}(\mathcal{V})), +, \cdot)$ と演算 (cl-OP)。
- (6) $(\text{int}(\text{conv}(\mathcal{V})), +, \cdot)$ と演算 (int-OP)。

(コメント)

ベクトル空間の拡張研究は実に多様なものがある。また、凸解析と深い結びつきがあることに率直に驚いている。Semi-vector space は結局の所、片割れのベクトル空間である。確かに、測度論・近似理論は非負量を取り扱うので、相性が良いのはとても納得できる。私たちがまだ気づいていない応用がたくさん眠っているのかも知れない。

命題 2.3 ([18]). *semi-vector space* における自明でない錐の元 (つまり、任意の $\alpha > 0$ に対して $z = \alpha \cdot z$ となるような元 $z \in Z$) はベクトル空間に埋め込み不可能である。

(コメント)

順序位相空間に対する埋め込み定理については最新の研究成果 [17] がある。[17] には、集合関係とスカラーの変換定理 (定理自体は [1]、類似研究との比較は [3] の 4.3 節や [4] を参照のこと) で使用する概念に似たようなものがあり、関連性がありそうである。詳細は今後の研究課題である。

定義 2.4 (前順序 semi-vector space[5]). $(Z, +, \cdot)$ を semi-vector space、 $\leq$ を Z における前順序とする。 $(Z, +, \cdot, \leq)$ が前順序 semi-vector space であるとは、 $\leq$ が下記の条件 (O1)、(O2) を満たすときである。

(O1) 任意の $x, y, z \in E$ に対して、 $x \leq y \implies x + z \leq y + z$ である。

(O2) 任意の $x, y \in E$ と $\alpha \geq 0$ に対して、 $x \leq y \implies \alpha \cdot x \leq \alpha \cdot y$ である。

3 集合関係の代数演算

本稿では、 $C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

- (a) $\text{cl}C = C$ 、
- (b) $C + C \subseteq C$ 、
- (c) $\lambda C \subseteq C \ \forall \lambda \in [0, \infty)$ 。

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\text{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{0_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、 $(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \quad y_1 \leq_C y_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} y_2 - y_1 \in C$$

もし、 C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の (実) 順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる [25]。

一方、集合関係では上記は成り立たない。そこで本稿では、ベクトル最適化問題と集合最適化問題の違いについて、代数構造と順序構造の観点から調査する。

定義 3.1 (集合関係: 黒岩-田中-Ha[15]). Y を線形位相空間、 $\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。 $A, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\text{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \quad (\text{type 3})$$

$$[\text{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C \quad (\text{type 5})$$

$$[\text{lower \& upper}] \quad A \leq_C^{l\&u} B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \quad \text{and} \quad A \subset B - C$$

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、 $x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C \ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、 $A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ ($A \leq_C^l B$) と $A \subset B - C$ ($A \leq_C^u B$) は一般に異なる。

例 3 ([11]). 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、 $\leq_C^l$ 、 $\leq_C^u$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \quad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \iff a_1 \leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \leq b_2$$

命題 3.2 ([2]). $A, B, D \in \mathcal{V}$ 、 $\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

$$(i) \ A \leq_C^{l[u]} B \implies A + D \leq_C^{l[u]} B + D$$

$$(ii) \ A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$$

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

$$(iv) \ A \leq_C^u b \implies A \leq_C^l b$$

$$(v) \ a \leq_C^l B \implies a \leq_C^u B$$

定義 3.3 (C -proper : Hernandez-Rodriguez-Marin[10]). $A \in \mathcal{V}$ が C -proper [$(-C)$ -proper] であるとは、 $A + C \neq Y[A - C \neq Y]$ が成り立つときである。

また、 C -proper である Y の部分集合族を $\mathcal{V}_C$ 、 $(-C)$ -proper である Y の部分集合族を $\mathcal{V}_{-C}$ 、 C -proper かつ $(-C)$ -proper である Y の部分集合族を $\mathcal{V}_{\pm C}$ とする。

定義 3.4 (Luc[20]). $A \in \mathcal{V}$ とする。

(i) A が C -closed [$(-C)$ -closed] であるとは、 $A + C [A - C]$ が閉集合であることと定義する。

(ii) A が C -有界 [$(-C)$ -有界] であるとは、それぞれの Y の近傍 U に対して、次を満たすような正の数 $t > 0$ が存在するときである。

$$A \subset tU + C \quad [A \subset tU - C]$$

(iii) A が C -compact [$(-C)$ -compact] であるとは、以下の形をした A の任意の被覆

$$\{U_\alpha + C \mid U_\alpha \text{ are open}\} \quad \{\{U_\alpha - C \mid U_\alpha \text{ are open}\}$$

が有限個の被覆で A を覆うことが出来るときである。

定義 3.5. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。 $\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \simeq_l V_2 \iff V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \simeq_u V_2 \iff V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$$V_1 \simeq_{l\&u} V_2 \iff V_1 \leq_C^{l\&u} V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^{l\&u} V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$ 、 $[\cdot]^u$ 、 $[\cdot]^{l\&u}$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \iff A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \iff A - C = B - C$$

$$A \in [B]^{l\&u} \iff A + C = B + C \quad \text{and} \quad A - C = B - C$$

命題 3.6 (Cancellation law[23, 24, 26]). $A, B \in \mathcal{V}$ と閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、次が言える。

(i) もし $B \in \mathcal{V}$ が有界ならば、 $B \leq_C^l B + A \implies 0_Y \leq_C^l A$ である。

(ii) もし $B \in \mathcal{V}$ が有界ならば、 $B + A \leq_C^u B \implies A \leq_C^u 0_Y$ である。

(iii) もし $B \in \mathcal{V}$ が compact ならば、 $B \leq_{\text{int}C}^l B + A \implies 0_Y \leq_{\text{int}C}^l A$ である。

(iv) もし $B \in \mathcal{V}$ が compact ならば、 $B + A \leq_{\text{int}C}^u B \implies A \leq_{\text{int}C}^u 0_Y$ である。

(コメント)

上記の命題は、[24] の命題 2.2(i), (ii) を集合関係を用いた表記に言い換えたものである。命題 3.6 は、集合関係における Cancellation の初期研究であるが、最近 [13] の発展研究を発見した。[13] は集合最適化とは全く別の研究分野だが、前述の Luc[20] や筆者の集合関係とスカラーの変換定理 [1] と非常によく似た概念が提唱・議論されている。その関連性については今後の研究課題である。

補題 3.7 ([5]). 任意の $A, B \in \mathcal{V}$ 、 $\alpha \geq 0$ に対して、商空間 $(\mathcal{V}/\simeq_l)$ 、 $(\mathcal{V}/\simeq_u)$ とその演算を以下で定義する。

$$(l+) [A]^l + [B]^l := [A + B]^l$$

$$(l\odot) \alpha \odot [A]^l := [\alpha \odot A]^l$$

$$(u+) [A]^u + [B]^u := [A + B]^u$$

$$(u\odot) \alpha \odot [A]^u := [\alpha \odot A]^u$$

そのとき、上記の演算は *well-defined* である。

Proof. 同値類 $[\cdot]^l$ の定義と C が凸錐であることより、以下が成り立つ。

$$(a) A \simeq_l \hat{A} \text{ and } B \simeq_l \hat{B} \implies A + B \simeq_l \hat{A} + \hat{B}$$

$$(b) A \simeq_l \hat{A} \text{ and } \alpha \geq 0 \implies \alpha A \simeq_l \alpha \hat{A}$$

これは、上記の演算が *well-defined* であることを示している。 u 型の演算についても同様である。□

定理 3.8 ([5]). 商空間 $(\mathcal{V}/\simeq_l)$ 、 $(\mathcal{V}/\simeq_u)$ の零元をそれぞれ以下で定義する。

$$[0_Y]^l := \{A \in \mathcal{V} \mid A + C = C\}, \quad [0_Y]^u := \{A \in \mathcal{V} \mid A - C = -C\}$$

そのとき、 $(\text{conv}(\mathcal{V}_C)/\simeq_l)$ と $(\text{conv}(\mathcal{V}_{-C})/\simeq_u)$ は、演算 $(l+)$ 、 $(l\odot)$ と $(u+)$ 、 $(u\odot)$ に関して *semi-vector space* である。

Proof. l 型のみで示す。 u 型の場合も同様である。

$\mathcal{V}$ が *semi-vector space* の公理 (SV1)–(SV7) を満たすことは容易に示すことが出来る。(SV8) を示す。商空間 $(\mathcal{V}/\simeq_l)$ の演算の定義から、以下を示せば十分である。

(l -SV8) 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ に対して、 $\lambda_1 \odot A + \lambda_2 \odot A \in [(\lambda_1 + \lambda_2) \odot A]^l$ である。

C は凸錐であることから、以下が言える。

$$\begin{aligned} \lambda_1 \odot A + \lambda_2 \odot A + C &= \lambda_1 \odot A + \lambda_2 \odot A + \lambda_1 \odot C + \lambda_2 \odot C \\ &= \lambda_1 \odot (A + C) + \lambda_2 \odot (A + C) \end{aligned}$$

$A + C$ が凸集合であることと C が凸錐であることから、以下が言える。

$$\begin{aligned} \lambda_1 \odot (A + C) + \lambda_2 \odot (A + C) &= (\lambda_1 + \lambda_2) \odot (A + C) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \odot A + (\lambda_1 + \lambda_2) \odot C = (\lambda_1 + \lambda_2) \odot A + C \end{aligned}$$

よって、(l -SV8) が成り立つことが示せた。□

4 重み付き集合関係での代数演算

Gerstewitz[8] が提案した、ベクトルの非線形スカラー化関数は応用上有用であるので、これを自然に拡張した集合のスカラー化関数を考える。 $\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、 $h_{\inf}^l, h_{\inf}^u, h_{\sup}^l, h_{\sup}^u : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow [-\infty, \infty]$ を次のように定義する。関数 $h_{\inf}^l, h_{\inf}^u, h_{\sup}^l, h_{\sup}^u$ は、経済学における効用関数の役割を果たしている。

$$\begin{aligned} h_{\inf}^l(V_1, V_2) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_1 \leq_C^l tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid tk^0 + V_2 \subset V_1 + C\} \\ h_{\inf}^u(V_1, V_2) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_1 \leq_C^u tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid V_1 \subset tk^0 + V_2 - C\} \\ h_{\sup}^l(V_1, V_2) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid tk^0 + V_2 \leq_C^l V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid V_1 \subset tk^0 + V_2 + C\} \\ h_{\sup}^u(V_1, V_2) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid tk^0 + V_2 \leq_C^u V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid tk^0 + V_2 \subset V_1 - C\} \end{aligned}$$

集合のスカラー関数についての詳細は、[3, 4] を参照のこと。

集合最適化問題には、未解決の問題がたくさんある。その一つは、 l 型・ u 型の集合関係に依らない解の概念を定式化することである。重み付き集合関係 [6] は、この新しい順序関係にあるパラメータを制御することによって、実務家が l 型・ u 型両方の間をスムーズに移行する（最悪または最良の場合）ことが可能になる。

定義 4.1 (重み付き集合関係：Chen-Köbis-Köbis-Yao [6]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、 $\lambda \in [0, 1]$ 、 $k^0 \in \text{int}C$ とする。 $A, B \in \mathcal{V}$ に対して、次の集合関係を定義する。

$$\begin{aligned} A \preceq_{k^0}^\lambda B &\iff \lambda h_{\inf}^l(A, B) + (1 - \lambda) h_{\inf}^u(A, B) \leq 0 \\ A \prec_{k^0}^\lambda B &\iff \lambda h_{\inf}^l(A, B) + (1 - \lambda) h_{\inf}^u(A, B) < 0 \end{aligned}$$

注意 2 ([6]). $\lambda = 0$ のときは、[1] の集合関係とスカラーの変換定理から、 $A \preceq_{k^0}^\lambda B \iff A \leq_C^u B$ となる。 $\lambda = 1$ のときは、同様に [1] の変換定理から $A \preceq_{k^0}^\lambda B \iff A \leq_C^l B$ となる。もし、 $A \leq_C^l B$ と $A \leq_C^u B$ が成り立つならば、 $A \preceq_{k^0}^\lambda B$ は任意の $\lambda \in [0, 1]$ で成り立つ。逆は成り立たないことに注意する。その事実が、重み付き集合関係 $\preceq_{k^0}^\lambda$ を導入する目的である。パラメータ λ は集合関係 $\leq_C^l, \leq_C^u$ の重要度を示す「重み係数」を提供している。

本稿では、[6] が提案した重み付き集合関係について、その代数構造・順序構造を考察する。

定理 4.2 ([2]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、 $\lambda \in [0, 1]$ 、 $k^0 \in \text{int}C$ とする。すると、 $A, B \in \mathcal{V}$ 、 $\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

- (i) $A \preceq_{k^0}^\lambda B \implies A + D \preceq_{k^0}^\lambda B + D$
- (ii) $A \preceq_{k^0}^\lambda B \implies \alpha A \preceq_{k^0}^\lambda \alpha B$
- (iii) $\preceq_{k^0}^\lambda$ は、反射律と推移律が成り立つ。
- (iv) $\prec_{k^0}^\lambda$ は、推移律が成り立つ。
- (v) もし、 $A \in \mathcal{V}_C$ が C -closed で、 $B \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$ -closed ならば、 $A \leq_C^{l \& u} B \implies A \preceq_{k^0}^\lambda B$ である。
- (vi) もし、 $A \in \mathcal{V}_C$ が $(-C)$ -compact で、 $B \in \mathcal{V}_{-C}$ が C -compact ならば、 $A \leq_{\text{int}C}^{l \& u} B \implies A \prec_{k^0}^\lambda B$ である。

定理 4.2 から、 $(\mathcal{V}, +, \cdot, \preceq_{k^0}^\lambda)$ は、前順序 semi-vector space であることが分かる。前節と同様に、以下の同値類が定義できる。

$$A \simeq_{\lambda, k^0} B \iff A \preceq_{k^0}^\lambda B \quad \text{and} \quad B \preceq_{k^0}^\lambda A$$

同値類の集合を $[\cdot]_{k^0}^\lambda$ と書く。

補題 4.3 ([5]). 任意の $A, B \in \mathcal{V}$ 、 $\alpha \geq 0$ に対して、商空間 $(\mathcal{V}/\simeq_{\lambda, k^0})$ とその演算を以下で定義する。

$$(w-+) \quad [A]_{k^0}^\lambda + [B]_{k^0}^\lambda := [A + B]_{k^0}^\lambda$$

$$(w-\odot) \quad \alpha \odot [A]_{k^0}^\lambda := [\alpha \odot A]_{k^0}^\lambda$$

そのとき、上記の演算は *well-defined* である。

定理 4.4 ([5]). 商空間 $(\mathcal{V}/\simeq_{\lambda, k^0})$ の零元を以下で定義する。

$$[0_Y]_{k^0}^\lambda := \left\{ D \in \mathcal{V} \left| \begin{array}{l} \lambda h_{\inf}^l(0_Y, D) + (1 - \lambda) h_{\inf}^u(0_Y, D) \leq 0 \\ \lambda h_{\inf}^l(D, 0_Y) + (1 - \lambda) h_{\inf}^u(D, 0_Y) \leq 0 \end{array} \right. \right\}$$

そのとき、 $(\text{conv}(\mathcal{V}_{\pm C})/\simeq_{\lambda, k^0})$ は、演算 $(w-+)$ と $(w-\odot)$ に関して *semi-vector space* である。

5 まとめと今後の課題

本稿では、黒岩-田中-Ha[15] が提唱した集合関係について、その代数構造・順序構造を調べた。そこでは、凸集合族が代数演算に深く関わることが分かった。また、重み付き集合関係 [6] の代数構造・順序構造についても、同様に凸集合族が代数演算に深く関わることが分かった。特に、定理 4.4 の証明において、集合のスカラー関数における重要な性質はほぼ全て利用している。よって、上述の定理は集合のスカラー化手法研究における集大成的な結果とも言える。さらに発展すると、「集合関係における片割れの線形代数学」のような可能性もあるのかも知れない。

本稿で得られた結果を概説すると、「応用上重要な集合関係は、全て片割れのベクトル空間」であることが分かった。これは産総研の竹下先生から頂いたコメントであるが、同様にして連続性の概念（弱収束など）も片割れのものが考えられるのかも知れない。筆者には、[13, 17] がそれに該当するように見えるが、詳細は今後の研究課題である。

参考文献

- [1] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.
- [2] Y. Araya, *On the ordinal structure of the weighted set relation*, Nihonkai Math. J. 32 (2021), 91–105.
- [3] 荒谷 洋輔, 集合最適化問題における非線形スカラー化手法：20 年余の進展, 京都大学数理解析研究所講究録 2242 26–38 2023 年 1 月.
- [4] Y. Araya, *Conjugate Duality in Set Optimization via Nonlinear Scalarization*, J. Optim. Theory Appl. 199 (2023), no.2, 466–498.

- [5] Y. Araya, *On the algebraic and ordinal structures of set relations in semi-vector space*, to appear in Applied Analysis and Optimization.
- [6] J. Chen, E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017) 637–649.
- [7] W. Gähler, S. Gähler, *Contributions to fuzzy analysis. Fuzzy analysis and related topics (Prague, 1997)*, Fuzzy Sets and Systems, 105 (1999) 201–224.
- [8] C. Gerstewitz *Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung. (German) [Nonconvex duality in vector optimization]*, Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg, 25 (1983) 357–364.
- [9] G. Godini, *A framework for best simultaneous approximation: normed almost linear spaces*, J. Approx. Theory, 43 (1985) 338–358.
- [10] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1–18.
- [11] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148 (2011) 209–236.
- [12] J. Janyška, M. Modugno, R. Vitolo, *An algebraic approach to physical scales*, Acta Appl. Math. 110 (2010) 1249–1276.
- [13] K. Keimel, W. Roth, *Ordered cones and approximation*, Lecture Notes in Math., 1517, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [14] M. Kon, *Operation and ordering of fuzzy sets, and fuzzy set-valued convex mappings*, J. Fuzzy Set Valued Anal. (2014) Art. ID 00202, 1–17.
- [15] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.
- [16] D. Kuroiwa, *Generalized minimality in set optimization*, Set optimization and applications—the state of the art, Springer Proc. Math. Stat., 151, Springer, Heidelberg, 2015, 293–311.
- [17] J. Li, Y. Wang, C. F. Wen, J. C. Yao, Jen-Chih; C. Zhang, *Embedding of partially ordered topological spaces in Fell topological hyperspaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 24 (2023), no. 10, 2119–2142.
- [18] A. Löhne, *On convex functions with values in conlinear spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006) 115–122.
- [19] A. Löhne, *Vector optimization with infimum and supremum*, Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2011.
- [20] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [21] D. Kuroiwa, T. Nuriya, *A generalized embedding vector space in set optimization*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, 297–303.

- [22] E. Pap, *Integration of functions with values in complete semivector space. Measure theory*, Oberwolfach 1979 (Proc. Conf., Oberwolfach, 1979), 340–347, Lecture Notes in Math., 794, Springer, Berlin, 1980.
- [23] P. Prakash, M. R. Sertel, *Topological semivector spaces: convexity and fixed point theory*, Semigroup Forum, 9 (1974/75) 117–138.
- [24] P. Prakash, M. R. Sertel, *Hyperspaces of topological vector spaces: their embedding in topological vector spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976) 163–168.
- [25] A. L. Peressini *Ordered topological vector spaces*, Harper & Row, Publishers, New York-London 1967.
- [26] H. Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 165–169.
- [27] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.