

数理計画法を用いたレベルセット法に基づくトポロジー最適化*

乙守正樹^{*1}, 山田崇恭^{*2}, 泉井一浩^{*1}, 西脇眞二^{*1}

Topology optimization based on the level set method using mathematical programming

Masaki OTOMORI^{*1}, Takayuki YAMADA, Kazuhiro IZUI and Shinji NISHIWAKI

^{*1} Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

Several level set-based topology optimization methods have been recently proposed in which the boundaries of the optimal configuration are implicitly represented using the level set function. These methods naturally overcome numerical instability problems such as grayscale areas that typically appear in conventional topology optimization results. However, since most of them update design variables by solving certain partial differential equations, they lack the flexibility to deal with various constraints. This paper proposes a level set-based topology optimization method using mathematical programming, which facilitates the handling of optimization problems that have several constraint functionals. The level set function is updated using the Method of Moving Asymptotes (MMA), based on the sensitivities of the objective and constraint functionals. First, topology optimization using level set boundary expressions based on the concept of the phase field method is explained, and a new optimization algorithm for updating the level set function using mathematical programming is then developed. To confirm the validity and utility of our method, we apply it to multi-constraint optimization problems such as a minimum mean compliance problem that includes a stress constraint, and the design of compliant mechanisms including a displacement constraint.

Key Words : Level Set Method, Topology Optimization, Optimal Design, Structural Design, Structural Analysis, Sensitivity Analysis, Finite Element Method

1. 緒 言

トポロジー最適化⁽¹⁾⁽²⁾は、構造の形状だけでなく、穴の数などの形態の変更も可能とする最も設計自由度が高い構造最適化の方法である。この方法の基本的な考え方は、構造最適化問題を指定した領域内における材料分布問題への置き換えにある。この材料分布問題への置き換えにより、形態の変更を可能とする構造最適化が行えるが、その反面、数学的には、得られる最適構造が至るところで不連結となる可能性をもついわゆる不適切な最適化問題となる。この問題を解決するためには、何らかの正則化の方法を必要とする。従来までに、その方法として、均質化法に基づく手法⁽¹⁾や、SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法⁽²⁾が提案されている。しかし、これらの方法では、基本的には0から1までの値をとる連続した密度を設計変数とするため、密度が中間値をとるいわゆるグレースケールを許容することになる。そのようなグレースケールで構成される構造は、多孔質状態として解釈可能であるものの、実際には、構造が非常に複雑になり製造が困難になるため、工学的には意味を持たない構造と言える。このグレースケールは、剛性最大化問題のような、静的な釣合状態において、大域的な評価尺度である平均コンプライアンスを最小化する最適化問題においては、弾性テンソルと密度の関係にペナルティを付加することより除去することはでき、多孔質状態など製造が困難な構造への解釈が必要のない工学的に意味の

* 原稿受付 2011 年 4 月 11 日

^{*1} 正員, 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻 (〒 464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町)

ある最適構造が得られる。

しかしながら、実際の構造設計においては、剛性を考慮するだけでは十分ではなく、応力などの物理量の考慮が必須課題となっている。このような要求に対して、応力を考慮可能な方法論^{(3)~(7)}が幾つか報告されている。しかし、いずれの方法においても、グレースケールを完全に除去した工学的に意味のある最適構造を得るには至っていない。さらに、トポロジー最適化を構造設計問題以外の問題、例えばコンプライアントメカニズムの最適設計問題^{(8) (9)}に適用した場合には、現実的な性能を得るためにメカニズムの変形条件等に関して多くの制約を課す必要がある⁽¹⁰⁾。しかし、この場合にも、制約条件が多くなるにつれてグレースケールを生じ易い。

以上のように、トポロジー最適化により、現実的な性能要件を満足する最適構造を得るためには、多くの制約条件を考慮しなければならない場合が多いが、その際には、グレースケールを多く含む工学的に解釈の難しい最適構造を得ることが多いうえ、ほとんどの場合、上述のペナルティの付加を行っても除去できない問題点をもつ。

これに対して、近年、レベルセット法による形状表現に基づく新しい方法論^{(11)~(13)}が提案されている。この方法では、レベルセット関数のゼロ等位面により物体の外形形状を陰的に表現するため、上述のグレースケールを本質的に除去できる特長をもつ。例えば、Wei・Wang⁽¹¹⁾は、レベルセット関数が区分的に一定値となるように制約を与えることにより、穴の数が増加する方向への形態変化を可能とする方法を提案している。しかし、この方法は、レベルセット関数に与える制約のパラメータの値に最適構造が大きく依存する問題点をもつことが報告されている。これに対して、山田ら^{(12) (13)}は、同じく区分的に一定値となるレベルセット関数を用いながらも、チコノフ正則化法により最適化問題の正則化を行う方法を提案している。この方法は、初期構造に対する最適構造の依存が低く、さらに、正則化の度合いを設定することにより、最適構造の複雑さを定性的に設定可能としている。しかし、この方法では、フェーズフィールド法の考え方から導出される反応拡散方程式を解くことにより、レベルセット関数を更新するため、多くの制約汎関数を取り扱う最適化問題の場合は、その定式化が困難なうえ、多くの制約のある問題を効率よく解くことも難しい問題点をもつ。

他方、レベルセット法に基づく構造最適化手法^{(14) (15)}に基づき、応力制約を考慮した方法^{(16) (17)}や応力最小化を目的とする方法⁽¹⁸⁾も報告されている。しかし、これらの方法は、レベルセット関数のゼロ等位面により示す外形形状のみの変更により最適構造を得るいわゆる形状最適化の考え方により方法論の構築を行っており、形態変更を許容した場合の最適構造を得るには至っていない。

そこで本研究では、上で述べたトポロジー最適化において複数の制約条件を取り扱う場合に生じる問題を解決するため、山田らの方法^{(12) (13)}に基づき、数理計画法を用いてレベルセット関数を更新する新しい方法を構築する。すなわち、最適化問題において、複数の制約条件をも簡易に取り扱えるように、数理計画法の一手法である MMA (Method of Moving Asymptotes)⁽¹⁹⁾を用いてレベルセット関数を更新可能な最適化アルゴリズムとその実装法を提案する。以下、2章ではレベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化手法の概略を述べ、応力制約を含む最適化問題、コンプライアントメカニズムの最適設計問題の定式化を行う。3章では、前章の定式化に基づいた数値実装法について説明を行う。最後に、本報で提案する手法を、応力制約を含む平均コンプライアンス最小化問題、変位制約を含むコンプライアントメカニズムの最適設計問題に適用し、妥当性と有効性を検証する。

2. 定 式 化

2.1 レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化

ここでは、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化^{(12) (13)}の考え方について、簡単に説明する。物体領域 Ω と空洞領域で構成される固定設計領域 D における構造最適化を考える。レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化では、図 1 に示すように、レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて、固定設計領域 D 内の物体領域 Ω と境界 $\partial\Omega$ を陰的に表現する。すなわち、次式に示すように、レベルセット関数の等位面により、物体領域 Ω と境界 $\partial\Omega$ を表現する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

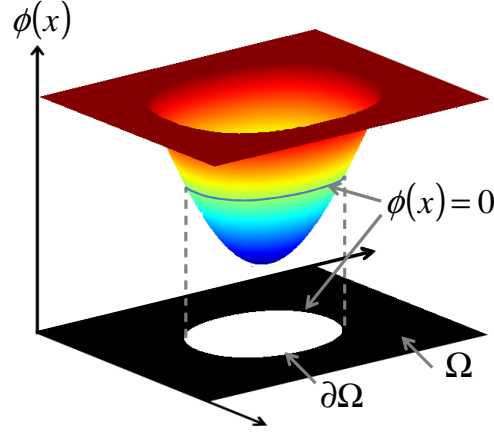


Fig. 1 Fixed design domain D and level set function ϕ

次に、式 (1) のレベルセット関数による形状表現を用いて、構造最適化問題は、目的汎関数を F 、体積制約に関する制約汎関数を G_1 として、以下のように記述される。

$$\inf_{\phi} F(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2)$$

$$\text{subject to } G_1(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (3)$$

ここで、 $V_{\max}$ は許容される体積の上限値である。上式の最適化問題では、レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ が固定設計領域 D 内の到る所で不連続となることを許容している。そのため、最適化問題を何らかの方法で正則化する必要がある。本研究では、山田らの方法⁽¹²⁾⁽¹³⁾に基づき、チコノフの正則化法を用いて最適化問題の正則化を行う。

$$\inf_{\phi} F_R(\Omega(\phi), \phi) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 d\Omega \quad (4)$$

ここで、 τ は正則化の度合を示すパラメータである。

本研究では、上式の最適化問題を数値計画法の一手法である MMA を用いて解く。MMA は、一種の凸関数近似法で、最適化問題が凸性を持つように目的関数、制約関数を凸関数を用いて近似し、近似された最適化問題を各ステップで解く方法である。式 (4) の最適化問題を解くために必要な目的汎関数 F_R の感度は、以下の式を用いて求められる。

$$\left\langle \frac{dF_R}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle = \left\langle \frac{dF}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle - \int_D \tau \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \delta\phi d\Omega \quad (5)$$

ここで、 $\langle dF_R/d\phi, \delta\phi \rangle$ は目的汎関数 F_R のフレシェ微分を表す。

2.2 応力制約を考慮した平均コンプライアンス最小化問題

ここでは、複数の制約条件を考慮すべき最適設計問題として、応力制約を考慮した平均コンプライアンス最小化問題を考える。応力制約の付加の方法については、現在までに幾つかの方法論が提案されており、大別すると、局所的な制約を与える方法⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁷⁾と大域的な制約を与える方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁷⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾、その二つを組み合わせた方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾に分類される。局所的な制約を与える方法では通常、各有限要素の中心の位置の応力に制約を与える。そのため、有限要素の数だけ制約を与えることになり、最適化計算の計算量が膨大になる。一方、大域的な制約関数を与える方法では、局所的な応力制約を一つの制約関数に置き換えて制約を与える。そのため、厳密には局所的な応力制約を満たさない場合があるが、制約の数が一つとなるため、最適化計算の計算時間を大幅に削減することができる。Martins・Poon⁽⁴⁾や Paris ら⁽⁵⁾⁽⁷⁾は、指数関数を用いて、局所的な応力制約を違反した場合にペナルティを与え、局所的な応力制約を足し合わせて一つの制約関数としている。Martins・Poon⁽⁴⁾はさらに、局所的な応力制約を違反した場合に与えるペナルティの大きさを決めるパラメータを最適化計算の過程でアダプティブに増加させること

で、大域的な制約の精度を良くしている．それに対して、Guo ら⁽¹⁶⁾は、応力の値が最大となる点にのみ応力制約を与え、Xia ら⁽¹⁷⁾は、局所的な制約を違反した点のみ考慮して応力制約を与えているため、最適化計算の収束性が悪化する．また、局所的な応力制約と大域的な応力制約を組み合わせた手法である Block aggregation アプローチでは、固定設計領域をいくつかのブロックに分割し、各ブロックにおいて大域的な制約を与えており、制約の数がブロックの数と同じとなる．

本研究では、計算時間を削減するため、大域的な応力制約を考える．また、実装の容易性から Paris ら⁽⁵⁾⁽⁷⁾の方法に基づき、大域的な応力制約をレベルセット法を用いたトポロジー最適化に適用する．応力制約を考慮した平均コンプライアンス最小化問題は次式で与えられる．

$$\inf_{\phi} F(\Omega(\phi)) = l_1(\mathbf{u}) \quad (6)$$

$$\text{subject to } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_1(\mathbf{v}) \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in U, \mathbf{u} \in U \quad (7)$$

$$G_1(\Omega(\phi)) \leq 0 \quad (8)$$

$$G_{\text{global}}(\mathbf{u}, \phi) = \tilde{G}_{\text{global}}(\sigma_{\text{VM}}(\mathbf{u}), \phi) \leq 0 \quad (9)$$

上式中の各表記は以下で表わされる．

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (10)$$

$$l_1(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}_{\text{in}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (11)$$

$$\tilde{G}_{\text{global}}(\sigma_{\text{VM}}(\mathbf{u}), \phi) = \frac{1}{\mu} \ln \left[\int_{\Omega} e^{\mu(\sigma^* - 1)} d\Omega \right] - \frac{1}{\mu} \ln \left(\int_{\Omega} d\Omega \right) \quad (12)$$

ここで、線形弾性体で、物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域を D とし、境界 Γ_u を完全拘束し、境界 Γ_1 に表面力 $\mathbf{t}_{\text{in}}$ 、物体領域 Ω に物体力 $\mathbf{b}$ が作用したときの変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とする．また、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、 $\mathbf{E}$ は弾性テンソル、 U は以下の式で定義される変位関数空間である．

$$U = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (13)$$

さらに、式 (12) の σ^* は次式で表される．

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{\text{VM}}}{\sigma_{\text{max}} \psi_e} \quad (14)$$

ここで、 σ_{VM} は、Von Mises 応力、 σ_{max} は局所的に与える応力制約の値で、式 (12) の μ は、局所的に与えた応力制約値 σ_{max} を違反した応力に対する制約の大きさを決定するパラメータである．また、 ψ_e は応力制約を緩和するための係数で以下の式で与えられる．

$$\psi_e = 1 - \hat{\varepsilon} + \frac{\hat{\varepsilon}}{H(\phi)} \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\varepsilon}$ は、緩和の大きさを調節するパラメータである．また、 $H(\phi)$ は変位場の近似解法に用いるヘビサイド関数で、3.2 節にて後述する．

次に、平均コンプライアンスの感度は、随伴変数法を用いて、次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dF}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \end{aligned} \quad (16)$$

この場合の随伴変数場は以下で定義される．

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = l_1(\mathbf{u}) \quad \text{for } \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in U \quad (17)$$

また、応力制約の感度は、随伴変数法を用いて以下の式で求められる．

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dG_{\text{global}}}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \tilde{G}_{\text{global}}}{\partial \sigma_{\text{VM}}}, \delta\sigma_{\text{VM}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{G}_{\text{global}}}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \tilde{G}_{\text{global}}}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

この場合、随伴変数が以下の式を満たすよう随伴問題を設定する。

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{G}_{\text{global}}}{\partial \sigma_{\text{VM}}}, \delta \sigma_{\text{VM}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = 0 \quad (19)$$

2.3 コンプライアントメカニズム最適設計問題

次に、コンプライアントメカニズムの最適設計問題を考える。コンプライアントメカニズムに要求される機能は、(1) 表面力を作用したときに、所望の変形が得られるための柔軟性と、(2) 表面力を作用したときにも形状が維持されるための十分な剛性、(3) ワークピースからの反力が作用した場合にも形状が維持されるための十分な剛性である。本研究ではさらに、特定の方向の変位量の抑制をするための制約を付加する場合を考える。なおここでは、問題の簡略化のため設計領域に作用する物体力がないものとする。上の機能を満足する最適構造を得るため最適設計問題を定式化すると、以下のように記述できる。定式化の詳細は山田ら⁽²⁰⁾の文献を参照されたい。

$$\inf_{\phi} F(\Omega(\phi)) = -l_2(\mathbf{u}_1) \quad (20)$$

$$\text{subject to } a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + s_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = l_1(\mathbf{v}) \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in U, \mathbf{u}_1 \in U \quad (21)$$

$$a(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}) = l_1(\mathbf{v}) \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in U, \mathbf{u}_3 \in U \quad (22)$$

$$G_1(\Omega(\phi)) \leq 0 \quad (23)$$

$$G_2(\Omega(\phi)) = [l_3(\mathbf{u}_3)]^2 - \varepsilon_0^2 \leq 0 \quad (24)$$

上式中の各表記は以下の式で定義される。

$$s_2(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_2} (\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (25)$$

$$l_2(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}_{\text{out}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (26)$$

$$l_3(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{t}'_{\text{out}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (27)$$

ここで、 l_2 は所望の変形方向を表現するダミーベクトル $\mathbf{t}_{\text{out}}$ に対応する相互平均コンプライアンスで、構造の柔軟性を表わす尺度である。境界 Γ_1 に表面力 $\mathbf{t}_{\text{in}}$ が作用し、(3) の要求を得るために出力側の境界 Γ_2 にばね定数 $\mathbf{k}_{\text{out}}$ のばねを付加したときの変位ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とする。また、 $\mathbf{u}_3$ は、境界 Γ_1 に表面力 $\mathbf{t}_{\text{in}}$ を負荷し、境界 Γ_2 にばねを付加しない場合の変位場である。 G_2 は、変位量を抑えたいの変形方向 $\mathbf{t}'_{\text{out}}$ の変位量に制約を与えるために導入した制約汎関数である。 l_3 は、 $\mathbf{t}'_{\text{out}}$ の方向への柔軟性を表す。 ε_0 は十分小さな値とする。

次に、目的汎関数の感度は、随伴変数法を用いて、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dF}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial l_2(\mathbf{u}_1)}{\partial \mathbf{u}_1}, \delta \mathbf{u}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}_1}, \delta \mathbf{u}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{u}_1}, \delta \mathbf{u}_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{u}_1}, \delta \mathbf{u}_1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{u}_1}, \delta \mathbf{u}_1 \right\rangle \end{aligned} \quad (28)$$

この場合の随伴変数場は以下で定義される。

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) + s_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = l_2(\mathbf{u}_1) \quad \text{for } \forall \mathbf{u}_1 \in U, \mathbf{v} \in U \quad (29)$$

ここで、 s_1 は (2) の要求を満たすために付加するばね $\mathbf{k}_{\text{in}}$ を用いて、以下の式で与えられる。

$$s_1(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (30)$$

制約汎関数 G_2 の感度も同様に随伴変数法を用いて、以下の式で与えられる。

$$\left\langle \frac{dG_2}{d\phi}, \delta\phi \right\rangle = 2l_3 \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_3, \mathbf{v})}{\partial \phi}, \delta\phi \right\rangle \quad (31)$$

この場合の随伴変数場は以下の式で与えられる。

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_3) = l_3(\mathbf{u}_3) \quad \text{for } \forall \mathbf{u}_3 \in U, \mathbf{v} \in U \quad (32)$$

3. 数 値 実 装 法

3.1 最適化アルゴリズム

図2に最適化アルゴリズムを示す．まず，初期構造を示すレベルセット関数を与える．次に，有限要素法を用いて，目的汎関数，制約汎関数の値を求める．ここで，目的汎関数が収束すれば，最適化計算を終了させ，収束しない場合は，目的汎関数，制約汎関数の感度を求め，MMAによってレベルセット関数を更新する．ただし，初期構造の制約が大きく違反している場合，100ステップ程度かけて制約を満たすように修正する．

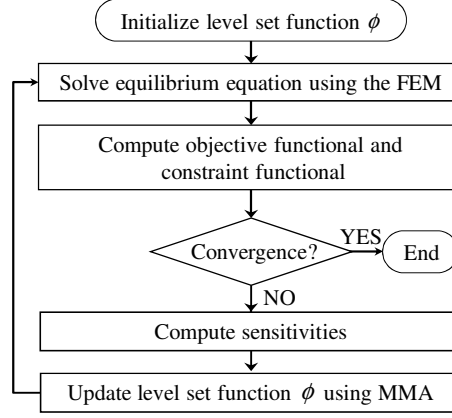


Fig. 2 Optimization flowchart

3.2 変位場の近似解法

本研究では，最適化計算において，物体の形状を陽に抽出することなく計算を行うため，山田ら⁽¹²⁾⁽¹³⁾の方法と同様，変位場の解析における縦弾性係数は，空洞領域は十分に小さな剛性を持つ領域とみなし，境界近傍では，滑らかに遷移するものとする．すなわち，平衡方程式を次式で表現する．

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) H(\phi) d\Omega = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} H(\phi) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (33)$$

ここで，ヘビサイド関数 $H(\phi)$ は次式で表される．

$$H(\phi) = \begin{cases} d & (\phi < -w) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi}{w} \left(\frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{w^2} \right) \right) \right) (1-d) + d & (-w \leq \phi < w) \\ 1 & (w \leq \phi) \end{cases} \quad (34)$$

上式において， w はヘビサイド関数の遷移幅， d は物体領域の縦弾性係数に対する空洞領域の縦弾性係数の比を表す．

3.3 目的汎関数の感度の導出法

ここでは，目的汎関数の感度の導出法について述べる．一般に，構造最適化においては，更新に用いる感度の分布が非平滑な場合，更新した後のレベルセット関数が非平滑となり，結果として，物理的に十分に滑らかな境界で表現される最適構造が得られない場合がある．特に本研究では，式(5)に示したように，感度に $\nabla^2 \phi$ の項を含み，この項を求める数値計算を十分精度よく行わなければ，妥当な最適構造を得ること難しい．そこで本研究では，次に示すレベルセット関数に関する時間発展方程式を導入し，その方程式に基づき精度よく感度を求める方法を提案する．

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(C \frac{dF}{d\phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (35)$$

ここで、 C は感度を正規化するための係数で、 $C = c \int_D d\Omega / \int_D |\frac{dF}{d\phi}| d\Omega$ で与える。また、 D_N は、物体領域があらかじめ指定されている境界である。上式を、時間方向に離散化すると、以下の式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = - \left(C \frac{dF}{d\phi} - \tau \nabla^2 \phi(t+\Delta t) \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (36)$$

ここで、 Δt は時間差分である。上式を弱形式で表現し直し、次式に示すように空間方向に離散化し、有限要素法により解く。

$$\begin{cases} \int_D \frac{\phi(t+\Delta t)}{\Delta t} \tilde{\phi} dD + \int_D \nabla^T \phi(t+\Delta t) (\tau \nabla \tilde{\phi}) dD = \int_D \left(-C \frac{dF}{d\phi} + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \right) \tilde{\phi} dD & \text{for } \forall \tilde{\phi} \in \tilde{\Phi} \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (37)$$

ここで、 $\tilde{\Phi}$ は以下の式で定義される関数空間である。

$$\tilde{\Phi} = \{ \phi \in H^1(D) \mid \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \} \quad (38)$$

上式を解いて得られた $\phi(t+\Delta t)$ を基に、次式より目的汎関数の感度を求める。

$$\frac{dF_R}{d\phi} \approx \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} \quad (39)$$

上の方法により、本来は $\nabla^2 \phi$ を求める場合には、有限要素法による求解において二次要素以上の要素を用いる必要があるのに対して、時間発展方程式を解く必要があるものの、一次要素を用いても十分に精度よく感度を求めることができる。

4. 数 値 例

三つの数値例により、本研究で提案する方法の有効性を検討する。最適化計算に用いた物体領域のヤング率は 210GPa、ポアソン比は 0.3 とした。また、ヘビサイド関数のパラメータ d を 1.0×10^{-3} 、 Δt を 1.0 とした。

4.1 平均コンプライアンス最小化問題

ここでは、提案する方法を平均コンプライアンス最小化問題に適用し、正則化係数 τ の影響を検討し、提案する方法の妥当性を検証する。解析モデルとして、図 3 に示すモデル A を用いて最適化計算を行った。図に示したように、設計領域の左端を完全拘束し、右端中央部に荷重を作用させ、平均コンプライアンスを最小化した場合の最適構造を求める。ここでは、体積制約の上限値は、固定設計領域の 40% とした。また、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 1.0×10^{-3} とした。

図 4 に、最適構造を示す。Case 1, Case 2, Case 3 では、正則化係数 τ の値を 7.0×10^{-4} 、 3.0×10^{-4} 、 7.0×10^{-5} として最適構造を求めた。図より、いずれの場合も物理的に妥当な最適構造が得られることがわかった。これにより、数理計画法を用いてレベルセット関数を更新する手法においても、正則化係数 τ の大きさにより最適構造の幾何学的な複雑さを定性的に考慮した最適構造が得られることが確認できた。

4.2 応力制約問題 1

ここでは、提案する手法を応力制約を含む平均コンプライアンス最小化問題に適用した。解析モデルとして、図 5 に示すモデル B を用いて最適化計算を行った。図に示したように、設計領域の左端を完全拘束し、右端中央部に荷重を作用させる。また、設計領域は、要素長 $1.25 \times 10^{-2} \text{m}$ の構造格子で要素分割をした。ここで、荷重を付加する部分では応力値が高くなりやすいが荷重を付加する部分の応力を低減させることが目的ではないため、右端中央部の黒色の長方形で示される領域を非設計領域に設定し、物体領域とした。ここでは、許容される体積の上限値 $V_{\max}$ は固定設計領域の 40% とした。また、正則化係数 τ の値を 1.0×10^{-4} 、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 0.8、局所的な応力の上限値を 100MPa、 $\mu = 20$ 、 $\varepsilon = 0.1$ とした。

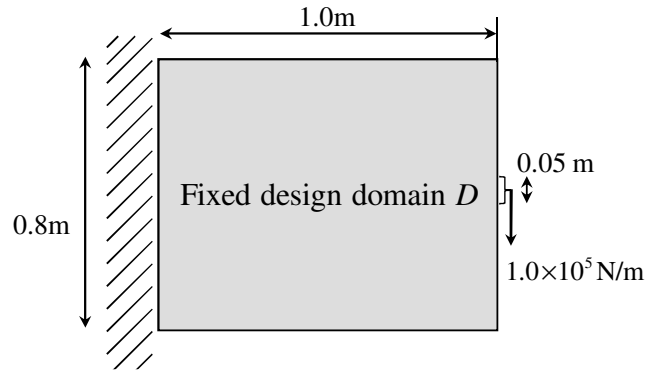


Fig. 3 Design domain and boundary condition of model A

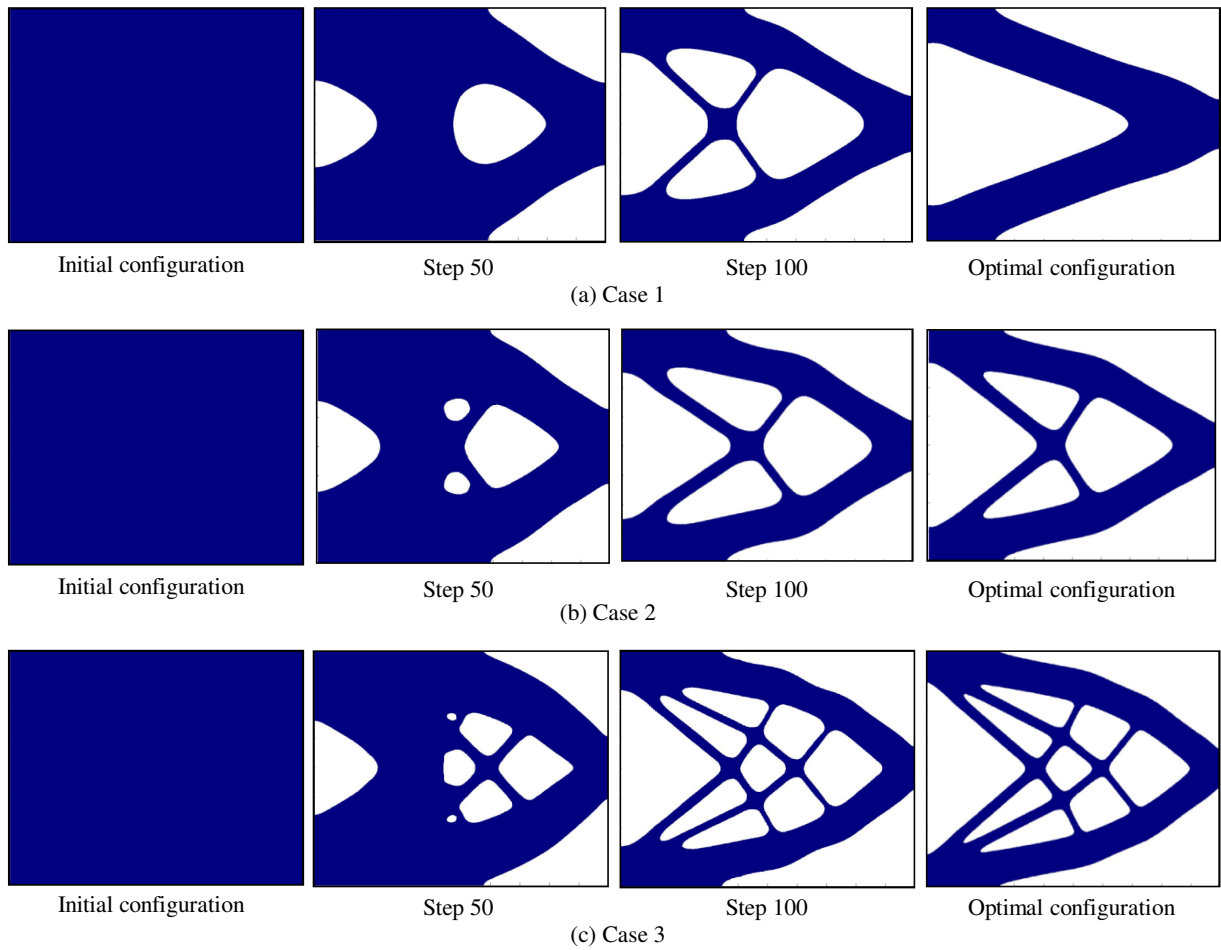


Fig. 4 Optimal configurations and shape evolution for different τ values: (a) $\tau = 7.0 \times 10^{-4}$, (b) $\tau = 3.0 \times 10^{-4}$, (c) $\tau = 7.0 \times 10^{-5}$

図 6(a) に，体積制約のみを制約として与えた場合の最適構造およびその Von Mises 応力分布，図 6(b) に，体積制約に加え応力制約を与えた場合の最適構造およびその Von Mises 応力分布を示す．応力分布は，各有限要素の中心の値を示している．応力の最大値は，応力制約を与えなかった場合と与えた場合でそれぞれ，203.05MPa，137.65MPa となった．また，平均コンプライアンスの値は，それぞれ，115.63J，118.42J となった．大域的な応力制約を与えているため，局所的な応力の上限值を厳密には満たしていないものの，応力制約を与えることにより，

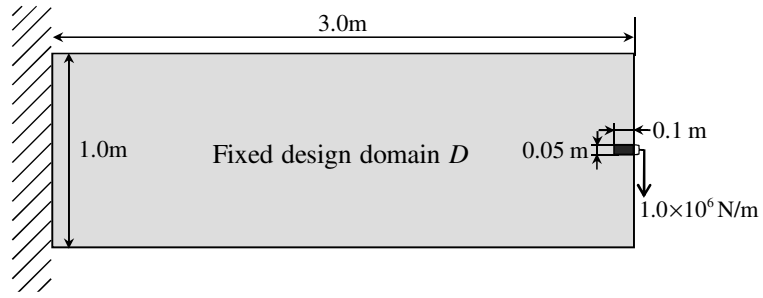


Fig. 5 Design domain and boundary condition of model B

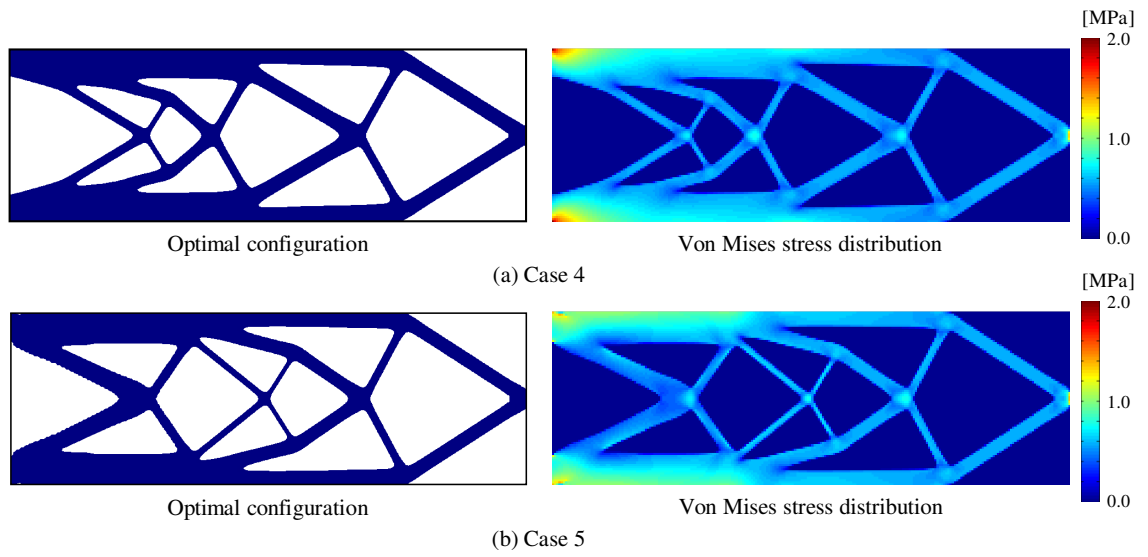


Fig. 6 Comparison of optimal configurations and stress distributions: (a) without stress constraint, (b) with stress constraint

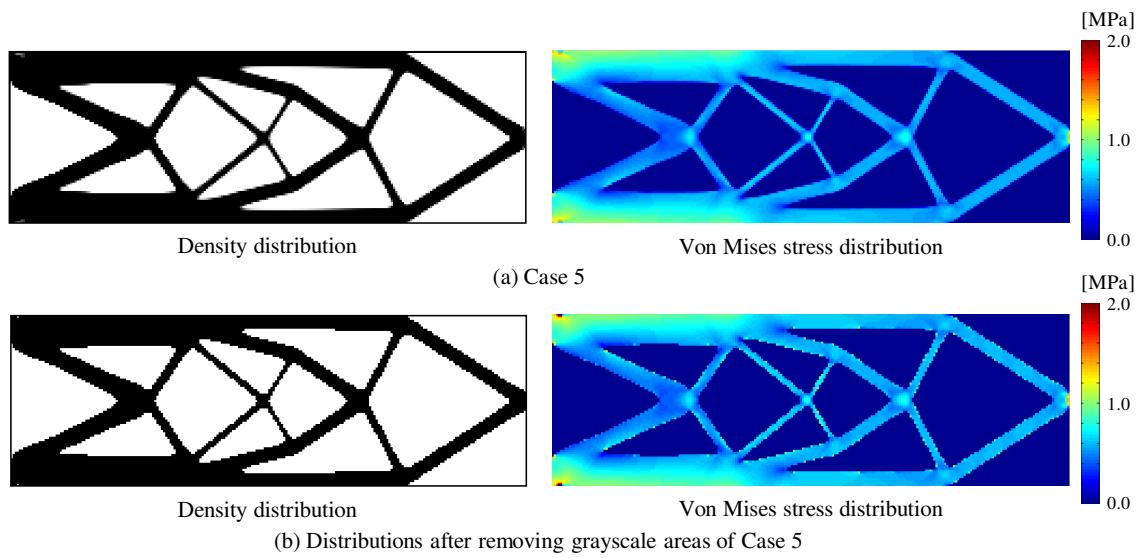


Fig. 7 Comparison of density distributions and stress distributions: (a) optimization results with stress constraint, (b) distributions after removing grayscale areas

応力が低減できていることが確認できた。

ここでは、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 0.8 としたため、最適構造にグレースケールが含まれており、実際には製造が困難な構造が得られている。そこで、最適構造においてヘビサイド関数の遷移幅 w を 1.0×10^{-3} としてグレースケールを除去した場合の検討を行う。図 7(a) に最適構造の密度分布と Von Mises 応力分布の比較を示す。また、図 7(b) にグレースケールを除去した場合の密度分布と Von Mises 応力分布の比較を示す。グレースケールを除去した場合の応力の最大値は、171.49MPa となり、グレースケールを除去する前と比べ悪化したものの、制約を与えない場合と比べると応力が低減している。

4.3 応力制約問題 2

さらにここでは、別の構造モデルを用いて、提案手法を応力制約問題に適用し、その妥当性を検討する。解析モデルとして、図 8 に示すモデル C を用いて最適化計算を行った。図に示したように、設計領域の上端を完全拘束し、左端に荷重を作用させる。設計領域は、要素長 $1.25 \times 10^{-2}\text{m}$ の構造格子で要素分割をした。ここでは、許容される体積の上限値 $V_{\max}$ は固定設計領域の 40% とした。また、正規化係数 τ の値を 1.0×10^{-4} 、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 0.8、局所的な応力の上限値を 250MPa、 $\mu = 20$ 、 $\varepsilon = 0.1$ とした。

図 9(a) に、体積制約のみを制約として与えた場合の最適構造およびその Von Mises 応力分布、図 9(b) に、体積制約に加え応力制約を与えた場合の最適構造およびその Von Mises 応力分布を示す。応力分布は、各有限要素の中心の値を示している。応力の最大値は、応力制約を与えなかった場合と与えた場合でそれぞれ、431.85MPa、279.90MPa となった。また、平均コンプライアンスの値は、それぞれ、115.56J、122.77J となった。この場合も、大域的な応力制約を与えているため、局所的な応力の上限値を厳密には満たしていないものの、応力制約を与えることにより、応力が低減できていることが確認できた。

ここでも、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 0.8 としたため、最適構造にグレースケールが含まれており、実際には製造が困難な構造が得られている。そこで、前述の応力制約問題 1 と同様、ヘビサイド関数の遷移幅 w を 1.0×10^{-3} としてグレースケールを除去した場合の検討を行う。図 10(a) に最適構造の密度分布と Von Mises 応力分布の比較を示す。また、図 10(b) にグレースケールを除去した場合の密度分布と Von Mises 応力分布の比較を示す。グレースケールを除去した場合の応力の最大値は、366.13MPa となり、応力制約問題 1 と同様、グレースケールを除去する前と比べ悪化したものの、制約を与えない場合と比べると応力が低減している。よって、提案手法を用いることで、応力を低減させる構造設計の指針となることがわかった。

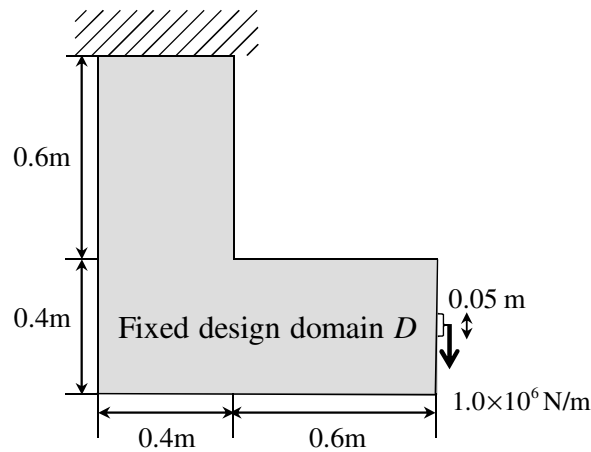


Fig. 8 Design domain and boundary condition of model C

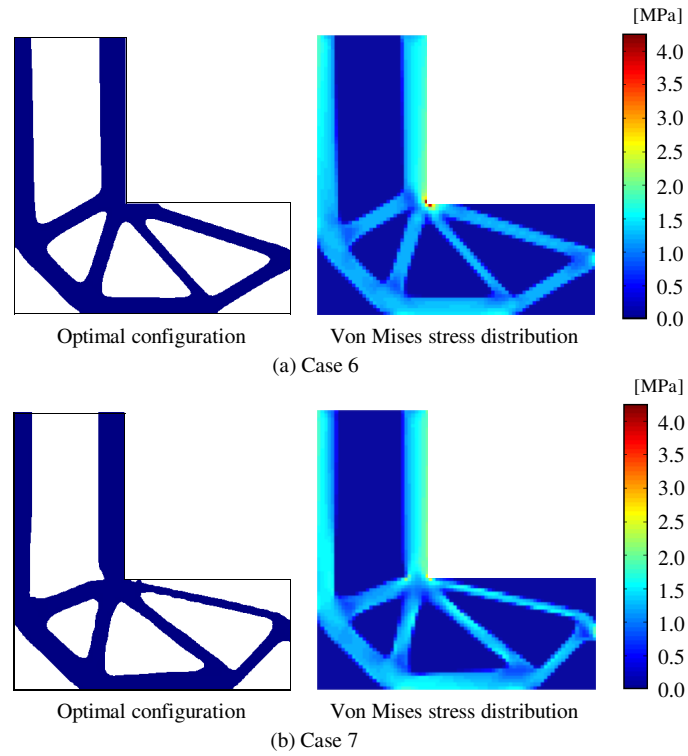


Fig. 9 Comparison of optimal configurations and stress distributions: (a) without stress constraint, (b) with stress constraint

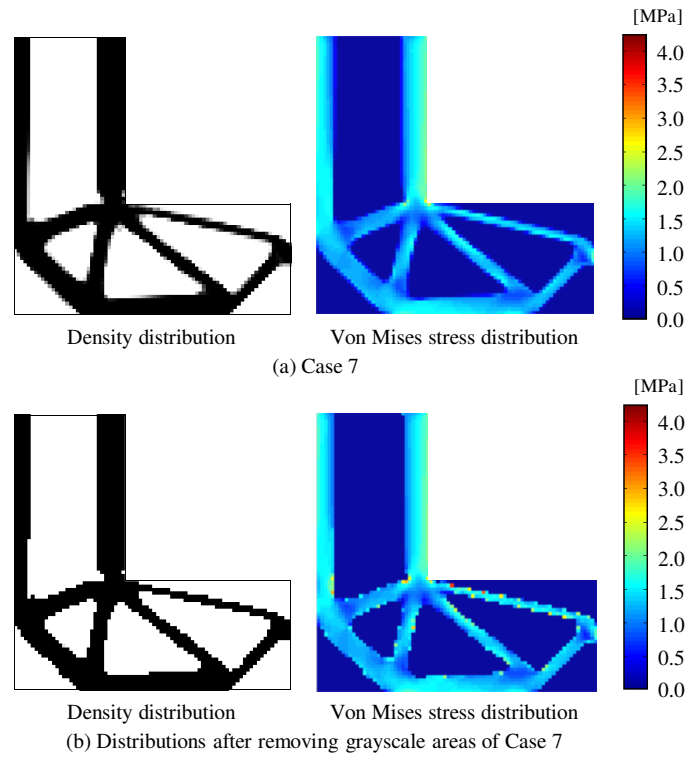


Fig. 10 Comparison of density distributions and stress distributions: (a) optimization results with stress constraint, (b) distributions after removing grayscale areas

4.4 コンプライアントメカニズム最適設計問題

提案手法をコンプライアントメカニズムの最適設計問題に適用した．解析モデルとして，図 11 に示すモデル D を用いて最適化計算を行った．図に示したように，設計領域の左端上部と下部左端を完全拘束し，左端中央部に荷重 t_{in} を作用させる．また，右端上部にダミーベクトル t_{out} で示した方向の柔軟性の最大化を図る．ここでは，許容される体積の上限値 V_{max} を固定設計領域の 35%，正則化係数 τ の値を 3.0×10^{-5} とした．また，ヘビサイド関数の遷移幅 w を 1.0×10^{-3} とした．

図 12 に，最適構造と変形図を示す．Case 8 では体積制約のみを制約として与え最適構造を求めた．また，Case 9 では，体積制約に加え，ダミーベクトル t_{out} で示した方向に直交する方向 t'_{out} の変位量に制約を与えるため， t'_{out} に対応する相互平均コンプライアンスに制約を与え最適構造を求めた．ここでは，式 (24) の ε_0 を $1.0 \times 10^{-9} \text{m}^2$ とした．図より，制約を与えた場合， t'_{out} の方向の変位量が抑えられており，ダミーベクトルで示した所望の方向のみに柔軟性が得られるよう設計されていることがわかる．最適構造の相互平均コンプライアンスの値は，制約を与えなかった場合と与えた場合でそれぞれ， $1.436 \times 10^{-9} \text{J}$ ， $1.432 \times 10^{-9} \text{J}$ であった．すなわち，ほぼ同等の性能で，制約を満足する最適構造が得られることがわかった．

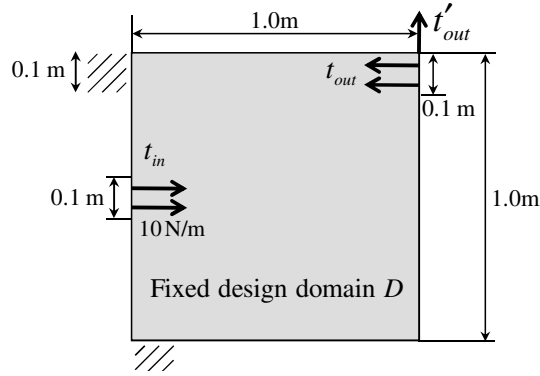


Fig. 11 Design domain and boundary condition of model D

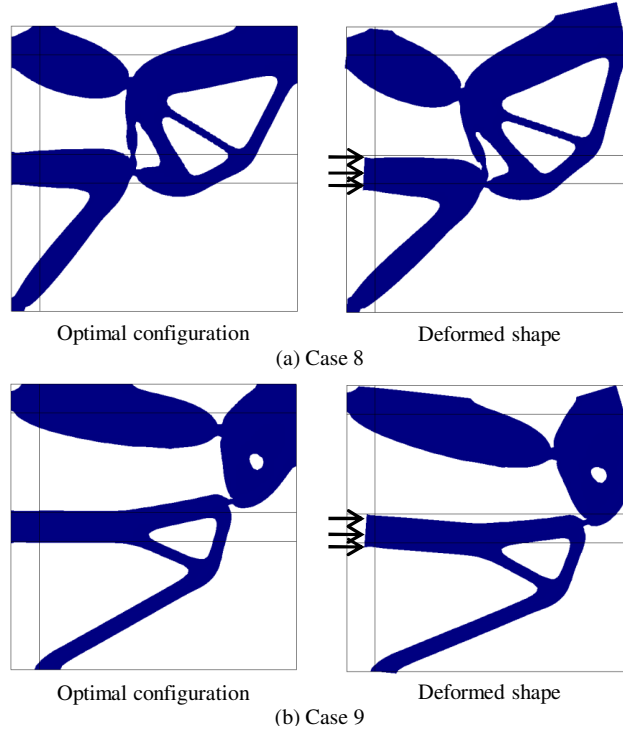


Fig. 12 Comparison of optimal configurations and deformed shapes: (a) without displacement constraint, (b) with displacement constraint

5. 結 言

本研究では、数理計画法を用いたレベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化を提案した。本研究で得られた結果を以下に示す。

- (1) レベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適化において、数理計画法の一手法である MMA によりレベルセット関数を更新可能な方法論の構築とその実装法を提案した。これにより、複数の制約条件を含む最適化問題を簡易に取り扱うことが可能となった。
- (2) 提案する方法を、応力制約を含む平均コンプライアンス最小化問題、変位制約を含むコンプライアントメカニズムの最適設計問題に展開した。
- (3) 数値解析例により、本提案手法の有効性を検証した。その結果、応力制約を含む平均コンプライアンス最小化問題では、最適構造にグレースケールが含まれるものの、与えた制約を満足する最適構造が得られており、さらに、グレースケールを除去することで応力制約を与えない場合と比べると応力が低減されており、本手法により応力を低減させる構造設計の指針となることを示した。また、コンプライアントメカニズムの最適設計問題においても、与えた制約条件を満足し、工学的に妥当で、明確な最適構造が得られることを示した。

謝 辞

本論文の第一筆者は、アイシン・エイ・ダブリュ株式会社の支援のもとに研究を実施した。本支援に深く謝意を表する。

文 献

- (1) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2 (1988), pp. 197-224.
- (2) Bendsøe, M. P., “Optimal shape design as a material distribution problem”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4(1989), pp. 193-202.
- (3) Duysinx, P. and Bendsøe, M. P., “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 8 (1998), pp. 1453-1478.
- (4) Martins, J. R. R. A. and Poon, N., M., K., “On structural optimization using constraint aggregation”, *Proceeding of the 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, (2005)
- (5) París, J., Navarrina, F., Colominas, I. and Casteleiro, M., “Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 39, No. 4(2009), pp. 419-437.
- (6) París, J., Navarrina, F., Colominas, I. and Casteleiro, M., “Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures”, *Advances in Engineering Software*, Vol. 41, No. 3(2010), pp. 433-441.
- (7) París, J., Navarrina, F., Colominas, I. and Casteleiro, M., “Stress constraints sensitivity analysis in structural topology optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 33-36(2010), pp. 2110-2122.
- (8) Sigmund, O., “On the design of compliant mechanisms using topology optimization”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 25, No. 4(1997), pp. 493-524.
- (9) Nishiwaki, S., Frecker, M., I., Min S. and Kikuchi, N., “Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, No. 3(1998), pp. 535-559.
- (10) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications* (2003), pp. 97-98, Springer Verlag.
- (11) Wei, P. and Wang, M. Y., “Piecewise constant level set method for structural topology optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 78, No. 4(2009), pp. 379-402.
- (12) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., “A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45-48(2010), pp. 2876-2891.

- (13) 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 竹澤晃弘, “レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 75, No. 753(2009), pp. 550-558.
- (14) Wang, M. Y., Wang, X. M. and Guo, D. M., “A level set method for structural topology optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2(2003), pp. 227-246.
- (15) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., “Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1(2004), pp. 363-393.
- (16) Guo, X., Zhang, W., S. and Wang, M., Y., “Stress-related topology optimization via level set approach” *Proceeding of the 6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, (2010), C-74.
- (17) Xia, Q., Shi, T. and Wang, M., Y., “A level set based method for topology optimization of continuum structures with stress constraint” *Proceeding of the 6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, (2010), C-49.
- (18) Allaire, G. and Jouve, F., “Minimum stress optimal design with the level set method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, No. 11(2008), pp. 909-918.
- (19) Svanberg, K., “The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 2 (1987), pp. 359-373.
- (20) 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, “レベルセット法に基づくコンプライアントメカニズムの構造最適化”, 日本計算工学会論文集, No.20080001, (2008).