

Bimodule X が与えられた C^* -環 O_X の単純性について

九大数理 綿谷安男
Watatani Yasuo

□はじめに

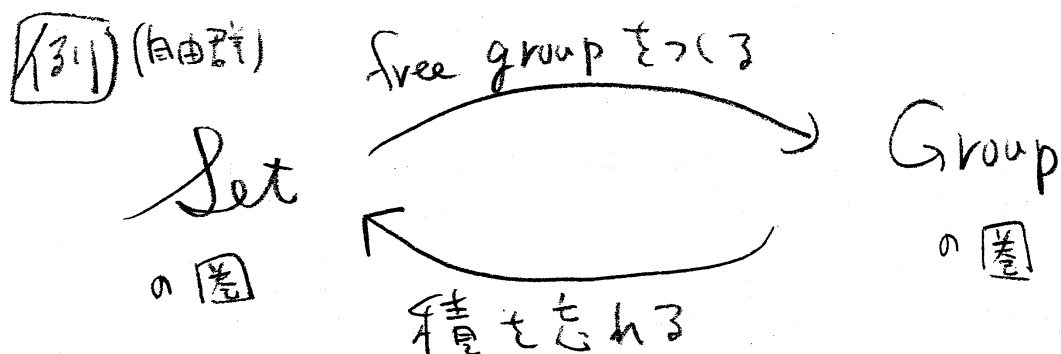
これは Kajiwara - Pinzari - Watatani
の共同研究([1])です。

Subfactorの研究の進展によって
明らかになったように, 作用素環の
bimodule をその表現論としてみなし
考察することは大変重要です。

ここでは、片山 [2] と Pimsner [4] に
 よって独立に導入された C^* 環の bimodule
 X から生成された C^* 環 $\mathcal{O}_X$ を X から
 生成された Free object とみなします。それ
 $\mathcal{O}_X$ の単純性の判定条件で Guntt-Krieger
 algebra $\mathcal{O}_A$ の時の条件 (I) に相当するもの
 を考え、特に simple C^* algebra の inclusion
 $A \subset B$ での index が 1 でない場合に
 $X = {}_A B_A$ とみた $\mathcal{O}_X$ が simple になること
 を示します。

□ free な生成

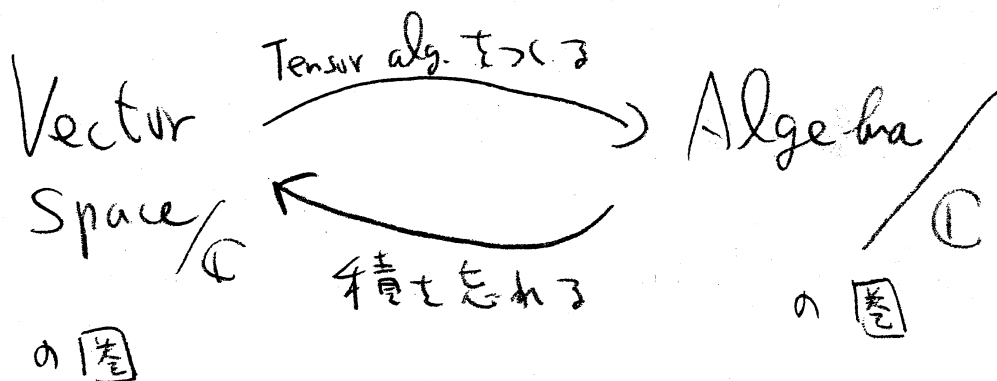
集合 $X = \{a, b\}$ 上の自由群 $F_X = F_2$ に典型的に表われているように, free に生成してできた数学的対象は基本的で重要なものになります。ここで free とはどういうことから反省してみると, (Voiculescu 流のすごい話とは違う意味なので悪しからず), 群の 積構造を忘れる といふ forgetful functor の adjoint functor といふ free な生成ということか想定できます。



$$\text{Hom}_{\text{Group}}(\text{Free}(X), G) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(X, \text{Forget}(G))$$

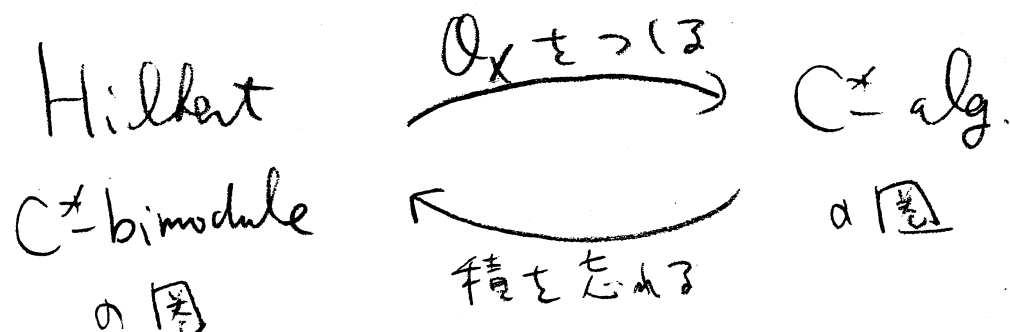
例 (Tensor algebra)

vector space V 上の Tensor algebra $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$



$$\text{Hom}_{\text{Alg}}(T(V), A) \cong \text{Hom}_{\text{Vector}}(V, \text{Forget}(A))$$

以上のことをまとめ



が互いに adjoint functor になっている

ようなものとして C^* 型の環 Q_X

をとります。ここで注目することは C^* 環

の積の構造は忘れるも bimodule や C^* 環

値内積の構造は忘れません。

$$\star \left\{ \begin{array}{l} a \cdot x \cdot b = a x b \\ (x y)_\# = x^\# y \\ {}_\# (x y) = x y^\# \end{array} \right.$$

それどころか $\mathcal{O}_X$ とはつまりそこ bimodule
 作用 C^* -値内積のよじられた X だけと手前か
 にそれを operator の積の形で上の $\ast$ の
 ようになるように C^* -環の積を「思い出す」
 普遍的な対象として定義されるのです。

② $\mathcal{O}_X$ の普遍性による定義

Unit $\mathcal{O}_n$ とは n 個の isometries $S_1, S_2, \dots, S_n$ で
 $S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^* = I$ を満たすものからつくられる普遍
 的な C^* -環でした。まずはこれをねて $\mathcal{O}_X$
 を生成元と交換関係でかき、その後で①の
 意味で free な生成元として $\mathcal{O}_X$ を定義し直す。

設定 A を (簡単のため) 1 をもつ C^* -algebra,

X を 右 Hilbert A -module として "finitely generated projective module" になるようにする。つまり

有限個の $u_1, \dots, u_n \in X$ があつて次をみたす。

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^n u_i (u_i^* x)_A$$

こゝで $\{u_1, \dots, u_n\}$ を X の basis と呼ぼう。

すると、この時 $\mathcal{L}_A(X_A)$ は "compact" 全体 $K = K_A(X_A)$

と一致することに注意しておく。さて $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}_A(X_A)$

を unital isometric $*$ -homo. を与えてこれに

より X を A - A bimodule とみなす。この時

$a \in A$ に対し $a_{ij} = (u_i | \phi(a) u_j)_A$ とおくと

$$(\#) \quad \phi(a)u_j = \sum_{i=1}^n u_i a_{ij}$$

とかけることに注意する。上の $(\#)$ から $\mathcal{O}_X$ の交換関係が自然につくれる。

Def 上の設定の意味での A - A bimodule X に対し

C^* -環 $\mathcal{O}_X$ とは A と n 個の operator $\{S_1, \dots, S_n\}$ から生成されて次の交換関係をみたす普遍的な C^* -環と定義する:

$$\begin{cases} S_i^* S_j = (u_i | u_j)_A \\ \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = I \\ a S_j = \sum_{i=1}^n S_i a_{ij} \quad (a \in A) \end{cases}$$

(注) このとき basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ が直交系であることと生成元 $S_1, \dots, S_n$ が partial isometries であることは同値。

今 $x = \sum_{i=1}^n u_i a_i \in X$ ($a_i \in A$) に対し,

$Sx = \sum_{i=1}^n S_i a_i$ とおく (これは well-defined 7)

$Sx * Sy = (x|y)_A$ と右 A 値内積が作用

素の通常の内積で実現されている。これは左右の

バランスを崩している。左側の内積はどうなっている

のか。bimodule の (3 tensor category 7) は

conjugate があろうが望ましいので、必然的に

左右両方の C^* -値内積が揃う方が望ましい。

実は $\mathcal{O}_X$ は次に示すように $K = K_{\mathcal{O}_X}(X_0)$ 値左内積を自然に作用素の内積として実現しているのである。それを 顕著な形 に示す。
おめ

$X = X_A$ に自然に $K = K_A(X_A)$ の内積を
rank one operator $\theta_{x,y} \in K$ を使って

$${}_K(x|y) = \theta_{x,y} \text{ で与えられる。すると } X = {}_K X_A$$

は Kieffel の意味での imprimitive bimodule になる。

実はこの $X = {}_K X_A$ の左右の内積も operator の

通常の積で実現するとともに A の X の bimodule

としての作用をも operator の通常の積で実現する

普遍的な C^* -環は Toeplitz algebra J_X に

なる (ある $\phi(a) \in K$ と $a \in A$ を同一視

することをお要請したのが $\mathcal{Q}_X$ です。

(例) $X = {}_C \mathbb{C}^2_C$ に対し, Toeplitz alg $J_X = C^*(T_X|X \leftarrow X|$

では $\pi_K(\phi(a)) \neq \pi_A(a)$. 特に $\pi_K(\phi(1)) \neq I$ となる。

(しかしこの時 $aTx = T\phi(a)x$ は成立してはいる
 のだから注意が必要。ここへ”

$$\pi_K(\phi(1)) \neq \pi_A(1) \Leftrightarrow T_1 T_1^* + \dots + T_n T_n^* \neq I$$

とかけば” 見られたものになる”(2)。

以上で $\pi_K(k)$ ($k \in K$) や $\pi_A(a)$ ($a \in A$)

は JX の実現さへに対する表現を表わしている。

Def (bimodule X の構造を operator の積
 で表現する普遍的な C^* -環としての $\mathcal{O}_X$)

上の状況の A - A bimodule X に対し, C^* -環

$\mathcal{O}_X$ とは contraction $S: X \ni x \mapsto S_x \in \mathcal{O}_X$

unital $*$ -homom $\pi_A: A \rightarrow \mathcal{O}_X$, unital $*$ -homom

$\pi_K: K \rightarrow \mathcal{O}_X$ べ次の関係をみたす普遍的

なものからつくられた C^* -環 $C^*\{S_x | x \in X\}$ である;

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{k,x} = \pi_k(k) S_x \\ S_{x,a} = S_x \pi_A(a) \\ S_x^* S_y = \pi_A((x(y)_A)) \\ S_x S_y^* = \pi_k(\pi_k(x(y))) \\ \pi_k(\phi(a)) = \pi_A(a) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in X \\ y \in X \\ a \in A \\ k \in K \end{array}$$

さて、ただ $\mathcal{Q}_X$ の具体的な左積式 (2), (4) を
あげておく。 $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes_A \cdots \otimes_A X}_{m \text{ 回}}$ とおく

"Fock space" $F(X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} X^{\otimes m}$ を考える

$x \in X$ に対する "creation operator" $T_x \in$

$$T_x (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$$

である。 $T_x \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)$ の $K_A(F(X)_A)$ に

は quotient の像を S_x とすれば $\mathcal{Q}_X = C^*(S_{x(x) \in X})$

② $\mathcal{Q}_X$ の単純性

Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ や Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ の単純性や結合積 $A \rtimes \mathbb{Z}$ の単純性や Doplicher-Roberts algebra $\mathcal{O}_\rho$ の単純性や松本の $\mathcal{O}_n[3]$ の単純性も同じ枠組でかこうと (7 次の FI-free という条件) を考える。余り格好はよくない。

Lemma $T \in \mathcal{Q}_X$ に対し $\sigma(T) = \sum_{i=1}^n S_i T S_i^*$

とおく。ここで $S_i = S_{u_i}$ のこと。すると

$\sigma: \mathcal{Q}_X \rightarrow \mathcal{Q}_X$ は CP-map かつ $A' \cap \mathcal{Q}_X$ 上では

isometric $*$ -endomorphism になる。 σ は

$A' \cap \mathcal{Q}_X$ 上に制限すれば basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ の選び方に依らずきまる。

$\{S_{x_i} | x_i \in X\}$ が代数的に生成される $*$ -環
 $\in {}^0 Q_X$ とする。 $\{S_{x_1} \cdots S_{x_m} S_{y_m}^* \cdots S_{y_1}^* | x_i \in X, y_i \in X\}$

が生成される C^* -alg $\mathcal{F}_m$ とおく

Def bimodule X が (I)-free

def $\forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \exists T_k \in A' \cap {}^0 Q_X$ ($\prod_{k=1}^m \|T_k\| = 1$)

satisfying

$$(1) T_k^* T_k, T_k^* \sigma^k(T_k) \in \mathcal{F}_m$$

$$(2) A \ni a \mapsto \phi(a) T_k^* T_k \in \mathcal{F}_m \text{ is completely isometric}$$

$$(3) \|T_k^* \sigma^k(T_k)\| < 1$$

(注) Cuntz-Krieger $\mathbb{F}_n$ や simple C^* -alg の inclusion $A \subset B$

からなる Q_X の場合は もっと強く $T_k = p_k$ として projection

がとれて, $a \mapsto \phi(a) p_k$ は $1:1$ の $*$ -homomorphism

$1 \leq r \leq k$ に対し $p_k \sigma^r(p_k) = 0$ といえる。

Def A の closed ideal J が X -invariant とは

$$\forall a \in J \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X \text{ に対し } (\lambda(\phi(x)y))_a \in J$$

とあることとする。Cuntz-Krieger 環の時の 0-1

行列の既約性や $C(M) \rtimes \mathbb{Z}$ の時の action の

minimality に相当するものとして X -simple とし

条件を考えよう。 A の closed ideal J が X -simple

とは A の X -invariant ideal かつ $0 \neq A$ に等しい

ことをいう。

Theorem 1 X が (I) -free かつ A が faithful

に表現されているならば O_X は生成元のとり

かによらず交換関係だけから同型を決定

一意的に定まる。

Theorem 2 X が (I)-free かつ A が X -simple

$\Rightarrow Q_X$ は simple.

Theorem 3 $1 \in A \subset B \subseteq C^*(\text{alg})$ の inclusion τ "

$E: B \rightarrow A$ τ conditional expectation of finite index.

A が X -simple (つまり A が simple) τ "

Index $E \neq 1$ と仮定する。 $X = {}_A B_A$ とする

$\Rightarrow Q_X$ は simple

Proof. Jones proj $e_A \in \tau$, $g_n = e_A \otimes \cdots \otimes e_n \otimes (1 - e_n)$ とおけ

① これは Q_n が $n \neq 1$ の時 simple τ "

$Q_1 \cong C(\mathbb{T})$ となることは事実に対応している

② 一般に

$$Q_X \cong "A \otimes Q_{[B:A]}"$$

$\uparrow$ ねたテンソル積

の似たものがある。

References

- [1] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani:
準備中
- [2] Y. Katayama, Generalized Cuntz algebras
 $\mathcal{O}_N^k$, RIMS Kokyuroku 858 (1994)
131-151
- [3] K. Matsumo, On C^* -algebras associated
with subshifts, to appear in Internat. J. Math.
- [4] M. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing
both Cuntz-Krieger Algebras and crossed
products by $\mathbb{Z}$, preprint.