

法双曲不変多様体崩壊のシナリオ

北海道大学・電子科学研究所 寺本 央、小松崎 民樹
(Hiroshi Teramoto and Tamiki Komatsuzaki)
Research Institute for Electronic Sciences,
Hokkaido University

0. はじめに

ある力学系が与えられたとき、その力学系における法双曲不変多様体とは、以下の二つの性質を持つ多様体をさす。一つは、その力学系の定める流れに沿って不変であること、つまりその多様体上の任意の初期条件から(正方向、負方向に)のびる軌道が、その多様体にすっぽりと含まれる、ということである。もう一つは、法双曲的であること、つまり、その多様体上の軌道の初期条件を、その多様体の法線方向にずらしたときのずれの拡大率(縮小率)と接線方向にずらしたときのずれの拡大率(縮小率)を比較したとき、法線方向のずれの拡大率(縮小率)が接線方向のずれのそれに比べて大きい、ということである [1]。英語では、Normally Hyperbolic Invariant Manifold と呼ばれ、頭文字をとって、NHIM とも呼ばれる。

この法双曲不変多様体は、接線方向には、中心方向の存在も許すという意味で、純粋な双曲固定点の一つの自然な拡張として、その性質が注目されている [2] し、さらに法双曲不変多様体は、その法線方向へと伸びる安定/不安定多様体を持っており、それらがどのように伸び、どのように交差しているかは、力学系の輸送特性を知る上で重要な鍵である [3, 4]、ということが分かっている。とりわけ、それらの安定/不安定多様体のうちで、codimension 1 を持つもの、つまり、力学系が定義されている全空間の次元よりも 1 次元分だけ小さいものが、力学系の輸送特性を決める上で重要であると考えられている。なぜならば、codimension 1 をもつ安定/不安定多様体は、全空間を局所的には二つに分断できるが、それよりも小さな次元しか持たないものは、全空間を局所的にも二つに分断することができないからである。たとえば、化学反応の文脈では、それは化学反応が起こるか起こらないか、を定める重要な境界となっている [5]。また、Navier Stokes 方程式の乱流解と層流を分ける境界ともなりうる、ということが最近の研究で明らかになってきている [6]。

法双曲不変多様体を持つ重要な性質として、「構造安定性」というものがあり、法双曲不変多様体が、法線方向に安定方向/不安定方向双方を持ち、コンパクトである場合には、N. Fenichel によって構造安定であることが証明されている [1]。「構造安定」であるとは、つまり、着目している力学系が法双曲不変多様体を持っており、その力学系のベクトル場が十分なめらかであるとすれば、その力学系になめらかな摂動をくわえた力学系

もやはり法双曲不変多様体を持っており、摂動前と摂動後の法双曲不変多様体は微分同相の関係にある、ということである。また、摂動後の法双曲不変多様体のなめらかさを決めているものは、Lyapunov types number と呼ばれる、法線方向と接線方向のずれの拡大率（縮小率）の比

$$r = \frac{\text{法線方向のずれの拡大率（縮小率）}}{\text{接線方向のずれの拡大率（縮小率）}} \quad (1)$$

であり、摂動後の法双曲不変多様体は C^r 級のなめらかさを持つということが分かっている。その証明の、コンパクトでない場合への拡張は現在も行われているが、その拡張を難しくしているのは、コンパクトではない場合には、Lyapunov types number が、well-defined であることが必ずしも保証されないというところにある、と考えられている。

コンパクトな不変多様体が、法双曲的であれば、「構造安定」であるが、法双曲性が破れた場合にその不変多様体がどうなるのかに関しては、まだ、あまり知られていない。例えば、N. Fenichel は、法双曲性が破れると、不変多様体のなめらかさが失われ、カスプ等が現れることを議論している [1] が、それが不変多様体全体としての大域的な崩壊にどのようなつながっているのかに関しては、何も言及していない。また、法双曲的であるということは、不変多様体のなめらかさを保証するものであるが、逆は必ずしも正しくない。例えば、Yang らは、不変多様体の法双曲性は失われても、不変多様体自体のなめらかさが保たれる、といういくつかの示唆的な例を提示している [7]。李ら [8]、Halo ら [9] らの先駆的な数値計算を用いた法双曲不変多様体の崩壊を観測する試みもあるが、法双曲不変多様体を、法双曲性が破れるパラメータまで延長するのは、非常に困難であり、法双曲不変多様体の崩壊の全容を解明するには至っていない。困難な理由は、先ほども述べたとおり、法双曲性がなくなると一般には不変多様体のなめらかさが保証されず、そのことが数値的な不安定性をもたらすためであると考えられる。また、後で述べる標準形理論を用いた法双曲不変多様体の構成では、標準形の収束が必ずしも保証されず、一般には漸近級数展開となっているので、やはり、法双曲不変多様体を法双曲性が破れるパラメータ領域まで延長することが難しい、からである。

本研究においては、以上のような困難を乗り越え、法双曲不変多様体をパラメータ空間で法双曲性が破れるまで延長するために、法双曲不変多様体上の周期軌道およびそれらをつなぐホモクリニック/ヘテロクリニック軌道のネットワークに着目する。法双曲不変多様体は「孤立している」という重要な性質をもっており、ある近傍をとるとその近傍には着目している法双曲不変多様体しか含まれていないような近傍をとることができる。その性質故に、ある周期軌道が、あるパラメータで法双曲不変多様体上にあったとすると、法双曲性が破れない限り、そのパラメータを含む連結な

開領域でその周期軌道の族はやはり法双曲不変多様体上になければならない、ということがわかる。そのことは、法双曲不変多様体上にあるホモクリニック/ヘテロクリニック軌道に関してもあてはまり、それらは、法双曲性が破れない限り、法双曲不変多様体とともにあり、法双曲不変多様体の「骨格」をなすものである。また、それらの「骨格」は、分岐で消滅しない限り構造安定に存在するので、法双曲不変多様体自体が崩壊した後も法双曲不変多様体の残骸としてのこると期待される。本研究では、この「骨格」を追跡すること、および、その「骨格」の周辺の構造を調べることにより、法双曲不変多様体の崩壊のシナリオにせまる、ということを目指とする。また、本研究では、力学系として Hamilton 系に着目するが、議論の大半は一般の力学系においても用いることができる。また、先に述べた重要性から、ここでは、Hamilton 系に於いて最大次元の法双曲不変多様体 (codimension 2) の崩壊のシナリオを論じるが、より低次元の法双曲不変多様体にもほとんどのアイデアはそのまま一般化できる。

1. 系の設定

次の Hamiltonian から生成される 3 自由度の力学系を考える。

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (x_1 P_2 - x_2 P_1) + \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2) - \epsilon x_1 \quad (2)$$

ただし、 $R = ((x_1 - x_s)^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ および $x_s = -\epsilon^{-1/2}$ とする。この系は、電子と原子核からなる水素原子に x_1 方向から一様な電場を、 x_3 方向から一様な磁場をかけたときの電子の運動を記述する Hamiltonian である。適切にスケールリングすることにより、パラメータとしてはスケールされた電場の強さ ϵ がのこる [11]。この Hamiltonian の原点 $P_1 = P_2 = P_3 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ がサドル×センター×センター型の固定点になっており、この固定点のエネルギーを $E = 0$ とする。以下では、この固定点からのびるエネルギーに関して連続的に存在する codimension 2 の法双曲不変多様体が、エネルギーとともにどのように変化し、崩壊していくのかを追跡する。スケールされた電場の強さ ϵ は二つのセンター方向の回転速度の比が 1:2 となるように選んだ。法双曲不変多様体の崩壊にとってセンター方向での共鳴およびそれに伴う不安定化が法双曲不変多様体の崩壊にとって重要であるということが示唆されているからである [8]。

2. 固定点近傍での法双曲不変多様体の構成

まず、固定点近傍での法双曲不変多様体を構成するために、Simó らによる intermediate normal form を用いて、固定点近傍で Hamiltonian を標準形に変換する。もとの Hamiltonian(2) を、サドル方向 (ξ, η) (ξ 方向が

固定点の線型安定方向、 η が固定点の線型不安定方向) と二つのセンター方向 (p_1, q_1) と (p_2, q_2) の 6 つの正準座標で書き直すと [11] ($\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ および $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ としている。)

$$H(\xi, \eta, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\lambda_1 \xi \eta + \sum_{i=1}^2 \omega_i (p_i^2 + q_i^2) + \sum_{i,j} c_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xi^i \eta^j \quad (3)$$

となる。ここで、重複を避けるために $c_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ に関して $\max\{0, 3 - i - j\}$ 次以上の形式的べき級数であるとする。この Hamiltonian の intermediate normal form は変換後の座標および関数を $\hat{\cdot}$ をつけて表記すると、

$$\hat{H} = 2\lambda \hat{\xi} \hat{\eta} + \sum_{i=1}^2 \omega_i (\hat{p}_i^2 + \hat{q}_i^2) + \hat{c}_{00}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) + \sum_{i+j>1} \hat{c}_{ij}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \hat{\xi}^i \hat{\eta}^j \quad (4)$$

となる。この Hamiltonian において $\hat{\xi} = \hat{\eta} = 0$ で定義される 4 次元多様体は、不変多様体となっているのだが、これが固定点近傍での codimension 2 の法双曲不変多様体になっている。ちなみに、この系では、その法双曲不変多様体のトポロジーは固定点近傍では S^3 になっており、コンパクトである。

3. 法双曲不変多様体の「骨格」、周期軌道の分岐図

エネルギーが固定点近傍 $E = 0$ 付近においては、先の intermediate normal form は、法双曲不変多様体のよい近似になっており、たとえば、(4) で、 $\hat{\xi} = \hat{\eta} = 0$ とすると、それは法双曲不変多様体内部の時間発展を記述する以下のような Hamiltonian になる。

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \omega_i (\hat{p}_i^2 + \hat{q}_i^2) + \hat{c}_{00}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \quad (5)$$

これは、 $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})$ に関する 2 自由度の Hamiltonian になっているので、 $\hat{p}_1 > 0, \hat{q}_1 = 0$ のポアンカレ面を観察することにより、法双曲不変多様体内部の運動がどのようにカオス化されていくのかが分かる。そのポアンカレ面の様子を図 1 に示し、対応する法双曲不変多様体上の周期軌道の分岐の図を図 2 に示す。周期軌道のエネルギー方向への延長には、Keller の pseudo-arclength continuation[12] を用いた。図 1 をみると、エネルギーが $E = 0.10$ ですでに法双曲不変多様体内部の動力学はカオス化していることが分かる。本研究では特にカオス領域の中心に位置する不安定周期軌道 (i) の周辺および (i) の法双曲不変多様体上にあるホモクリニック軌道周辺で、法双曲不変多様体がどのように崩壊していくのかを観測する。

4. 不安定周期軌道およびそのホモクリニック軌道周辺における法双曲不変多様体の崩壊の観測

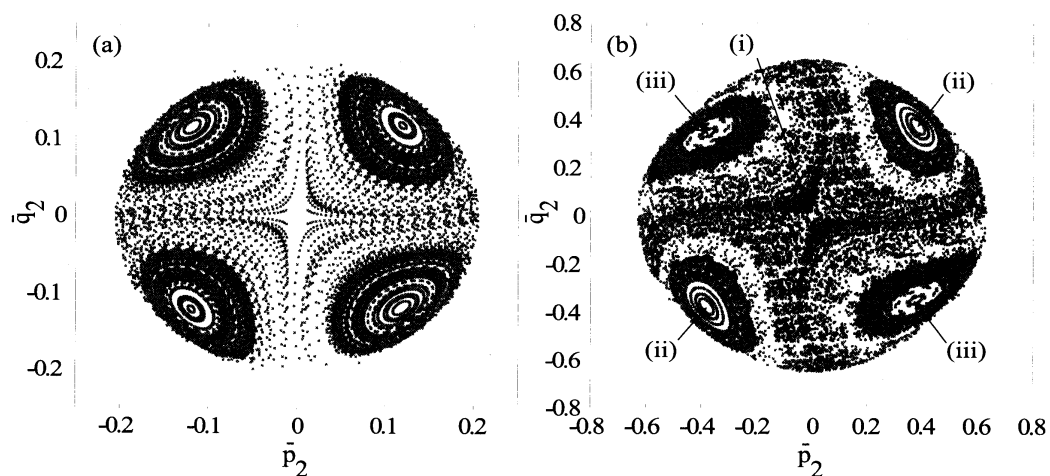


図 1: エネルギー $E = 0.01$ (a) とエネルギー $E = 0.10$ (a) におけるポアンカレ面の様子

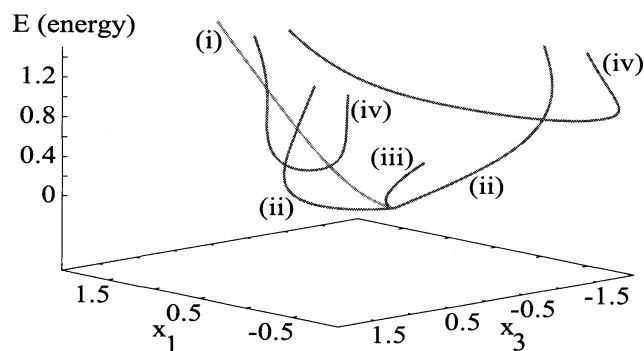


図 2: 固定点から伸びる法双曲不変多様体上の周期軌道の分岐図 (Poincaré 面 $x_2 = 0, P_2 > 0$ 上におけるプロット、図中の (i), (ii), (iii) は、図 1 の周期軌道と対応している。(i), (ii) は、固定点から伸びている二つの周期軌道。(iii) は、(i) から周期倍分岐で現れる安定周期軌道。(iv) は、(ii) からピッチフォーク分岐で現れる軌道。これらは、法双曲不変多様体の「骨格」をなす。

図1の不安定周期軌道は、二つの不安定方向および二つの安定方向を持っている。二つの不安定方向のうち、一方は正の特性乗数（モノドロミー行列の固有値）を持っており、その方向が法双曲不変多様体の法線方向に対応している。もう一つは負の特性乗数を持っており、それは接線方向に対応している。今考えている系は、Hamilton系であるから、各々の不安定方向に対応する二つの安定方向を持っている。まとめると、負の特性乗数に対応する固有ベクトルのペアが接線方向を、正の特性乗数に対応する固有ベクトルのペアが法線方向に対応している。周期軌道のエネルギーに関する族を考えたとき、分岐がなければ符号は不連続的には変化しないので、負の特性乗数に対応する固有ベクトルのペアが（法双曲不変多様体が崩壊しない限りは）法双曲不変多様体の接線方向になっている。

エネルギーに沿って二つの不安定方向の特性乗数の絶対値をプロットしたものを図3(a)に示す。この不安定周期軌道(i)上では、エネルギーが $E \approx 1.00$ 付近で法双曲性が破れることが分かる。つぎに、Poincaré面 $P_2 > 0, x_2 = 0$ において、この不安定周期軌道の不安定多様体上の構造を観測する。そのPoincaré面上では、不安定周期軌道(i)は固定点となり、その不安定多様体の次元は、2となり(i)の近傍では、二つの不安定方向に対応するモノドロミー行列の固有ベクトルで張られる。正の特性乗数に対応する固有ベクトル方向を u_1 、負の特性乗数に対応する固有ベクトル方向を u_2 とする。不安定多様体上の構造を可視化するために、不安定多様体上の各点を初期条件とする軌道の局所第一Lyapunov指数を計算し、その値を色で表現したものを、図3(c), (d)であらわす。これによりこの面上で泣き別れ面をなしている法双曲不変多様体および安定多様体との交差を輝線として可視化することができる[13]。

図3の原点が不安定周期軌道(i)に対応しており、原点を通る輝線が法双曲不変多様体をこの不安定多様体で切断したときの切断面に対応している。また、それ以外の輝線は法双曲不変多様体の不安定多様体と安定多様体との交差に対応している。エネルギーが低く法双曲性が強い図3の(c)の場合では、法双曲不変多様体に対応する輝線はクリアーに、この領域ではとぎれていないように見える。一方で、図3の(d)の場合では、輝線がとぎれておりクリアな輝線を見ることができない。原点を通る輝線の残骸を構成しているものが何であるのかは分からないが、部分的には不安定周期軌道(i)の法双曲不安定多様体上にあったホモクリニック/ヘテロクリニック軌道で説明できる。例えば、不安定周期軌道(i)のいくつかのホモクリニック軌道を、同じ座標軸上にプロットしたものが図3の(b)であるが、原点を通る輝線とよく一致していることが分かる。後にもう少し厳密な議論で示すが、図3の(b), (d)のエネルギー領域 $E \approx 0.90$ では、法双曲不変多様体はすでに崩壊している。

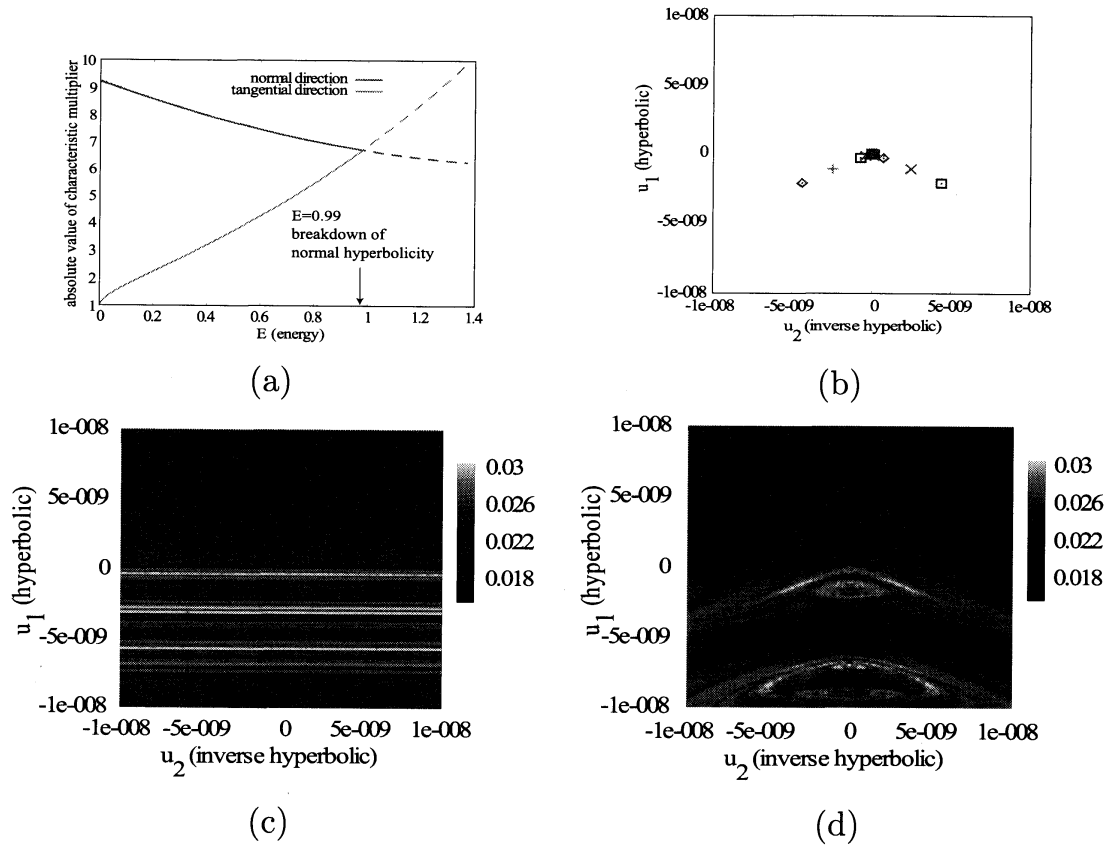


図 3: (a): 不安定周期軌道 (i) の二つの不安定方向の特性乗数の絶対値のエネルギー依存性。 $E \approx 1.00$ 付近でこの不安定周期軌道の法双曲性が破れる。(b): $E = 0.90$ ((d) と同じエネルギー) における不安定周期軌道 (i) のいくつかの法双曲不変多様体上のホモクリニック軌道 (各シンボルが各々のホモクリニック軌道に対応している。) を (i) の不安定多様体上にプロットしたもの。(c) and (d): ((c) $E = 0.08$, (d) $E = 0.90$) (b) と同様に、不安定多様体上の各点から延びる軌道の局所第一 Lyapunov 指数をプロットしたもの。

5. 法双曲不変多様体の崩壊を特徴付ける指数

先の可視化の結果を見ると、エネルギーが $E = 0.90$ では、法双曲不変多様体は崩壊しているように見え、その残骸の一部を構成しているものは、法双曲不変多様体にのっていた不安定周期軌道ホモクリニック軌道である。この結果を厳密に裏付けるために、ここでは、それらの各ホモクリニック軌道のまわりで法双曲不変多様体の崩壊を裏付けるための指数を導入する。

まず、不変多様体一般に成立する性質として、不変多様体上の軌道に沿って、その不変多様体の接ベクトルを時間発展させても、軌道上では、そのベクトルは常に不変多様体に接している、というものがある。例えば、力学系として $\mathbb{R}^n$ 上で定義されているものを考え、初期条件 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ から伸びるパラメータ $t \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされた軌道を $\phi_t(\mathbf{x})$ と書くことにする。また、その微分を

$$d\phi_{t\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{\phi_t(\mathbf{x})}\mathbb{R}^n \quad (6)$$

と書くことにする。この力学系が不変多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ を持つとすると、この節の冒頭の主張は、任意の $\mathbf{x} \in M$ に対して、もし $v \in T_{\mathbf{x}}M$ なら、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $d\phi_{t\mathbf{x}}(v) \in T_{\phi_t(\mathbf{x})}M$ が成立する、となる。

次に、着目している不安定周期軌道 (i) と Poincaré 面 $P_2 > 0, x_2 = 0$ との交点を $\mathbf{p}$ として、その Poincaré 面に対応する Poincaré 写像を ϕ とする。 $\mathbf{p}$ の接空間は、前述の通り、法線方向に対応する正の固有ベクトルの組で張られるベクトル空間 $E_{\mathbf{p}}^+$ と接線方向に対応する負の固有ベクトルの組で張られるベクトル空間 $E_{\mathbf{p}}^-$ の二つの和 $E_{\mathbf{p}}^+ \oplus E_{\mathbf{p}}^-$ で張られる。

いま、 $\mathbf{x}$ として、不安定周期軌道 (i) の法双曲不変多様体内にあるホモクリニック軌道上の点を取り、 $\mathbf{x}$ の接空間の元 v として、 $\lim_{n \rightarrow -\infty} d\phi^n_{\mathbf{x}}(v) \equiv v_{-\infty} \in E_{\mathbf{p}}^-$ となるものをとる。このとき問題となるのは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d\phi^n_{\mathbf{x}}(v)$ の行先である。接ベクトル $v_{-\infty}$ は、 $E_{\mathbf{p}}^-$ の元であるから、法双曲不変多様体が存在した場合には、それは法双曲不変多様体の接ベクトルとなる。法双曲不変多様体がホモクリニック軌道上崩壊していないとすると、接ベクトル $v_{-\infty}$ はホモクリニック軌道にそって一周して、再び、 $E_{\mathbf{p}}^-$ に戻ってくるはずである。この対偶をとると、仮に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d\phi^n_{\mathbf{x}}(v) \notin E_{\mathbf{p}}^-$ であったとすると、法双曲不変多様体は、着目しているホモクリニック軌道に沿って、崩壊しているはずだ、ということが分かる。これが、我々が提案するホモクリニック軌道に沿って法双曲不変多様体の崩壊をチェックするための指標である。

以上の指標を数値的に検証するために、ここでは特に $E_{\mathbf{p}}^+$ の不安定方向に対応するモノドロミー行列の左固有ベクトルを u_L^+ 、 $E_{\mathbf{p}}^-$ の同じく不安定方向に対応するモノドロミー行列の右固有ベクトルを u_R^- として、 u_R^-

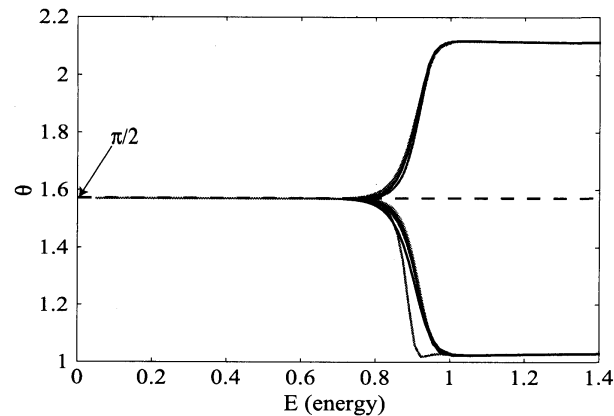


図 4: 角度 θ をエネルギーに対してプロットした図、各線が各々のホモクリニック軌道に対応している。

をホモクリニック軌道に沿って一周時間発展させ、それが $\mathbf{p}$ に戻ってきたときに、ベクトル u_L^+ との角度をはかる。そのことを数式で表現すると

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{-1} \left(\frac{\langle u_L^+, (d\phi_{\mathbf{x}}^n) \circ (d\phi_{\mathbf{x}}^{-n})(u_R^-) \rangle}{|u_L^+| |(d\phi_{\mathbf{x}}^n) \circ (d\phi_{\mathbf{x}}^{-n})(u_R^-)|} \right) \quad (7)$$

となる。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はユークリッド内積、 $|\cdot|$ はそれによって誘導される自然な距離であるとする。法双曲不変多様体が、着目しているホモクリニック軌道に沿って崩壊していなければ、 u_R^- はホモクリニック軌道を一周回って、 $E_{\mathbf{p}}^-$ に戻ってくるはずなので、 $\theta = \pi/2$ となるはずである。図 4 に、図 3 の各ホモクリニック軌道をエネルギーの低いところから延長していったとき、エネルギーとともに θ がどのように変化するのかをプロットした。その結果、エネルギー $E \approx 0.70$ を境に指標が $\theta = \pi/2$ から一斉にずれ、それ以上のエネルギーでは法双曲不変多様体が崩壊していることが分かる。各々のホモクリニック軌道に沿って、法双曲不変多様体があるエネルギーで一斉に崩壊しているように見えるのは、少なくともそれらのホモクリニック軌道が埋め尽くしている領域で法双曲不変多様体の大域的崩壊が起こっている、ということを示唆しているようにも見えるが、現状では、まだよく分からない。今後の研究課題としたい。

5. 謝辞

法双曲不変多様体を法双曲性が破れるパラメータ領域まで延長するのに、その「骨格」をなしている不安定周期軌道に着目すると見通しよく議論できる、というアイデアは、戸田幹人氏に教えていただきました。また、法双曲不変多様体が「孤立している」という重要な性質を持つということは、荒井 迅氏にご教授いただきました。この場を借りて感謝いたし

ます。

参考文献

- [1] Fenichel, N., Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.* **21**, 193-225 (1971).
- [2] Bonatti, C., Diaz, L. J., Viana, M. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, *ENCYCLOPAEDIA OF MATHEMATICAL SCIENCE*, vol. 102, Mathematical Physics III, Springer-Verlag Berlin (2005).
- [3] Wiggins, S., *Chaotic Transport in Dynamical Systems*, 4th edition, Springer, New York (1985).
- [4] Nishiura, Y., *Far-from-equilibrium dynamics*, American Mathematical Society (2002).
- [5] M. Toda, T. Komatsuzaki, T. Konishi, R. S. Berry, *Advances in Chemical Physics*, **130**, Part A and B (2005).
- [6] Kawahara G. *Phys. Fluids*, **17**, 041702 (2005).
- [7] Yang D. G., arXiv0912.5419v1 (2009).
- [8] Li, C. B., Shojiguchi, A., Toda, M and Komatsuzaki, T., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 028302 (2006).
- [9] Halo, A., *Chaos*, **16**, 013120 (2006).
- [10] Simó, C., CISM Course on "Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications", Udine, June 16 to 20 (1997).
- [11] Uzer, T., Jaffe, C., Palacián, J., Yanguas, P. and Wiggins, S., *Nonlinearity*, **15**, 957 (2002).
- [12] Keller, H. B., Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, in P. Rabinowitz, ed., *Application of Bifurcation Theory*, Academic Press, New York, 359 (1977).
- [13] Guzzo, M., Lega, E., Froeschlé, C. *Physica D*, **238**, 1797 (2009).