

p 進クラス 1 Whittaker 関数について

京大教養 加藤 信一 (Shin-ichi Kato)

1° 標題のクラス 1 Whittaker 関数は、保型形式の Fourier 係数と関連する、代数群上の“特殊関数”である。

以下、どのような関数であることを説明しよう。はじめに

$K =$ 非アルキメデス的局所体

$\mathcal{O} =$ 整数環 $\Rightarrow \pi =$ 素元, $q = \# \mathcal{O} / \pi \mathcal{O}$

$G =$ 連結簡約群 / K (の K -有理点のなす位相群
 $G(K)$ と G を同一視する)

但し K は split, $G/\mathbb{Z}$ と仮定しておく。

$K = G(\mathcal{O})$ G の極大コンパクト部分群

$B = G$ の Borel 部分群 $\supset A = G$ の極大トーラス
 $\supset N = G$ の極大中単群

と置く。

まず、 N の 1 次元表現 $\psi: N \rightarrow \mathbb{C}^*$ を 1 つ固定する。

次に

$$H(G, K) = \{ \varphi: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi \text{ は両側 } K\text{-不変} \\ \text{(ii) } \varphi \text{ の値は } \mathbb{Z}[1/p]\text{-乗数} \end{array} \}$$

と置く。 $H(G, K)$ は右にみれば積 $*$ により可換 $\mathbb{C}$ -代数となる (G の K に關する Hecke環)。但し

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(g) = \int_G \varphi_1(gx^{-1}) \varphi_2(x) dx$$

(dx は $\text{vol}(K) = 1$ なる G の Haar 測度)。

是より $\mathbb{C}$ -代数準同型 $\omega: H(G, K) \rightarrow \mathbb{C}$ を1つ選んで置く。

定義. G 上の函数 W が (ω, ψ に關する) クラス 1 Whittaker 函数 (または不分岐 Whittaker 函数) であるとは、 W が次の (i) ~ (iii) を満たすことをいう。

- (i) $W(gk) = W(g) \quad (\forall k \in K)$
- (ii) $W(ng) = \psi(n) W(g) \quad (\forall n \in N)$
- (iii) $W * \varphi = \omega(\varphi) W \quad (\forall \varphi \in H(G, K))$ ■

±2. 加法的指標 $\bar{\psi}: K \rightarrow \mathbb{C}^*$ を $\bar{\psi}|_O \equiv 1$, $\bar{\psi}|_{\pi^{-1}O} \neq 1$ なるものを1つ用意する。 $N \supset N_\alpha$ をルート部分群となるやうな時 (α は (G, A) の正ルート), $\exists \chi_\alpha: K \xrightarrow{\sim} N_\alpha$ ($\mathbb{Z}$ 上同型), なる様に

$$N / (N \text{ の 交換子群}) \cong \prod N_\alpha \quad (\alpha \text{ は 単純ルートに達する})$$

が成り立つ。よって、 N_α 上 $\psi|_{N_\alpha} = \bar{\psi} \circ X_\alpha^{-1}$ となるような 1 次元表現 $\psi: N \rightarrow \mathbb{C}^*$ が唯一に定まる。以下、この ψ についてのみ考える。また、 G, A の dual group をそれぞれ ${}^L G, {}^L A$ (${}^L G$ は $\mathbb{C}$ 上の連結簡約群で ${}^L A$ はその極大トーラス) とするとき、 $\mathbb{C}$ -代数準同型の全体は ${}^L G$ の半単純共役類でパラメトライズされることが知られている (佐武)。これより $s \in {}^L A$ に対応する準同型を ω_s と書くことにする。

半単純元 $s \in {}^L A$ に対し

$$WH(\psi, s) = \psi, \omega_s \text{ に関するクラス (Whittaker}$$

函数全体のなすベクトル空間) / $\mathbb{C}$

と表す。Whittaker 函数の性質 (i) (ii) は岩澤分解,

$G = NAK$ より $W \in WH(\psi, s)$ は A 上の (正確には $A \bmod A \cap K$ 上の) 値で一意的に定まることからわかる。

更に、一般に $A/A \cap K \xrightarrow{\lambda} X({}^L A)$ (${}^L A$ の指標群) なのだが、今 $\psi: N \rightarrow \mathbb{C}^*$ を上記のように定めたことから、 $W(a) \neq 0$ ($a \in A$) なる、 $\lambda(a) = \lambda(a \bmod A \cap K) \in X({}^L A)$ は dominant ということが直ちにわかり、最終的には次の定理が示される。

定理. (i) (multiplicity 1) $\dim. WH(\psi, s) = 1$.

(ii) (explicit formula) $s \in {}^L A$ に対して G 上の関数

$$W_s \in WH(\psi, s)$$

$$W_s(nak) = \begin{cases} \psi(n) \delta^k(a) \chi_{\lambda(a)}(s); & \lambda(a) \text{ dominant とき} \\ 0; & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$(n \in N, a \in A, k \in K)$$

と決くと, $W_s \in WH(\psi, s)$. 但し

$\chi_\lambda = \text{dominant } \lambda \text{ を最高ウェイトに持つ } {}^L G \text{ の既約指標}$

$\delta: B \rightarrow \mathbb{C}^*$ は B の modulus character ■

定理は $G = GL_n$ の場合 [S], $G \neq E_8$ の場合, [K], 独立に, より強く split とは限らず $G = \text{unramified}$ の場合 [CS] による。但し [CS] には (ii) はない。
([K] の (ii) の証明は [S] を一般化した, 差分方程式を用いるもので, split とは限らず成立。)

2° クラウス 1 Whittaker 関数は, 保型形式の Fourier 係数の “一般化” であるから, これを用いた L 関数の構成が期待される (e.g. 解説記事 [Bu] を見よ)。例えば, 最も安直に考えて, “Mellin 変換”

$$\int_{A_0} W_s(a) |\mu(a)|^\sigma da \quad \left(\begin{array}{l} \sigma \in \mathbb{C} \text{ は } 103 \times 7- \\ A_0 \text{ は } A \text{ の 適当な} \\ \text{部分トーラス} \\ \mu: A_0 \rightarrow \mathbb{R}^\times \end{array} \right)$$

が、局所 L 因子 $L(q^{-\sigma}, \pi, s) = \det(1 - q^{-\sigma} \pi(s))^{-1}$
 (π は、 ${}^L G$ の有限次元表現) で表わさるだろうか? ここで
 指標群 $X({}^L A)$ の群環を $R = \mathbb{C}[X({}^L A)]$ とおき、
 その Weyl 群 W 不変元全体を R^W とおくと、既約指標
 $\chi_\lambda \in R^W$ であり、また不定元 t に対して、 $L(t, \pi)$
 $= \det(1 - t \cdot \pi)^{-1} \in R^W[[t]]$ でもある。
 ($L(t, \pi)^{-1} \in R^W[[t]]$ に注意。) ことより、上の
 “期待” は、Hecke 収数と呼ばれる形式的収数

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda \text{ は dominant}} \chi_\lambda \cdot t^{n(\lambda)} \quad \left(\begin{array}{l} \Lambda \text{ は } X({}^L A) \text{ の 適当な} \\ \text{部分格子で } n: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z} \\ \text{は準同型} \end{array} \right)$$

が $L(t, \pi)$ を表すことより得るが、という純粹
 に組合せ論的の問題になる。そこで簡単な場合、 $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda$
 (λ は dominant), $n(\lambda) = 1$ の場合を考えてみよう。

$$HS(t, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \chi_{n\lambda} \cdot t^n \in R^W[[t]]$$

と置く。一般の λ に対しては、この収数が良い性質を持つ
 ことを期待できないが、特別な、しかし重要な場合には、

次がわかる。(HS(t, λ) の有理性は自明。)

命題. G を半単純古典群, $\lambda \in {}^L G$ の基本ウエイトで
 λ を最高ウエイトに持つ ${}^L G$ の既約表現の 0 以外のウエイト
 は W -共役となるものとする。この時, $\exists M \in \mathbb{N}$,
 $\exists \varepsilon = \pm 1$ が存在して "函数等式"

$$HS(t^{-1}, \lambda) = \varepsilon \cdot t^{M+1} HS(t, \hat{\lambda})$$

が成立する。ここで $\hat{\lambda}$ は λ の反逆表現 ■

上の ε, M は具体的に求まる。命題は両方古典群 G と
 主として適当な modification の後に成立する。又、上記以外の
 ウエイトで、同じ形の命題が成り立つ場合もある。命題の
 証明は多変数 Hecke 代数の場合 ([0] Appendix の筆者の証
 明を見よ) と同様。

系. 命題の仮定の下で

$$HS(t, \lambda) = Q(t, \lambda) L(t, \pi_\lambda) \quad (Q(t, \lambda) \in R^w[t])$$

と分解され, "分子" $Q(t, \lambda)$ は

$$Q(0, \lambda) = 1, \quad \deg Q(t, \lambda) = \dim \pi_\lambda - (M+1)$$

$$Q(t^{-1}, \lambda) = \varepsilon \cdot (-1)^{\dim \pi_\lambda} t^{(M+1) - \dim \pi_\lambda} Q(t, \hat{\lambda})$$

を満たす ■

例. (A) $G = \mathrm{PGL}(n) \quad {}^L G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = k \text{ 外誘表現, } \dim \pi_\lambda = \binom{n}{k} \end{array} \right\}$$

この時. $M = n-1$, $\varepsilon = (-1)^{k(n-1)+1}$. ゆえに.

$Q(t, \lambda)$ は $\binom{n}{k} - n$ 次. 例えは $k=1$ ($\mathrm{SL}(n)$ の自然表現) ならば

$$Q(t, \lambda) = 1, \quad HS(t, \lambda) = L(t, \pi_\lambda).$$

($k \geq 2$ だと $\deg Q$ が大きくなり, 一般に $\geq a$ data だと Q が決定されない.)

(B) $G = \mathrm{PSp}(2n) \quad {}^L G = \mathrm{Spin}(2n+1, \mathbb{C})$

(i) $\lambda = \mathrm{SO}(2n+1)$ の自然表現. $\dim \pi_\lambda = 2n+1$.

この時. $M = 2n-3$, $\varepsilon = -1$. ゆえに

$$Q(t, \lambda) = 1-t^2, \quad HS(t, \lambda) = (1-t^2)L(t, \pi_\lambda).$$

(ii) $\lambda = \Sigma^0$ 表現 $\dim \pi_\lambda = 2^n$

この時. $M = 2n-1$, $\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$. ゆえに

$$Q(t, \lambda) = \begin{cases} 1 & (n \leq 2) \\ 1-t^2 & (n=3) \end{cases} \left[\text{cf. Bump: Generic Spin } L \text{ for } \mathrm{Sp}(b) \right]$$

この場合も一般には $\deg Q = 2^n - 2n$ であり, $\geq a$ data だけでは Q が決定されない.

(C), (D) も同様.

という思存に、局所的にはいくつかの場合で、Whittaker 関数の Hecke 級数を用いて "L 関数" が構成されることばかり。 (もっともこれは既知の結果の焼き直し、計算の工夫のみになるかも知れないが。) 最後に、Whittaker 関数の代りに帯球関数を用いて Hecke 級数から "L 関数" を構成した [Bo] に注意したい。このような種々の Hecke 級数からどのような "L 関数" が得られるかを知らなくては、表現論 (古典的)、恒等式論とも関係して (cf. [Bu] にある Littlewood - MacMahon の公式) 興味深いのではないかと思われる。

References.

- [Bo] S. Böcherer : Ein Rationalitätssatz für formale Heckealgebren zur Siegelischen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56 (1986), 35-47.
- [Bu] D. Bump : The Rankin-Selberg method: A survey, in: Number Theory, Trace formulas and Discrete Groups, Academic Press, 1989, pp.49-109
- [CS] W. Casselman and J. Shalika : The unramified principal series of p-adic groups II: The Whittaker function, Compositio Math. 41(1980), 207-231.
- [K] S. Kato : On an explicit formula for class-1 Whittaker functions on split reductive groups over p-adic fields, preprint, University of Tokyo (1978)
- [O] T. Oda : Multiple Hecke series for class-1 Whittaker functions on $GL(n)$ over p-adic fields, in: Analytic Number Theory Springer Lecture Notes in Math. 1434
- [S] T. Shintani : On an explicit formula for class-1 'Whittaker functions' on $GL(n)$ over p-adic fields, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 180-182.