

等方的相関のある複数の乱れの場の 同時スペクトル表現

京大 工 小 倉 久 直

ま え が き

こゝでは 2 ケの乱れの場の同時表現を取扱うが 3 ケ以上の場合も同様である。以下では乱れの場 (random field) を単に乱場と書くことにする。物理工学的に興味があるのは、2 種のベクトル、2 種のスカラ、およびベクトルとスカラの場合の 3 つである。これらを統一して扱うためにこゝでは一般的に 2 種の ℓ -ベクトル場を考える。 ℓ -ベクトルとは、3 次元回転群の重み ℓ の既約表現空間 D_ℓ に属する $(2\ell+1)$ 次元ベクトルを意味し、したがって空間回転にさいし既約表現行列による変換をうける。 $\ell=0$ はスカラ、 $\ell=1$ はベクトルに対応する。また共変量を $\overline{\ell}$ -ベクトル等と記す。 ℓ -ベクトル函数に関する必要な公式は附録に与えた。

§ 1 一様な ℓ 次元乱場

一様 (homogeneous) な ℓ ケの成分をもつ乱場は、スペクトル密度が絶対連続な場合には、 ℓ ケの ℓ 次元直交彷徨測度による移動平均の形に書くことができる：

$$I_i(x) = \int f_i(x-x') dB(x', \omega) = \sum_{\alpha=1}^{\ell} \int f_i^{\alpha}(x-x') dB^{\alpha}(x', \omega) \quad (1.1)$$

$i=1, 2, \dots, \ell$ 。直交彷徨測度 $B(A)$ は、 $E \langle B^{\alpha}(A) \rangle = 0$ 、 $E \langle \overline{B^{\alpha}(A_1)} B^{\beta}(A_2) \rangle = \delta_{\alpha\beta} m(A_1 \cap A_2)$ 等の性質をもつ。 $(E \langle \rangle)$ は期待値、 $m(A)$ は集合 A の測度、 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ 、 $\alpha = \beta$ 、 $= 0$ 、 $\alpha \neq \beta$ 、 ω は確率パラメタ)

ℓ 次元移動平均は次のようにスペクトル表現ができる：

$$I_i(x) = \int e^{2\pi i(x \cdot y)} dM_i(y, \omega), \quad i=1, 2, \dots, \ell \quad (1.2)$$

$$E \langle \overline{M_i(S)} M_j(S') \rangle = \int_S \int_{S'} F_{ij}(y) dy \quad (1.3)$$

$$F_{ij}(y) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\ell} \overline{F_i^{\alpha}(y)} F_j^{\alpha}(y) \quad (1.4)$$

ここに $M_i(S)$ 一つの ℓ 次元直交彷徨測度， $F_{ij}(y)$ はスペクトル密度行列で非負定値エルミット， $F_i^{\alpha}(y)$ は $f_i^{\alpha}(x)$ の Fourier 変換である。相関関数行列 $R_{ij}(x)$ のスペクトル表現は

$$R_{ij}(x) = \int F_{ij}(y) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dy \quad (1.5)$$

で与えられ，又逆変換が成立する。

$$F_{ij}(y) = \int R_{ij}(x) e^{2\pi i(x \cdot y)} dx \quad (1.6)$$

§ 2 等方的相関のある 2 つの等方乱場

2 つの ℓ_1 - ベクトル乱場 $\mathbb{I}_{\ell_1}(x)$ と ℓ_2 - ベクトル乱場 $\mathbb{I}_{\ell_2}(x)$ はそれぞれ $(2\ell_1 + 1)$ および $(2\ell_2 + 1)$ の成分をもつが，これらはまた直和空間 $D_{\ell_1} + D_{\ell_2}$ の中の $(2\ell_1 + 1) + (2\ell_2 + 1)$ 次元ベクトルである。この相関関数は，直積空間

$$[\overline{D_{\ell_1} + D_{\ell_2}}] \times [D_{\ell_1} + D_{\ell_2}] = \overline{D_{\ell_1}} \times D_{\ell_2} + \overline{D_{\ell_2}} \times D_{\ell_1} + \overline{D_{\ell_1}} \times D_{\ell_1} + \overline{D_{\ell_2}} \times D_{\ell_2}, \quad (2.1)$$

の中のテンソルである。 $\mathbb{I}_{\ell}^{(x)}$ の成分は $\vec{x}$ のまわりの微小回転に関する D_{ℓ} の $(2\ell + 1)$ ケのカノニカル基底に関してとることとし，これをカノニカル成分とよぶことにする。(2.1) の右辺の各部分空間 $\overline{D_{\lambda}} \times D_{\mu}$ ($\lambda, \mu = \ell_1, \ell_2$) における相関テンソルの成分を

$$R_{mn}^{\lambda\mu}(x) = E \langle \mathbb{I}_{(\lambda)m}(x + x') \mathbb{I}_{(\mu)n}(x') \rangle \quad (2.2)$$

($m = -\lambda, \dots, \lambda, n = -\mu, \dots, \mu$) で定義する。但し m は共変成分をあらわす。相互相関

テンソルが等方テンソル場（空間回転に関し不変）であるとき，2つの乱場の間に等方的相関があるとよぶ。以下では等方的相関のある2つの等方乱場を取扱う。したがってその相関テンソルは直積空間（2.1）における等方テンソル場である。等方テンソル場の一般形およびそのFourier変換を考察し，（1.5）（1.6）に適用すれば次の結果がえられる。

定理1.（相関テンソルのスペクトル分解）等方相関のある等方な ℓ_1 および ℓ_2 - ベクトル乱場の相関テンソルならびにスペクトル密度テンソルは，（2.1）の各部分直積空間における等方な $\lambda \times \mu$ -テンソル場であって，カノニカル成分であらわせば対角行列の形に書かれる：

$$\lambda, \mu = \ell_1, \ell_2,$$

$$R_{mn}^{\lambda\mu}(x) = \delta_{mn} R_n^{\lambda\mu}(r), \quad r = |x|, \quad m = -\lambda, \dots, \lambda \quad (2.3)$$

$$F_{mn}^{\lambda\mu}(y) = \delta_{mn} F_n^{\lambda\mu}(t), \quad t = |y|, \quad n = -\mu, \dots, \mu. \quad (2.4)$$

但し $F_n^{\lambda\mu}$ は添字 λ, μ に関して非負エルミットであり， $F_n^{\lambda\lambda}(t) \geq 0$ ， $F_n^{\lambda\mu}(t) = \overline{F_n^{\mu\lambda}(t)}$ ，更に $R_m^{\lambda\mu}(r) = (-1)^{\lambda-\mu} R_{-m}^{\mu\lambda}(r)$ の関係がある。相関テンソルは次のようにスペクトル表現ができ，また逆変換が成立する：

$$R_m^{\lambda\mu}(r) = 4\pi \sum_{n=-L}^L \int_0^\infty j_{mn}^{\mu\lambda}(2\pi tr) F_n^{\lambda\mu}(t) t^2 dt, \quad (2.5)$$

$$m = -L, \dots, L, \quad L = \min[\lambda, \mu]$$

$$F_n^{\lambda\mu}(t) = 4\pi \sum_{m=-L}^L \int_0^\infty j_{mn}^{\mu\lambda}(2\pi tr) R_m^{\lambda\mu}(r) r^2 dr. \quad (2.6)$$

$$n = -L, \dots, L.$$

乱場自身は次のように表現される。導出は§4でのべる。

定理2.（乱場のスペクトル分解）上記の2つの乱場の同時スペクトル表現は

$$\mathbb{I}_{(\lambda)}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{n=-\lambda}^{\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^\infty J_{(\lambda)n}^{\ell S}(2\pi tr, \theta, \varphi) dM_{(\lambda)n}^{\ell S}(t, \omega), \quad (2.7)$$

$$\lambda = \ell_1, \ell_2$$

で与えられる。こゝに $M_{(\lambda)n}^{\ell S}(\Delta)$ は半直線 T , $0 \leq t < \infty$ 上の彷徨スペクトル測度であり, 次の関係をもつ。(Δ は T 上の区間)

$$E \langle M_{(\lambda)n}^{\ell S}(\Delta) \rangle = 0 \quad (2.8)$$

$$E \langle \overline{M_{(\lambda)n}^{\ell S}(\Delta)} M_{(\mu)n'}^{\ell' S'}(\Delta') \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\Delta} F_n^{\lambda\mu}(t) t^2 dt$$

相関テンソルは (2.2) に (2.7) を用いて計算できる。(2.8) ならびにテンソル型加法定理 (A.8) を用いれば (2.5) が再現される。

§3 2.3 の等方的相関のある乱れの場合

はじめにのべた物理工学的に興味のある3つの場合は, 上の結果で $\ell_1, \ell_2 = 0, 1$ を入れればえられる。その時 $J_{(1)n}^{\ell S} \equiv J_n^{\ell S}$ はベクトル調和函数, $J_{(0)0}^{\ell S} \equiv J^{\ell S}$ はスカラー調和函数である。相関のある2つのベクトル乱場 ($\ell_1 = \ell_2 = 1$) の例は黒体輻射の場合における電場と磁場の場合である。この時, $\mathbb{I}_2 = \nabla \times \mathbb{I}_1$ の形であるが, $\det F_{ij} = 0$ であって6次元乱場 $\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2$ は退化している。2つのスカラー乱場 ($\ell_1 = \ell_2 = 0$) の例には, 大気中の温度場と密度場の場合等がある。こゝではベクトル=スカラー ($\ell_1 = 1, \ell_2 = 0$) の場合のみをいくらか具体的に書下しておく。

$$I(r, \theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{S=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} J_n^{\ell S}(2\pi t r, \theta, \varphi) dM_n^{\ell S}(t, \omega) \quad (3.1)$$

$$I(r, \theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{S=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} J^{\ell S}(2\pi t r, \theta, \varphi) dM^{\ell S}(t, \omega) \quad (3.2)$$

$$E \langle \overline{M_n^{\ell S}(\Delta)} M_{n'}^{\ell' S'}(\Delta') \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\Delta \cap \Delta'} |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (3.3)$$

$$E \langle \overline{M_n^{\ell S}(\Delta)} M_{n'}^{\ell' S'}(\Delta') \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\Delta \cap \Delta'} |F(t)|^2 t^2 dt \quad (3.4)$$

$$E \langle \overline{M_n^{\ell S}(\Delta)} M^{\ell' S'}(\Delta') \rangle = \delta_{n0} \delta_{\ell \ell'} \delta_{SS'} 4\pi \int_{\Delta} F^{12}(t) t^2 dt \quad (3.5)$$

この時，相関テンソルは（3.9）の形をしており，各成分は

$$R_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^1 \int_0^\infty j_{mn}^1(2\pi t r) |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (3.6)$$

$$R(r) = 4\pi \int_0^\infty j_0(2\pi t r) |F(t)|^2 t^2 dt \quad (3.7)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^\infty j_1(2\pi t r) F^{12}(t) t^2 dt \quad (3.8)$$

$$[R_{mn}^{\lambda\mu}] = \left(\begin{array}{c|c} R_{-1} & -M \\ \hline R_0 & R \\ \hline R_1 & \bar{M} \end{array} \right) \quad (3.9)$$

のように表現される。相関のあるベクトル＝スカラの例としては，大気中の速度場と温度場などがある。退化した4次元乱場の例には， $\mathbb{I}_1 = \nabla \mathbb{I}_2$ または $\mathbb{I}_2 = \nabla \cdot \mathbb{I}_1$ がある。それらのスペクトル密度行列はそれぞれ次の形を有している。

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 2\pi t |F|^2 \\ \hline 2\pi t |F|^2 & |F|^2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} |F_{-1}|^2 & -2\pi t |F_0|^2 \\ \hline -2\pi t |F_0|^2 & |2\pi t F_0|^2 \end{array} \right) \quad (3.10)$$

§ 4 スペクトル表現の導出

乱場のスペクトル表現（2.7）は $p \equiv (2\ell_1 + 1) + (2\ell_2 + 1)$ 次元移動平均より導くことができる。紙面の都合上要点のみをのべる。添字 α に関する p 次元ベクトル空間を V_Ω ， m に関するそれを V_R と記す。その時（1.4）（2.4）から

$$F_{mn}^{\lambda\mu}(y) = \sum_{\alpha=1}^p F_m^{\lambda\alpha}(y) F_n^{\mu\alpha}(y) = \delta_{mn} F_n^{\lambda\mu}(t) \quad (4.1)$$

を満足する p ケの p 次元ベクトル関数 $\{F_m^{\lambda\alpha}(y), \alpha=1 \cdots p\}$ は $V_R \times V_\Omega = (D_{\ell_1} + D_{\ell_2}) \times (D_{\ell_1} + D_{\ell_2})$ における等方テンソル場

$$F_m^{\lambda\alpha}(y) \equiv G_m^{\lambda\mu}(y) = \delta_{m\alpha} G_m^{\lambda\mu}(t), \mu = \ell_1, \ell_2, \alpha = -\mu, \dots, \mu \quad (4.2)$$

とみなすことにより定まる。この時の不定性は ω の保測変換に吸収されるので移動平均の形は変えない。この時、 $F_n^{\lambda\mu}(t) = \sum_{\nu=1,2} \overline{G_n^{\lambda\nu}(t)} G_n^{\mu\nu}(t)$, $\lambda, \mu = 1, 2$ となる。(4.2) の Fourier 変換 $f_m^{\lambda\mu}(x)$ も亦 $\lambda \times \mu$ -テンソル場であって、 $f_m^{\lambda\mu}(x) = \delta_{m\alpha} f_m^{\lambda\mu}(r)$, $\lambda, \mu = 1, 2$ 又は ℓ_1, ℓ_2 , とおけば

$$f_m^{\lambda\mu}(r) = 4\pi i^{\lambda-\mu} \sum_{n=-L}^L \int_0^\infty j_{mn}^{\mu\lambda}(2\pi tr) G_n^{\lambda\mu}(t) t^2 dt \quad (4.3)$$

以下、因子 $i^{\lambda-\mu}$ は $G^{\lambda\mu}$ と $F^{\lambda\mu}$ の中に吸収する。移動平均を求める $\rho = \sqrt{r^2 + (r')^2} = 2rr' \cos \Theta$ において加法定理 (A. 8) を適用し、 p 次元彷徨測度 $B(\Delta)$ による積分を項別に行えば (2.7) をうる。但し、彷徨スペクトル測度 $M(\Delta)$ は、 $B(\Delta)$ による積分を $I(\quad)$ と記せば、

$$M_{(\lambda)n}^{\ell S}(\Delta) = I(E_{(1)n}^{\ell S}(\Delta) f^{1\lambda} + E_{(2)n}^{\ell S}(\Delta) f^{2\lambda}), \lambda = 1, 2 \quad (4.4)$$

$$E_{(\mu)n}^{\ell S}(\Delta) f^{\lambda\mu} \equiv (4\pi)^{\frac{3}{2}} \int_{\Delta} J_{(\mu)n}^{\ell S}(2\pi tr, \theta, \varphi) G_n^{\lambda\mu}(t) t^2 dt \quad (4.5)$$

で与えられ、(A. 7) の関係を用いれば (4.4) (4.5) から (2.8) の性質をもつことが容易に示される。

§ 5 ベクトル乱場

(2.3) ~ (2.8) において ℓ_2 を考慮しなければ、単独の ℓ_1 -ベクトル乱場のスペクトル表現が与えられていることになる。こゝでは $\ell_1 = 1$ のベクトルの場合の結果のあらましを考察する。

相関テンソルのスペクトル表現は、 $R_{mn}(x) = \delta_{mn} R_n(r)$ とおくとき、Oでないカノニカル成分は ($m = -1, 0, 1$)

$$R_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^1 \int_0^\infty j_{mn}^1(2\pi tr) |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (5.1)$$

またスペクトル密度テンソルは、 $F_{mn}(y) = \delta_{mn} |F_n(t)|^2$ として

$$|F_n(t)|^2 = 4\pi \sum_{m=-1}^1 \int_0^\infty j_{mn}^1(2\pi tr) R_m(r) r^2 dr, \quad n = -1, 0, 1 \quad (5.2)$$

で与えられる。もし縦、横および歪の3つの相関函数 $R_\ell = R_{rr}, R_t = R_{\theta\theta}, R_s = R_{\varphi\theta}$ を用いれば、 $R_{\pm 1} = R_t \pm i R_s, R_0 = R_\ell$ であって

$$\begin{aligned} R_\ell(r) &= 4\pi \int_0^\infty j'_\ell |F_0(t)|^2 t^2 dt + 2 \int_0^\infty \frac{j_\ell}{r} [|F_1(t)|^2 + |F_{-1}(t)|^2] t dt \\ R_t(r) &= 2 \int_0^\infty \frac{j_\ell}{r} |F_0(t)|^2 t dt + \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty [2j_0 - j_2] [|F_1(t)|^2 + |F_{-1}(t)|^2] t^2 dt \\ R_s(r) &= 2\pi \int_0^\infty j_\ell (2\pi tr) [|F_{-1}(t)|^2 - |F_1(t)|^2 - |F_1(t)|^2] t^2 dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

の形に書直される。こゝで球Bessel函数 j_ℓ の引数は $2\pi tr$ である。この表現は特に $|F_{-1}|^2 = |F_1|^2$ つまり $R_s = 0$ の場合にはYaglomの求めたものと一致する。

ベクトル乱場自身のスペクトル表現は(3.1) (3.3)で与えられる。(A.10)の関係により、 $n=0$ はirrotationalな部分、 $n=-1, 1$ はsolenoidalな部分であり、且つ(3.3)によってそれらの間の相関は存在しないことがわかる(Obkhov)。したがって、(5.1)または(5.3)における $n=0, \pm 1$ の項はそれぞれの部分の相関テンソルの表現を与えている。

(3.1)に(A.10)を項別に適用すれば直ちに $\nabla \times \mathbb{I}$ のスペクトル表現がえられるが、これと $\mathbb{I}$ との相関テンソルは再び等方テンソルであって $E \langle \nabla \times \mathbb{I}, \mathbb{I} \rangle = M_{mn}(r) = \delta_{mn} M_n(r)$ とお

けば

$$M_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^1 \int_0^\infty j_{mn}^1(2\pi tr) \frac{1}{2\pi t} |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (5.4)$$

あるいは (5.3) に対応して

$$M_\ell(r) = 4\pi \int_0^\infty \frac{j_\ell}{r} [|F_1(t)|^2 - |F_{-1}(t)|^2] t^2 dt$$

$$M_\ell(r) = \frac{4\pi^2}{3} \int_0^\infty [2j_0 - j_2] [|F_1(t)|^2 - |F_{-1}(t)|^2] t^3 dt \quad (5.5)$$

$$M_s(r) = -4\pi^2 \int_0^\infty j_\ell(2\pi tr) [|F_1(t)|^2 + |F_{-1}(t)|^2] t^3 dt$$

の表現が与えられる。直ちに明らかなように $R_s = 0$, つまり $\mathbb{I}$ の相関テンソルが反転不変の場合には, $\nabla \times \mathbb{I}$ と $\mathbb{I}$ との相関は歪相関しか存在しない。尚, この $\nabla \times \mathbb{I}$ と $\mathbb{I}$ の例は § 3 でふれたベクトル=ベクトルの場合の特別な例になっている。

等方ベクトル乱場は, 以下の様に球面上に一様分布するランダム位相 ψ を導入することにより簡単な形に表現できる。カノニカル成分 ($m = -1, 0, 1$) であらわせば

$$I_m(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=-1}^1 \sum_{\ell=0}^\infty \sqrt{4\pi(2\ell+1)} Y_\ell^m(\Theta - \psi) \int_0^\infty j_{mn}^\ell(2\pi tr) dM_n(t, \omega) \quad (5.6)$$

$$E \langle M_n(\Delta) M_{n'}(\Delta') \rangle = \delta_{nn'} 4\pi \int_{\Delta \cap \Delta'} |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (5.7)$$

こゝに $\Theta - \psi$ は $\Theta = (\theta, \varphi)$ と $\Psi = (\alpha, \beta)$ との角度差を表わし, $M_n(\Delta)$ と Ψ は統計的に独立である。全く同様な表現が等方スカラ乱場に対しても成立するが, こゝでは省略する。

附 録 ℓ -ベクトル函数の諸公式

一般球 Bessel 函数 ($(\ell - m \ell' m | \ell \ell' L O)$ 等は Clebsch-Gordan 係数)

$$j_{mn}^{\ell \ell'}(r) = \sum_{L=|\ell-\ell'|}^{\ell+\ell'} i^{L-\ell+\ell'} (-1)^{m+n} (\ell - m \ell' m | \ell \ell' L O) (\ell - n \ell' n | \ell \ell' L O) j_L(r) \quad (A. 1)$$

$$j_{mn}^{\ell\ell'} = j_{nm}^{\ell\ell'} = j_{-m-n}^{\ell\ell'} = (-1)^{\ell\ell'} j_{mn}^{\ell\ell'} = \overline{j_{m-n}^{\ell\ell'}} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

一般 Hankel 変換，逆変換

$$f_m(r) = 4\pi \sum_{n=-L}^L \int_0^\infty F_n(t) j_{mn}^{\ell\ell'}(2\pi t r) t^2 dt, \quad m = -L, \dots, L. \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$$F_n(t) = 4\pi \sum_{m=-L}^L \int_0^\infty f_m(r) \overline{j_{mn}^{\ell\ell'}(2\pi t r)} r^2 dr, \quad n = -L, \dots, L \quad (\text{A} \cdot 4)$$

ℓ -ベクトル球面調和函数 (カノニカル成分, $T_{sm}^\ell(\mathcal{G})$ は既約表現行列要素)

$$P_{(\ell)n}^{\ell'} S(\theta, \varphi) = \left\{ \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}} \delta_{nm} T_{sm}^{\ell'}(\mathcal{G}), m = -\ell, \dots, \ell \right\} \begin{matrix} \ell' = 0, 1, 2, \dots \\ s = -\ell' \dots \ell' \\ n = -\ell \dots \ell \end{matrix} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

ℓ -ベクトル立体調和函数

$$J_{(\ell)n}^{\ell'} S(r, \theta, \varphi) = \sum_{t=-\ell}^{\ell} j_{nt}^{\ell'\ell}(r) P_{(\ell)t}^{\ell'} S(\theta, \varphi) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \int_0^\infty \int_{S_3} (J_{(\ell)n'}^{\ell'S'}(2\pi t' r, \mathcal{G}) \cdot J_{(\ell)n''}^{\ell'S''}(2\pi t'' r, \mathcal{G})) d\omega r^2 dr \\ = \delta_{n'n''} \delta_{\ell'\ell''} \delta_{s's''} \frac{\delta(t'-t'')}{(t')^2} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

テンソル型加法定理 ($\ell_1 \times \ell_2$ -テンソル) ($e_{(\ell)t}(r)$: r まわりのカノニカルベクトル)

$$\sum_{t=-L}^L j_{nt}^{\ell_2\ell_1}(r) e_{(\ell_1)t}^{(r)} \overline{e_{(\ell_2)t}^{(r)}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{s=-\ell}^{\ell} J_{(\ell_1)n}^{\ell S}(r_1, \mathcal{G}_1) J_{(\ell_2)n}^{\ell S}(r_2, \mathcal{G}_2) \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$r = r_1 - r_2$, $r_1 = (r_1, \mathcal{G}_1)$, $r_2 = (r_2, \mathcal{G}_2)$, $n = -L \dots L$, $\mathcal{G}$: 回転

ベクトル調和函数 ($\ell=1$)

$$J_{(1)n}^{\ell S}(kr, \theta\varphi) \equiv J_n^{\ell S}(kr, \theta\varphi), \quad j_{mn}^{\ell 1}(r) \equiv j_{mn}^{\ell}(r) \quad (m, n = -1, 0, 1) \quad (\text{A} \cdot 9)$$

$$\nabla J = k J_0, \quad \nabla \cdot J_n = -\delta_{on} k J, \quad \nabla \times J_n = n k J_n \quad (\text{A. 10})$$

スカラー調和函数 ($\ell=0$)

$$J_{(0)0}^{\ell S}(kr, \theta, \varphi) \equiv J^{\ell S}(kr, \theta, \varphi) = Y_{\ell}^S(\theta, \varphi) j_{\ell}(kr) \quad (\text{A. 11})$$

$Y_{\ell}^S(\theta, \varphi)$ は球面上で規格化したスカラー球面調和函数