

Cyclic sum of $\hat{\mathcal{A}}$ -finite multiple zeta values

東北大学大学院理学研究科 川崎 菜穂 *

Naho Kawasaki

Mathematical Institute,

Tohoku University

巡回和公式は和公式の細分化と呼ばれており、和公式は多重ゼータ (スター) 値の基本的かつ重要な関係式族の一つである。多重ゼータスター値の巡回和公式は M. Hoffman によって予想され、Y. Ohno によって証明された ([1])。その後、Ohno-N. Wakabayashi によって多重ゼータスター値の巡回和公式が証明された ([4])。一方で、小山宏次郎氏との共同研究により、有限多重ゼータ値および有限多重ゼータスター値の巡回和公式を得た ([3])。今回、その lift となる $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値および $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータスター値の巡回和公式を与えた ([2]) ので報告する。

1 多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式

この節では多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式について説明する。

正の整数 $k_1, \dots, k_r$ に対して、自然数の組 $(k_1, \dots, k_r)$ を index と呼ぶ。index $(k_1, \dots, k_r)$ ($k_1 \geq 2$) に対して、多重ゼータ値および多重ゼータスター値を

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

および

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

でそれぞれ定義する。

巡回和公式は多重ゼータ値の間に成り立つ関係式族の一つであり、M. Hoffman によって予想され、Y. Ohno によって証明された ([1])。その後、Ohno-N. Wakabayashi によって多重ゼータスター値の巡回和公式が証明された ([4])。巡回和公式を述べるために記号を定める。正の整数 k, r ($k \geq r$) に対して、index の集合 $I(k, n)$ を

$$I(k, r) := \{(k_1, \dots, k_r) : \text{index} \mid k_1 + \dots + k_r = k\}$$

で定義する。そして、 $I(k, r)$ の二つの元が巡回同値であるとは、 $\sigma = (1 \dots r)$ と $j = 1, \dots, r$ に対して、

$$(k_1, \dots, k_r) \equiv (k_{\sigma^j(1)}, \dots, k_{\sigma^j(r)})$$

*E-mail: naho.kawasaki.p7@gmail.com

を満たすこととする. index の集合 $I(k, r)$ における巡回同値類の全体を $\Pi(k, r)$ で表す. 以下, 空和は 0 とする.

多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式を以下に述べる.

定理 1.1 (Hoffman-Ohno [1], Ohno-Wakabayashi [4]). $\Pi(k, r)$ ($k > r > 0$) の任意の元 α に対して,

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \zeta(k_1 + 1, k_2, \dots, k_r)$$

および

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta^*(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) = \frac{k|\alpha|}{r} \zeta(k + 1)$$

が成り立つ. ただし, 右辺の $|\alpha|$ は α の元の個数とする.

2 $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式

この節では, $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値および $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータスター値の巡回和公式について述べる.

$\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値と $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータスター値を定義する. まず, J. Rosen [5] による $\hat{\mathcal{A}}$ を定義する. 正の整数 n に対して, $\mathbb{Q}$ -代数 $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n := \left(\prod_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right) / \left(\bigoplus_{p:\text{prime}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right)$$

で定義する. 任意の正の整数 n に対して, 自然な準同型 $\mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n$ が存在し, この準同型について $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geq 1}$ は逆系をなす. そこで, $\hat{\mathcal{A}} := \varprojlim_n \mathcal{A}_n$ とすると, 自然な全射準同型 $\pi: \prod_p \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \hat{\mathcal{A}}$ が存在する. このとき, 正の整数 n と index $(k_1, \dots, k_r)$ に対して, $\mathcal{A}_n$ -有限多重ゼータ値および $\mathcal{A}_n$ -有限多重ゼータスター値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1, \dots, k_r) := \left(\sum_{p > m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_n$$

および

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}^*(k_1, \dots, k_n) := \left(\sum_{p > m_1 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_n$$

でそれぞれ定義する. また, $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値および $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータスター値を

$$\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_1, \dots, k_r) := \pi \left(\left(\sum_{p > m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \right)_p \right) \in \hat{\mathcal{A}}$$

および

$$\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(k_1, \dots, k_r) := \pi \left(\left(\sum_{p > m_1 \geq \dots \geq m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \right)_p \right) \in \hat{\mathcal{A}}$$

でそれぞれ定義する. さらに, $\mathbf{p} := \pi((p)_p)$ とする.

今回得た, $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値および $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータスター値の巡回和公式を以下に述べる.

定理 2.1. $\Pi(k, r)$ ($k \geq r > 0$) の任意の元 α に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \left(\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_1 + 1, k_2, \dots, k_r) + \sum_{l=1}^{\infty} (\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_2, \dots, k_r, k_1 + l) + \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_2, \dots, k_r, k_1, l)) \mathbf{p}^{l-1} \right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) \\ &= \frac{k|\alpha|}{n} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k + 1) + \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \alpha} \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}^*(k_2, \dots, k_n, k_1, l) \mathbf{p}^{l-1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

有限多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式の左辺に現れる index は, 多重ゼータ (スター) 値の巡回和公式 (定理 1.1) の左辺に現れる index に一致している.

$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ とする. 定理 2.1 は次の定理の lift となっている.

定理 2.2 (K.-Oyama [3]). $\Pi(k, r)$ ($k \geq r > 0$) の任意の元 α に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \{ \zeta_{\mathcal{A}}(k_1 + 1, k_2, \dots, k_r) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_2, \dots, k_r, k_1 + 1) + \zeta_{\mathcal{A}}(k_2, \dots, k_r, k_1, 1) \} \end{aligned}$$

および

$$\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta_{\mathcal{A}}^*(k_1 - i, k_2, \dots, k_r, i + 1) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \alpha} \zeta_{\mathcal{A}}^*(k_2, \dots, k_r, k_1, 1)$$

が成り立つ.

謝辞

2019 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「多重ゼータ値の諸相」での講演機会をくださいました世話人の古庄英和先生 (名古屋大学) に心より感謝申し上げます. 本研究発表には, JSPS 科研費 JP19K23396 の支援を受けました.

参考文献

- [1] M. E. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. of Algebra*, **262** (2003), 332–347.
- [2] N. Kawasaki, Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values, Doctoral dissertation in Tohoku University, 2019.
- [3] N. Kawasaki and K. Oyama, Cyclic sum of finite multiple zeta values, *Acta Arithmetica*, to appear.
- [4] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, *Acta Arithmetica*, **123** (2006), 289–295.
- [5] J. Rosen, Asymptotic relation for truncated multiple zeta values, *J. Lond. Math. Soc.*, (2) **91**, 554–572.