

Banach–Nečas–Babuška の定理と DG time-stepping 法

齊藤 宣一 *

東京大学大学院数理科学研究科

Banach–Nečas–Babuška theorem and the DG time-stepping method

Norikazu SAITO

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

1 Banach–Nečas–Babuška の定理

■ Lax–Milgram の定理. V を実 Hilbert 空間, $\|\cdot\|$ をそのノルムとする. V の双対空間 (V 上の有界双線形形式の全体) を V' で表す. $a(\cdot, \cdot)$ を $V \times V$ 上の有界双線形形式とする. すなわち,

$$\|a\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{u, v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} < \infty.$$

定理 1. 次を満たす正定数 α の存在を仮定する (強圧性, coercivity) :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad (v \in V). \quad (1)$$

このとき, 任意の $L \in V'$ に対して, 変分方程式

$$a(u, v) = L(v) \quad (\forall v \in V)$$

の解 $u \in V$ が一意に存在する.

注意 2. 解 u は, $\alpha \|u\| \leq \|L\|_{V'} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{v \in V} \frac{L(v)}{\|v\|}$ を満たす.

* 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 E-mail: norikazu@ms.u-tokyo.ac.jp

この定理は, Lax & Milgram [5] による:

“The following theorem is a mild generalization of the Fréchet–Riesz Theorem on the representation of bounded linear functionals in Hilbert space.”

■ **Lions の定理.** 次に, $T > 0$ に対して, $J = (0, T)$ とおく. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域として, 熱方程式の初期値境界値問題

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f & (x \in \Omega, t \in J), \\ u &= 0 & (x \in \partial\Omega, t \in J), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (x \in \Omega) \end{cases}$$

を考える. (実際には, もっと一般的な形が扱えるが, 簡単のため, 熱方程式のみを扱うことにする.)

$H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)^d, v|_{\partial\Omega} = 0\}$ とする. $\langle \cdot, \cdot \rangle = {}_{V'} \langle \cdot, \cdot \rangle_V$ で V' と V の双対積 (duality pairing), $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ で H の内積を表すものとする. さらに, $\mathcal{X} = L^2(J; V) \cap H^1(J; V')$, $\mathcal{Y} = L^2(J; V) \times H$ とおく. ここで, Bochner 積分の表記

$$\|v\|_{L^2(J; V)}^2 = \int_J \|v(t)\|_V^2 dt$$

を用いている.

(P) の弱形式として次を採用する.

(WP) 次の “変分方程式” を満たす $u \in \mathcal{X}$ を求めよ:

$$\underbrace{\int_J [\langle \partial_t u, v_1 \rangle + (\nabla u, \nabla v_1)] dt + (u(0), v_2)}_{=B(u, v)} = \underbrace{\int_J \langle f, v_1 \rangle dt + (u_0, v_2)}_{=L(v)} \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \mathcal{Y}.$$

注意 3. $\mathcal{X} \subset C^0(\bar{J}; H)$ (連続) なので, $u(0) = u(\cdot, 0) \in H$ は意味を持つ.

定理 4. $f \in L^2(J; V')$ と $u_0 \in H$ を仮定する. このとき, (WP) には一意な解 $u \in \mathcal{X}$ が存在し, $\|u\|_{\mathcal{X}} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(J; V')})$ を満たす.

この定理の証明に, Lax–Milgram の定理は利用できない. 普通は, Galerkin 法で証明される. その際には, 関数空間は可分 (separable) であることが要請される. また, $\mathcal{X} \subset C^0(\bar{J}; H)$ (コンパクト) も必要になる (Aubin–Lions の定理).

■ Banach–Nečas–Babuška の定理. (WP) の形の変分方程式に適用できる “Lax–Milgram 型” の定理も知られている. V を実 Banach 空間, W を回帰的 (reflexive) 実 Banach 空間とする.

定理 5. $V \times W$ 上の有界双線形形式 $a(\cdot, \cdot)$ に対して, 次の (i)–(iii) は同値である.

(i) 任意の $L \in W'$ に対して次を満たす $u \in V$ が一意に存在する:

$$a(u, w) = L(w) \quad (\forall w \in W).$$

(ii) 次の (BNB1) と (BNB2) が成り立つ:

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta; \quad (\text{BNB1})$$

$$w \in W, (\forall v \in V, a(v, w) = 0) \Rightarrow (w = 0). \quad (\text{BNB2})$$

(iii) 次の (BNB3) が成り立つ:

$$\exists \beta_1, \beta_2 > 0,$$

$$\inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta_1, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} = \beta_2. \quad (\text{BNB3})$$

注意 6. 1. $\beta = \beta_1 = \beta_2$ が成り立つ.

2. (i) の解 u は, $\|u\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|L\|_{W'}$ を満たす.

3. (BNB1) は, 次のように書いても良い:

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|w\|_W} \geq \beta \|v\|_V \quad (\forall v \in V).$$

4. (BNB2) は, 次のように書いても良い:

$$\sup_{v \in V} |a(v, w)| > 0 \quad (\forall w \in W, w \neq 0).$$

5. $W = V$ のとき, (1) から (BNB3) が従う. すなわち, 定理 1 は定理 5 の系である.

Ern & Guermond [3] では, この定理を Banach–Nečas–Babuška の定理と呼んでおり, この論文でもそれに従う. (しかし, [3] の前身である [2] では “Nečas の定理” と呼んでいる.) 他には, 一般化 Lax–Milgram の定理, Babuška–Lax–Milgram の定理などと呼ばれる. (BNB1) は, Babuška–Brezzi 条件, inf-sup 条件などと呼ばれる. この定理に関わる個人的な理解を [7] で述べた.

2 DG 時間離散化手法

V と H は (実) Hilbert 空間であり, $V \subset H$ は稠密で, 単射が連続であるようなものとする. V' と H' をその双対空間とし, 通常のように H と H' を同一して, $V \subset H \subset V'$ を考える. $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_H$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ と表し, さらに, $\langle \cdot, \cdot \rangle = {}_{V'} \langle \cdot, \cdot \rangle_V$ で V' と V の双対積を表すことにする. $T > 0$ に対して, $J = (0, T)$ とおく. $t \in J$ に対して, 線形作用素 $A(t) : V \rightarrow V'$ を考え,

$$\langle A(t)w, v \rangle \leq M \|w\|_V \|v\|_V, \quad \langle A(t)v, v \rangle \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (w, v \in V, \text{ a.e. } t \in J)$$

を仮定する. ただし, M と α は $t \in J$ とは無関係な正定数である.

次の形の放物型発展方程式の初期値問題を考える:

$$u' + A(t)u = F(t), \quad t \in J; \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

ここで, $u' = du(t)/dt$ と書いている. $F : J \rightarrow V'$ と $u_0 \in H$ は与えられた関数である.

方程式 (2) を扱うための枠組みは, 複数知られているが, 本研究では, J. L. Lions による変分法的な枠組みを採用する. それが, 後で考える離散化手法の解析に有利だからである. 関数空間 $\mathcal{X} = L^2(J; V) \cap H^1(J; V')$, $\mathcal{Y} = L^2(J; V) \times H$ を用いる. ノルムは, それぞれ, $\|w\|_{\mathcal{X}}^2 = \|w\|_{L^2(J; V)}^2 + \|w'\|_{L^2(J; V')}^2$, $\|(v_1, v_2)\|_{\mathcal{Y}}^2 = \|v_1\|_{L^2(J; V)}^2 + \|v_2\|^2$ とする.

(2) の変分法的な定式化は次のようになる. 与えられた $F \in L^2(J; V')$ と $u_0 \in H$ に対して, 次を満たす $u \in \mathcal{X}$ を求めよ:

$$\begin{aligned} B(u, v) &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_J [\langle u', v_1 \rangle + \langle A(t)u, v_1 \rangle] dt + (u(0), v_2) \\ &= \int_J \langle F, v_1 \rangle dt + (u_0, v_2) \quad (\forall v = (v_1, v_2) \in \mathcal{Y}). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $u \in \mathcal{X}$ に対して, $u(0) \in H$ は well-defined であることに注意されたい. (3) の解の一意存在は, 普通, Galerkin 法によって問題を常微分方程式系で近似し, 極限移行をすることで証明される.

ここでは, 別のアプローチに着目したい. 双線形形式 B は, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ で有界である. さらに, 次の 2 つが成り立つことが知られている (例えば, [3, Theorem 6.6] や [8, (32)]) :

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{w \in \mathcal{X}} \sup_{v \in \mathcal{Y}} \frac{B(w, v)}{\|w\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{Y}}} = \beta; \quad (4a)$$

$$v \in \mathcal{Y}, \quad (\forall w \in \mathcal{X}, B(w, v) = 0) \implies (v = 0). \quad (4b)$$

したがって、Banach–Nečas–Babuška 定理が応用できて、結果として、(3) の解 $u \in \mathcal{X}$ の一意存在が結論できる。この解 u が、

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq C (\|F\|_{L^2(J; V')} + \|u_0\|)$$

を満たすことは (4a) の簡単な結果である。ここで、 C は、 M と α にのみ依存する (T には依存しない) 正定数である。

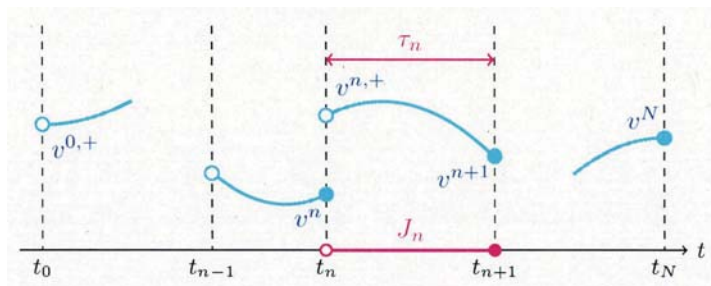
(3) を数値計算するために、まずは、時間変数の離散化について考えたい。 $[0, T]$ 内に点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ を配置し、 $J_n = (t_n, t_{n+1}]$, $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, $\tau = \max_{0 \leq n \leq N-1} \tau_n$ とおく。標準的な時間離散スキームでは、時間節点 t_n 上での解の値 $u(t_n)$ の近似値 U_n を計算する。 U_{n+1} が U_n と既知の値のみから計算できる場合、そのスキームは一段法と呼ばれる。一方で、楕円型偏微分方程式に対する有限要素法のように、近似を、区分的な多項式のような関数の形で求めたいことも多い。すなわち、Galerkin 法によって離散スキームを導入する。そのために、整数 $q \geq 0$ に対して、

$$\mathcal{S}_\tau = \{v \in L^\infty(J; H) \mid v|_{J_n} \in \mathcal{P}^q(J_n; V), 0 \leq n \leq N-1\}$$

とおく。 $\mathcal{P}^q(J_n; V)$ は、 J_n 上の q 次以下の V 値多項式全体の集合である。一般に、 $v \in \mathcal{P}^q(J_n; V)$, あるいは、 $v \in L^2(J_n; V) \cap H^1(J_n; V')$ に対して、

$$v^{n,+} = \lim_{t \downarrow t_n} v(t), \quad v^{n+1} = v(t_{n+1})$$

と書く。



このとき、(3) に対する、不連続 Galerkin 時間離散化法 (DG time-stepping method, dG(q) 法) は次で与えられる (この方法は、[6] で、常微分方程式系に対して提案された)。

dG(q) 法 次を満たす $u_\tau \in \mathcal{S}_\tau$ を求めよ：

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} [(\partial_t u_\tau, v) + \langle A(t) u_\tau, v \rangle] dt + (u_\tau^{0,+}, v^{0,+}) \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} (u_\tau^{n,+} - u_\tau^n, v^{n,+}) = \int_J \langle f, v \rangle dt + (u_0, v^{0,+}) \quad (\forall v \in \mathcal{S}_\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

局所的な表現を導くため、 u_τ^n が得られているとする。このとき、 $J_n = (t_n, t_{n+1}]$ での $U = u_\tau|_{J_n}$ は、次で求められる：

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [(\partial_t U, \phi) + \langle A(t)U, \phi \rangle] dt + (U^{n,+} - U^n, \phi^{n,+}) \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle f, \phi \rangle dt \quad (\forall \phi \in \mathcal{P}^q(J_n; V)). \end{aligned}$$

これより、この方法は一段法としての定式化が可能であることがわかる。実際、dG(0) 法は、(微分作用素の近似に関しては) 後退 Euler 法に一致する。 $q \geq 1$ の際も、陰的 Runge-Kutta 法の一つとみなせる。その場合の精度は $2q + 1$ 次である（これらのことも、本質的には [6] で報告されている）。dG(q) 法は、Space-Time 法での離散化に向いており、流体構造連成問題の計算によく応用されている（例えば、[4] など）。

dG(q) 法の収束については、いろいろな結果が知られている。そのほとんどは、問題を一段法と解釈し、時間節点 t_n での V ノルムや、 H ノルムでの誤差を調べている（例えば、[9] など）。

本研究では、dG(q) 法に対して、BNB 定理に基づいた変分法的な解析を遂行し、 $L^2(J; V')$ ノルムや $L^2(J; V)$ ノルムでの最適誤差評価の導出に成功した。以下、本研究の主結果の一部を紹介する（詳細は [8] を参照されたい）。

まず、(4a) の離散版が成り立つ。すなわち、次を満たす正定数 c_1 が存在する：

$$\inf_{w_\tau \in \mathcal{S}_\tau} \sup_{v_\tau \in \mathcal{S}_\tau} \frac{B_\tau(w_\tau, v_\tau)}{\|w_\tau\|_{\mathcal{X}, \tau} \|v_\tau\|_{\mathcal{Y}, \tau, \#}} = c_1. \quad (6)$$

ただし、 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ と $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ に対応する DG ノルムとして次を採用している：

$$\begin{aligned} \|v_\tau\|_{\mathcal{X}, \tau}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} [\|v'_\tau\|_{V'}^2 + \|v_\tau\|_V^2] dt + \|v_\tau^{0,+}\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \|v_\tau^{n,+} - v_\tau^n\|^2, \\ \|v_\tau\|_{\mathcal{Y}, \tau, \#}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} \|v_\tau\|_V^2 dt + \|v_\tau^{0,+}\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \tau_n \|v_\tau^{n,+}\|^2. \end{aligned}$$

(6) を用いれば、標準的な議論を経て、

$$\|u - u_\tau\|_{\mathcal{X}, \tau} \leq \left(1 + \frac{M_1}{c_1}\right) \inf_{w_\tau \in \mathcal{S}_\tau} \|u - w_\tau\|_{\mathcal{X}, \tau, \star} \quad (7)$$

が結論できる。ただし、 $u \in \mathcal{X}$ は (3) の解、 $u_\tau \in \mathcal{S}_\tau$ は (5) の解であり、

$$\|v_\tau\|_{\mathcal{X}, \tau, \star}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{J_n} [\|v'_\tau\|_{V'}^2 + \|v_\tau\|_V^2] dt + \|v_\tau^{0,+}\|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \tau_n^{-1} \|v_\tau^{n,+} - v_\tau^n\|^2$$

としている。また、 M_1 は、 $B_\tau(w, v) \leq M_1 \|w\|_{\mathcal{X}, \tau, \star} \|v\|_{\mathcal{Y}, \tau, \#}$ ($w, v \in \mathcal{S}_\tau$) を満たす M にのみ依存する正定数である。(7) は、左右のノルムが異なるので、厳密な意味で

の最良近似でもなければ, Dupont–Liu [1] の意味での対称評価にもなっていない. しかし, 標準的な補間誤差評価と組み合わせることで, 最適誤差評価

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u' - u'_\tau\|_{L^2(J_n; V')}^2 \right)^{1/2} \leq c_3 \tau^q \left(\|u^{(q+1)}\|_{L^2(J; V')} + \|u^{(q)}\|_{L^2(J; V)} \right)$$

や

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \|u(t_n) - u_\tau(t_n)\| + \|u - u_\tau\|_{L^2(J; V)} \leq c_4 \tau^{q+1} \|u^{(q+1)}\|_{L^2(J; V)}.$$

が, ほとんど機械的な計算で得られる. (ただし, $q = 0$ のとき, 最初の不等式の成立は自明であり, 収束に関してなんの情報ももたらさない.)

これらの結果において, 定数 c_1, c_3, c_4 は, M と α にのみ依存して定まる正定数であり, 特に τ や T とは無関係である. 以上の議論では, ひとたび (6) が得られたならば, あとは, 楕円型方程式の Galerkin 近似の解析とほぼ同様に考察を進めることができる. すなわち, 放物型問題をあたかも楕円型のように扱える. これが, 本研究の最大の利点である.

ここまででは時間変数の離散化についてのみ考察してきた. この結果を, 具体的な偏微分方程式の全離散スキームへ応用することは容易である. 例えば, 熱方程式の Dirichlet 境界値問題を, 空間変数について, 連続かつ区分的 k 次多項式を用いた標準的な有限要素法 (これを $cG(k)$ 法と書くことにする) で離散化する. 時間連続 $cG(k)$ 法の誤差評価や安定性は, よく研究されているので, その結果と本研究の結果を合わせることで, 時間変数を $dG(q)$ 法で離散化した $dG(q)cG(k)$ 法の最適誤差評価が直ちに得られる. 詳細は, [8, §4] を参照されたい.

参考文献

- [1] T. F. Dupont and Y. Liu. Symmetric error estimates for moving mesh Galerkin methods for advection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(3):914–927, 2002.
- [2] A. Ern and J. L. Guermond. *Éléments finis: théorie, applications, mise en œuvre*, Springer, 2002.
- [3] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, Springer, 2004.
- [4] Y. Bazilevs, T. Takizawa, and T. E. Tezduyar. *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*. Wiley, 2013.

- [5] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, 1954.
- [6] P. Lasaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, pages 89–123, Academic Press, 1974.
- [7] N. Saito. Notes on the Banach–Nečas–Babuška Theorem and Kato’s minimum modulus of operators. [arXiv:1711.01533](#)
- [8] N. Saito. Variational analysis of the discontinuous Galerkin time-stepping method for parabolic equations. [arXiv:1710.10543](#)
- [9] V. Thomée. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, 2nd edit. 2007.