

RAMネットワークDEAモデルについて

長崎大学・経済学部 丸山 幸宏 (Yukihiro Maruyama)
Faculty of Economics
Nagasaki University

1 はじめに

本論文では, 部分効率性のみでなく, 全体効率性を計測できるRAMネットワークDEAモデルを導入し, そのモデルの性質を調べる。

ネットワーク DEA モデルは, Fare, Grosskopf ([2], [3]) により導入され, さらに Lewis, Prieto ([4], [5]) により拡張された。ただしそれらはラディアル測定により効率値が求められている。一方 Tone and Tsutui ([6]) は非ラディアル測定の効率値をもつSBMネットワーク DEAを導入した。ただし, SBMモデルでは全てのデータは正の値であることが仮定されている。

本論文では, RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルを導入しその性質を調べる。RAM ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持ち, 入力もしくは出力に負のデータを含んでいても適用できることに注意する。

2 RAM ネットワーク DEA モデル

RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルを導入し, その部分効率性および, 全体効率性を定義する。

[諸記号 (図 1 参照)]

n : DMU の数, K : division の数,

m_k : division k への入力数, r_k : division k からの出力数,

D : division の全体, 1 から K まで番号付けされている,

(k, h) : division k から division h へのリンク (中間生産物),

$l_{(k, h)}$: リンク (k, h) における項目数,

S : 入力リンクを持たない division の全体, T : 出力リンクを持たない division の全体,

L : リンクの全体

$\mathbf{x}_j^k \in \mathbb{R}^{m_k}$: division k での DMU $_j$ への入力資源 ($k = 1, \dots, K$),

$\mathbf{y}_j^k \in \mathbb{R}^{r_k}$: division k での DMU $_j$ からの出力生産物 ($k = 1, \dots, K$),

$\mathbf{z}_j^{(k,h)} \in \mathbb{R}^{(k,h)}$: DMU_j の, リンク (k,h) 上での, division k からの入力資源
 =DMU_j の, リンク (k,h) 上での, division h への出力生産物
 ただし j は j 番目 ($j=1, \dots, n$) の DMU を表す。

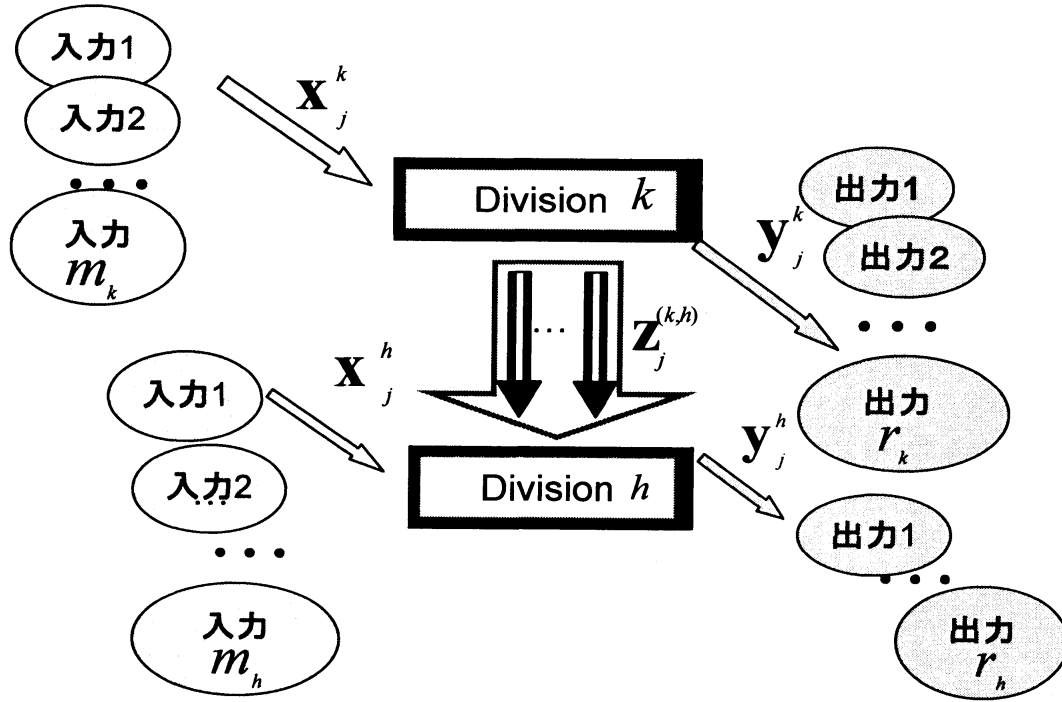


図1 DMU_jにおける諸記号

生産可能集合を下記で定義する： $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^{(p,k)}, \mathbf{z}^{(k,q)})\}$

$$\mathbf{x}^k \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^k \lambda_j^k \quad (k=1, \dots, K)$$

$$\mathbf{y}^k \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j^k \lambda_j^k \quad (k=1, \dots, K)$$

$$\mathbf{z}^{(p,k)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(p,k)} \lambda_j^k \quad (\forall (p,k)) \quad (\text{division } k \text{ へのインプットとしての制約})$$

$$\mathbf{z}^{(p,k)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(p,k)} \lambda_j^p \quad (\forall (p,k)) \quad (\text{division } p \text{ からのアウトプットとしての制約})$$

$$\mathbf{z}^{(k,q)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(k,q)} \lambda_j^q \quad (\forall (k,q)) \quad (\text{division } q \text{ へのインプットとしての制約})$$

$$\mathbf{z}^{(k,q)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(k,q)} \lambda_j^k \quad (\forall (k,q)) \quad (\text{division } k \text{ からのアウトプットとしての制約})$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 1 \quad (\forall k), \quad \lambda_j^k \geq 0 \quad (\forall j, k).$$

RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルは次で定義される：

$$\rho_o^* = \text{Max} \sum_{k=1}^K w^k \left[\frac{1}{m_k + s_k} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_{io}^{k-}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k} \frac{s_{ro}^{k+}}{R_r^{k+}} \right) \right],$$

$$\sum_{k=1}^K w^k = 1, w^k \geq 0 (\forall k), \quad (1)$$

制約条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_o^k &= \mathbf{X}^k \boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{s}_o^{k-} \quad (k = 1, \dots, K), \\ \mathbf{y}_o^k &= \mathbf{Y}^k \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{s}_o^{k+} \quad (k = 1, \dots, K), \\ \mathbf{Z}^{(k,h)} \boldsymbol{\lambda}^h &= \mathbf{Z}^{(k,h)} \boldsymbol{\lambda}^k \quad (\forall (k, h)), \\ \mathbf{e} \boldsymbol{\lambda}^k &= 1 \quad (k = 1, \dots, K), \\ \boldsymbol{\lambda}^k &\geq \mathbf{0}, \mathbf{s}_o^{k-} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s}_o^{k+} \geq \mathbf{0}, \quad (\forall k) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} R_i^{k-} &= \bar{x}_i^k - \underline{x}_i^k, i=1, \dots, m_k, \quad R_r^{k+} = \bar{y}_r^k - \underline{y}_r^k, r=1, \dots, r_k, \\ \bar{x}_i^k &= \text{Max} \{x_{ij}^k : j=1, \dots, n\}, \quad \underline{x}_i^k = \min \{x_{ij}^k : j=1, \dots, n\}, \\ \bar{y}_r^k &= \text{Max} \{y_{rj}^k : j=1, \dots, n\}, \quad \underline{y}_r^k = \min \{y_{rj}^k : j=1, \dots, n\}, \\ \mathbf{X}^k &= (\mathbf{x}_1^k, \dots, \mathbf{x}_n^k) \in \mathbb{R}^{m_k \times n}, \quad \mathbf{Y}^k = (\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_n^k) \in \mathbb{R}^{r_k \times n}, \\ \mathbf{Z}^{(k,h)} &= (\mathbf{z}_1^{(k,h)}, \dots, \mathbf{z}_n^{(k,h)}) \in \mathbb{R}^{t_{(k,h)} \times n}, \end{aligned}$$

ここで w^k は division k の相対的ウェイトである。本モデルは、Cooper 等 ([1]) により導入された RAM モデルの一般化モデルである。

問題(1)の最適解を $(\boldsymbol{\lambda}^{*k}, \mathbf{s}_o^{k-}, \mathbf{s}_o^{k+})$ とするとき、各DMU。 ($o=1, \dots, n$) に対して、全体効率性および部分効率性を次で定義する：

定義 1. (全体 RAM 効率性)

$$\begin{aligned} \Gamma_o^* &= \sum_{k=1}^K w^k \left(1 - \frac{1}{m_k + s_k} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k} \frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}} \right) \right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^K w^k \left[\frac{1}{m_k + s_k} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k} \frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}} \right) \right] = 1 - \rho_o^*. \end{aligned}$$

とおくとき、 Γ_o^* の値を全体RAM 効率性と呼ぶ。もし $\Gamma_o^* = 1$ ならば、DMU。は 全体RAM 効率的であると呼ばれる。

定義 2. (部分 RAM 効率性)

$$\Gamma_{ko}^* = 1 - \frac{1}{m_k + s_k} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k} \frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}} \right), k = 1, \dots, K.$$

とおくとき, Γ_{ko}^* の値を部分RAM効率性と呼ぶ。もし $\Gamma_{ko}^* = 1$ ならば, DMU_o division k でRAM 効率的であると呼ばれる。

3 RAM ネットワーク DEA モデルの性質

定義 3. (データ変換に対する不変性 ; W.W.Cooper, L.M.Seiford, and K.Tone [4])

DEA モデルは, 与えられた問題の入出力データを平行移動させても効率値が影響を受けないとき, データ変換に対する不変性を持つと呼ばれる。

定理 1. RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持つ。

問題 (1) の最適解 $(\lambda^{*k}, s_o^{k-*}, s_o^{k+*})$ を用いて, 各DMU_oの効率的フロンティア上への射影を次で定義する :

$$\begin{aligned} x_o^{k*} &\leftarrow x_o^k - s_o^{k-*} \quad (k = 1, \dots, K), \\ y_o^{k*} &\leftarrow y_o^k + s_o^{k+*} \quad (k = 1, \dots, K), \\ z_o^{(k,h)*} &\leftarrow Z^{(k,h)} \lambda^{k*}. \quad (\forall (k, h)). \end{aligned}$$

定理 2. 各DMU_oの効率的フロンティア上への射影は全体効率的である。

定義 4. 各DMU_oのdivision k における参照集合を次で定義する :

$$R_o^k = \{j | \lambda_j^{k*} > 0\} (j \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

参照集合を用いて各DMU_oの活動 (入出力) は次のように表される :

$$x_o^k = \sum_{j \in R_o^k} x_j^k \lambda_j^{k*} + s_o^{k-*}, \quad y_o^k = \sum_{j \in R_o^k} y_j^k \lambda_j^{k*} - s_o^{k+*}.$$

例 1. 本例では, 各DMU_jが, 図 2 のような入出力のネットワーク構造をもつ問題を取り扱う。3つの division をもち, 各 division は各々独自の入力, 出力をもち, さらにそれらは 2つのリンクで結合され, リンク上のインプット (でありかつアウトプットでもある) をもつ。表 1 は各 division およびリンクにおける入出力データを表す。Division 2 の入力 2 および division 3 の出力 3 の一部において負値のデータが存在することに注意する。従って表 1 のデータに Tone, Tsutsui [6] による SBM ネットワーク DEA モデルは (同モデルのデータは全て非負であることが仮定されているので) 適用できない。しかし, 本論文で提案した RAM ネットワーク DEA モデルは適用可能である。まず表 1 のデータの Division 2 の入力 2 および division 3 の出力 3 に一律に 3 を加えると表 2 (この表におけるデータは Tone, Tsutsui [6] の Table 5 と同じものである) が得られる。表 2 のデータに RAM ネットワークモデルを適用すると, 表 3 の全体効率値及び部分効率値 (RAM 効率性) が得られる (表 3 には比較のため Tone, Tsutsui [6] が表 2 のデータに対して求めた SBM 効率値を併記している)。データ変換に対する不変性より, 表 2 のデー

タに RAM ネットワーク DEA モデルを適用しても同じ効率値が得られる (が, 一方 SBM ネットワーク DEA モデルは適用できない) ことに注意する。

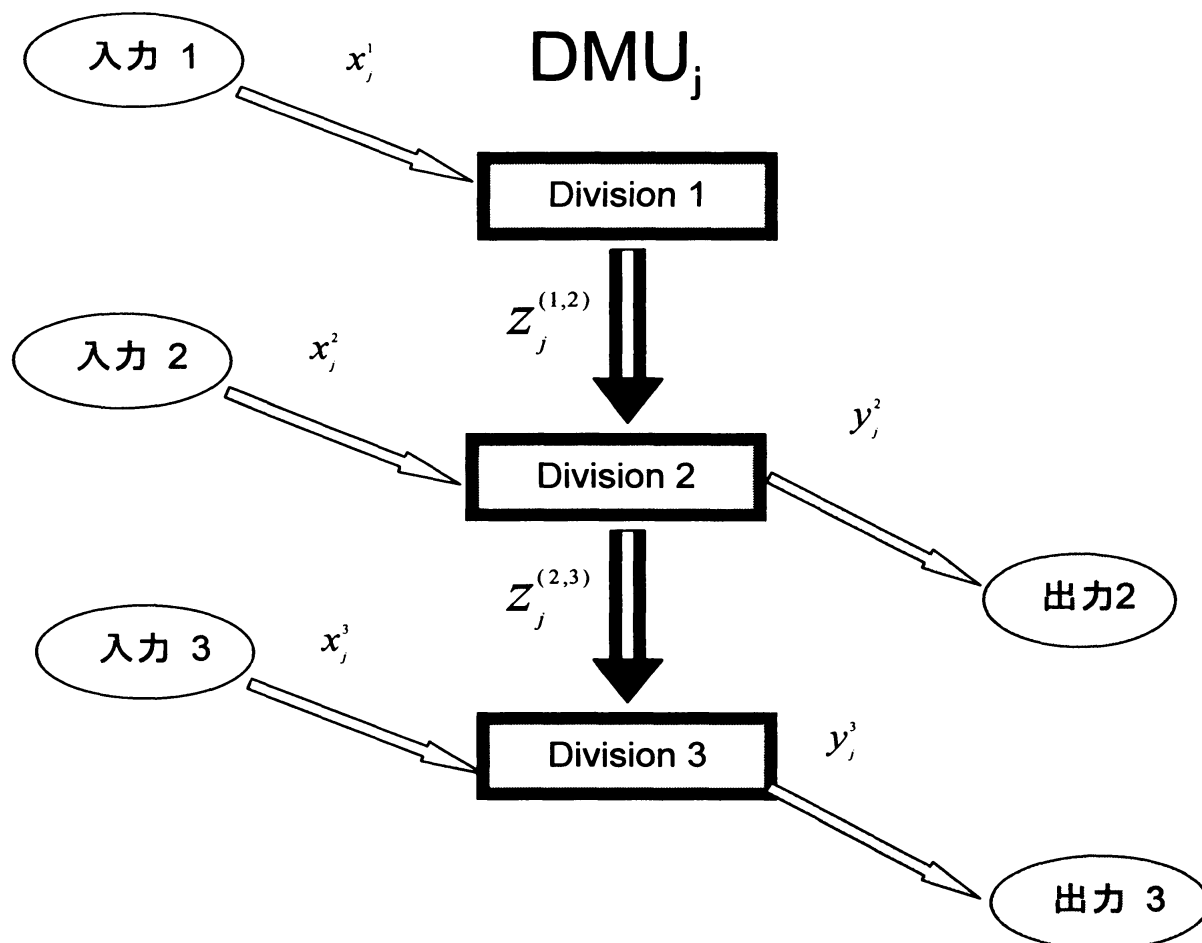


図 2 DMU におけるネットワーク構造

表 1 各 division, リンクにおける入出力データ

	Div 1	Div 2		Div 3		リンク	
DMU	入力 1	入力 2	出力 2	入力 3	出力 3	(1, 2)	(2, 3)
A	3	7	2	5	-1	8	2
B	14	-2	1	5	2	9	5
C	16	-1	2	11	1	7	4
D	19	-2.5	2	7	1	11	4

表 2 変換された入出力データ(Tone, Tsutsui [6], Table 5)

	Div 1	Div 2		Div 3		リンク	
DMU	入力 1	入力 2	出力 2	入力 3	出力 3	(1, 2)	(2, 3)
A	3	10	2	5	2	8	2
B	14	1	1	5	5	9	5
C	16	2	2	11	4	7	4
D	19	0.5	2	7	4	11	4

表 3 全体効率値および部分効率値

DMU	全体効率値		Div1 (0.4)		Div2 (0.2)		Div3 (0.4)	
	RAM	SBM	RAM	SBM	RAM	SBM	RAM	SBM
A	0.78	0.71	1	0.875	0.56	0.2	0.67	0.8
B	0.86	0.672	0.65	0.368	1	0.625	1	1
C	0.47	0.299	0.19	0.258	0.981	0.25	0.5	0.364
D	0.93	0.515	1	0.217	1	1	0.83	0.571

4 今後の課題

本論文では、RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルを導入し、その性質を調べた。すなわち RAM ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持ち、この性質により、同モデルは入力もしくは出力に負のデータを含んでいる問題にも適用できることを例示した。

財務分析において、負値のデータを含む問題が多く見られる。例えば永田[7]により構築された、CFROA 分析において、負値の営業キャッシュ・フローをもつ企業が頻出する。そのような企業も含めた、RAM ネットワーク DEA モデルによる財務分析を今後の研究課題とする。

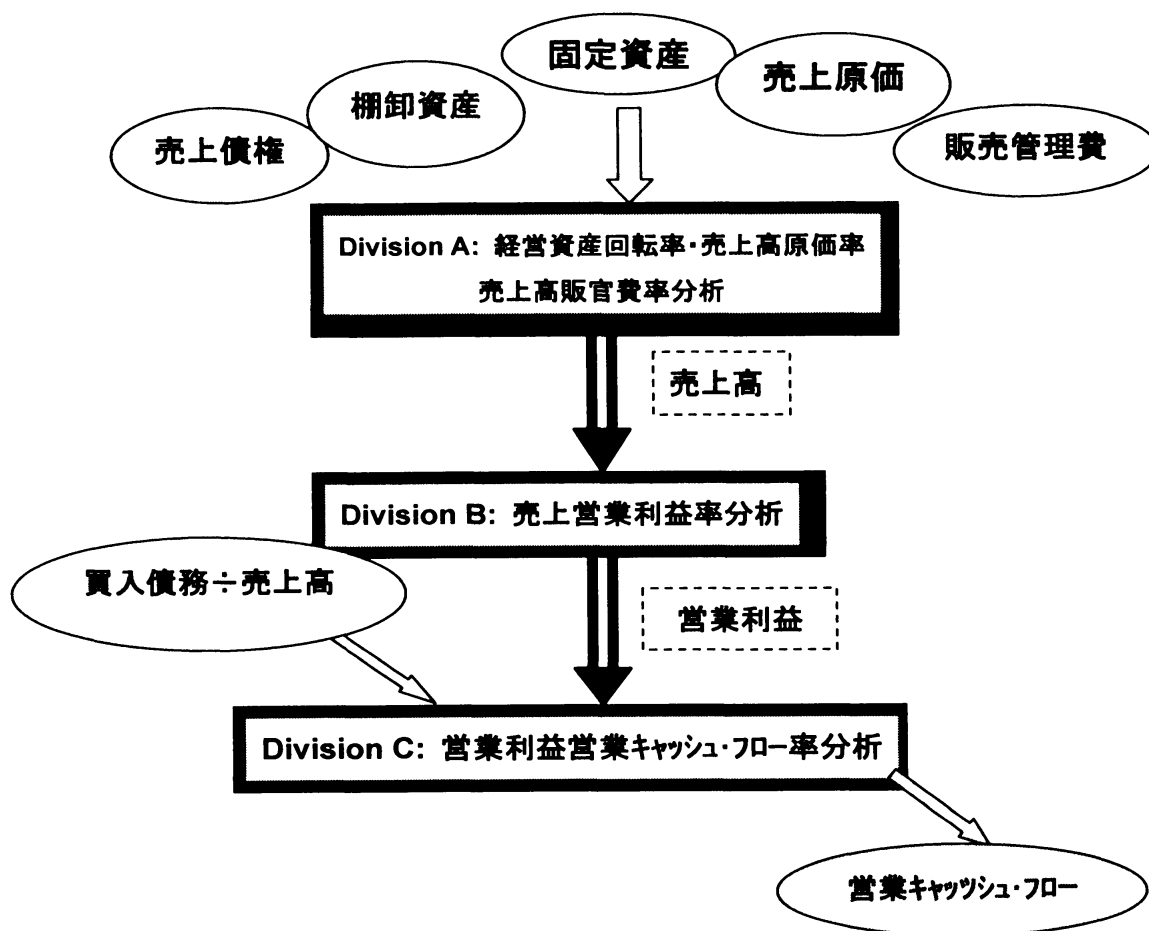


図3 CFROA分析のネットワーク構造（永田[7]）

参考文献

1. W.W. Cooper, K.S. Park and J.T. Pastor, "RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measures in DEA", *Journal of Productivity Analysis* **11**, pp.5-12 (1999).
2. R. Färe and S. Grosskopf, *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
3. R. Färe and S. Grosskopf, "Network DEA", *Socio-Economic Planning Sciences* **34**, pp.35-49 (2000).

4. H.F. Lewis and T.R. Sexton, "Network DEA: efficiency Analysis of organizations with complex internal structure", *Computers & Operations Research* **31**, pp.1365-1410 (2004).
5. A.M. Prieto and J.L. Zofio, "Network DEA efficiency in input-output models: With an application to OECD countries", *European Journal of Operational Research* **178**, pp. 292-304 (2007).
6. K. Tone and M. Tsutsui., "Network DEA, A slack-based measure approach", Discussion Paper, 07-08, GRIPS Policy Information Center, pp.1-36 (2008).
7. 永田吉朗, 「財務分析の限界とネットワーク DEA による改善に関する一考察」, 長崎大学大学院経済学研究科経営学博士学位論文, (2009).