

Reflection Principles via Filter Quantifier

神戸大学教養部 角田 譲 (Yuzuru Kakuda)

Reflection Principle は the universe V を集合として, approximation するという原理である。formal には, 次の scheme で表現できる:

$$(1) \quad (\exists u) (u \text{ is transitive} \wedge (\forall \vec{x} \in u) (\bigwedge_{k=1}^l (\varphi_k \leftrightarrow \varphi_k^{(u)})))$$

, 但し, u で各 φ_k に現れる free variable は $\vec{x}$ の中にあるとする。

この Reflection Principle は, [1] (or [2]) で明らかに, 次のように, "almost all quantifier" aa (i.e., a filter quantifier with the axiom of diagonal intersections) で表現できる。一方, AC (実際には, DC で充分) を仮定すれば, ZFC において次の形の Reflection Principle が証明できる:

$$(2) \quad (\forall \Delta) (\exists \tau) (\Delta \subseteq \tau \wedge (\forall \vec{x} \in \tau) (\bigwedge_{k=1}^l (\varphi_k \leftrightarrow \varphi_k^{(\tau)})))$$

, 但し, u で各 φ_k に現れる free variable は $\vec{x}$ に現れるとして, variables Δ, τ は countable sets を動くものとする。

(2) と (1) の形に書く時、次、定義が必要である：

Def. 1. Δ is countable set とする. Δ is countably transitive であるとは、

$$(\forall t)(t \in \Delta \wedge \bar{t} \leq x_0 \rightarrow t \in \Delta).$$

を意味する。

(2) は、次の形の Reflection Principle と ZF において、同値である：

$$(3) \quad (\forall \Delta)(\Delta \text{ is countably transitive} \\ \wedge (\forall x \in \Delta) \bigwedge_{k=1}^{\infty} (\varphi_k \leftrightarrow \varphi_k^{(x)}))$$

(free variable の条件は、(1), (2) に同じである)

(1) か、"for almost all sets" quantifier に、関連しているという事実から、我々は、(3) か "for almost all countable sets" なる quantifier と関連がある事を予測できる。その方向で、quantifier "aa" の集合論での意味を探る事が、目的である。

§1.

この節においては、後、応用、為できる限り一般的に、aa を持つ language の理論を展開しておく。この節において、 L_U は predicate symbols $U, \in$ (U は 1-ary, $\in$ は 2-ary) を持つ first-order language とする。(但し、 L_U は他の symbols を含んでも良い)。

$\mathcal{U}(x)$ の時, $x \in \mathcal{U}\text{-set}$ という事にして, $s, t, s', t', \dots$
等は, $\mathcal{U}\text{-sets}$ を走る variables とする.

1.1. Definition (a) $UB_{\mathcal{U}}$ は $L_{\mathcal{U}}(aa)$ で formulate
された theory 2, 次, axioms を持つものとする:

(Ax. 0) 通常, first-order logic axiom schemes,
(equality axioms を含む).

(Ax. 1) $(aa x) \varphi(x) \leftrightarrow (aa y) \varphi(y)$, $\varphi(x)$ は $L_{\mathcal{U}}(aa)$
の formula 2- y は $\varphi(x)$ に現れた x とする,

(Ax. 2) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((aa x) \varphi \rightarrow (aa x) \psi)$,

(Ax. 3) $(aa x) \varphi \wedge (aa x) \psi \rightarrow (aa x) (\varphi \wedge \psi)$,

(Ax. 4) $(aa x)(x \text{ is a } \mathcal{U}\text{-set})$,

(Ax. 5) $\neg (aa x)(x \neq x)$,

(Ax. 6) $(\forall x)(aa y)(x \in y)$,

(Ax. 7) $(\forall x \in s)(aa y) \varphi \rightarrow (aa y)(\forall x \in s) \varphi$.

(b) $ST_{\mathcal{U}}$ は $L_{\mathcal{U}}(aa)$ で formulate された theory 2
axioms は (Ax. 0) から (Ax. 6) に 次, axioms を付け加えた
ものとする:

(Ax. 8) $(\forall s)(aa x)(s \subseteq x)$,

(Ax. 9) $(\forall x)(aa y) \varphi \rightarrow (aa y)(\forall x \in y) \varphi$.

Remark. UB_U, ST_U の inference rules は 7 に,
Modus Ponens と Generalization. 7-6 3.

1.2. Definition (2) U -pair, U -Union, U -Collection
でそれぞれ次を表わすものとする:

$$U\text{-Pair} : (\forall x)(\forall y)(\exists \Delta)(x \in \Delta \wedge y \in \Delta),$$

$$U\text{-Union} : (\forall \Delta)(\exists t)(\forall \Delta' \in \Delta)(\Delta' \subseteq t),$$

$$U\text{-Collection} : (\forall x \in \Delta)(\exists y) \varphi \rightarrow (\exists t)(\forall x \in \Delta)(\exists y \in t) \varphi,$$

∴ φ は t が free variable として持つ formula
である

(b) 集合 x が U -transitive であるとは, x が U -set
でかつ $(\forall \Delta \in x)(\Delta \subseteq x)$ が成立する事である.

(c) RF_U で, 次, reflection scheme を意味するものと
する: $(\exists \Delta)(\Delta \text{ is } U\text{-transitive})$

$$\wedge (\forall \vec{x} \in \Delta) \bigwedge_{k=1}^l (\varphi_k \leftrightarrow \varphi_k^{(\Delta)})$$

∴ φ_k は L_U の formula で含める free variables
は, $\vec{x}$ に現れるものとする.

Remark. $(\forall x)(U(x) \leftrightarrow x=x)$ は axiom に付け加
えた場合 (あるいは $U(x)$ が predicate $x=x$ を意味す
る場合), UB_U, ST_U は $[]$ の UB, ST と一致する.)

1.3. Lemma (a) $\mathcal{U}$ -pair, $\mathcal{U}$ -Union, $\mathcal{U}$ -Collection (ranging over all formulas in $L_{\mathcal{U}}(aa)$) は, $UB_{\mathcal{U}}$ において証明可能である。

(b) $UB_{\mathcal{U}}$ の first-order part は, $\mathcal{U}$ -Pair, $\mathcal{U}$ -Union, $\mathcal{U}$ -Collection Σ axioms とし, 持つ first-order theory と一致する。

(c) $ST_{\mathcal{U}}$ は $UB_{\mathcal{U}}$ の extension である。

(d) $ST_{\mathcal{U}}$ の first-order part は, $RF_{\mathcal{U}}$ Σ axioms とし, 持つ $L_{\mathcal{U}}$ の $\perp$ の first-order theory と一致する。

§2.

この節においては, $L_{\mathcal{U}}$ は ZF の language に unary predicate symbol $\mathcal{U}$ を付け加えてある language である。全 2 の theorems は, ZF relative to $L_{\mathcal{U}}$ (即ち, Separation & Collection Scheme は $L_{\mathcal{U}}$ の formula 全 2 を動かす) である。さらに, $\mathcal{U}$ は, $\subseteq$ に関して hereditary とする, 即ち,

$$(\forall x)(\forall y)(x \text{ is a } \mathcal{U}\text{-set and } y \subseteq x \rightarrow y \text{ is a } \mathcal{U}\text{-set}).$$

2.1. Definition. $A \in \text{set}$ とする。 $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(A)$ で, 次の集

合を意味する: $\{p: p \subseteq A \text{ and } p \text{ is a } U\text{-set}\}$.

$\mathcal{P}_U(A)$ の subset X が unbounded であることをいふ,

$$(\forall p \in \mathcal{P}_U(A)) (\exists g \in X) (p \subseteq g)$$

が成立する事を意味する. X が closed であることをいふ.

X の $\mathcal{P}_U(A)$ の non-empty subset D が $\subseteq$ によって directed であるとき、 D の $\subseteq$ による $\cup$ は $\mathcal{P}_U(A)$ の element $g = \bigcup D$ を作り出す。このとき、 $g \in X$ が成立する事をいふ。

2.2. Definition. (a) U -Closure Principle とは、次を意味するものとする:

S は non-empty set, $R \in \mathcal{R}_{S,S}$ binary relation である。条件を満足しているものとする: 任意の有限列

$\langle x_i | i < n \rangle$ (from S) に対してある $x \in S$ が存在して、

$\langle x_i | i < n \rangle R x$ となる。この時、 $t \subseteq S$ なる任意の U -set t に対して $t \subseteq \Delta \subseteq S$ なる U -set Δ が存在して、 Δ が有限列 $\langle x_i | i < n \rangle$ (任意) に対して $x \in \Delta$ となる。

$\langle x_i | i < n \rangle R x$ となるものが存在する。

(b) The weak form of U -closure Principle とは、次を意味する:

S は non-empty set, R は ternary relation on S である。条件を満足しているものとする。この時、non-empty U -set Δ , $\Delta \subseteq S$ である。

次, 条件を満足するものが存在する:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(\exists z \in A) R(x, y, z).$$

2.3. Definition. $\mathcal{U}$ -set に対する Reflection Principle とは次, scheme を意味する:

$$(\forall t)(\exists A)(\tau \subseteq A \wedge (\forall \vec{x} \in A) \bigwedge_{k=1}^p (\varphi_k \leftrightarrow \varphi_k^{\tau})),$$

すなわち, 各 φ_k は free variables を $\vec{x}$ の中に持った formula である。

2.4. Lemma. $\mathcal{U}$ -Pair, $\mathcal{U}$ -Unsat を仮定する。

この時, 次, 条件は互に同値である:

(i) $\mathcal{U}$ -Collection, the weak form of $\mathcal{U}$ -Closure Principle;

(ii) 各集合 A に対して, closed unbounded subsets of $P_{\mathcal{U}}(A)$ の collection の diagonal intersection に対して閉である;

(iii) $\mathcal{U}$ -Closure Principle;

(iv) $\mathcal{L}$ は non-logical symbols, 集合全体から, $\mathcal{U}$ -set に対する language の structure である。この時, $\mathcal{U}$ の universe A の subset C に対して $\mathcal{U}$ -set B である。 $C \in \mathcal{L}$ は $\mathcal{U}$ の elementary substructure $\mathcal{U}$ の B の $\mathcal{U}$ -set

なるものが存在する;

(V) $\mathcal{U}$ -set に関する Reflection Principle.

2.5. Lemma 次のものは equivalent である。

(i) $\mathcal{U}$ -Pair, $\mathcal{U}$ -Union, $\mathcal{U}$ -Closure Principle;

(ii) $RF_{\mathcal{U}}$.

§3.

$L_{\mathcal{U}}$ に関する §2 と同じ仮定を置くものとする。

3.1. Definition. (a) $UB_{\mathcal{U}}$ に, ZF (relative to $L_{\mathcal{U}}(aa)$) の axioms を付け加えて得る $L_{\mathcal{U}}(aa)$ 上の theory を $ZF_{\mathcal{U}}^{UB}$ とする。

(b) $ZF_{\mathcal{U}}(aa)$ は, ZF (relative to $L_{\mathcal{U}}(aa)$) + $ST_{\mathcal{U}}$ と $L_{\mathcal{U}}(aa)$ の theory を意味するものとする。

(c) $ZF_{\mathcal{U}}^{W+}(aa)$ は Collection Scheme を L に制限して $ZF_{\mathcal{U}}(aa)$ から得る $L_{\mathcal{U}}(aa)$ 上の theory とする。

(d) $ZF_{\mathcal{U}}^W(aa)$ は Separation Scheme を L に制限して $ZF_{\mathcal{U}}^{W+}(aa)$ から得る $L_{\mathcal{U}}(aa)$ 上の theory とする。

Case I. " $U(x) \leftrightarrow x$ is countable" $\vdash U(x)$ $\forall x$,
define ε as predicate ε -set ε as follows:

ZF_U^{UB} , $ZF_U(aa)$, ... ε ε as ε -set ε as follows, $ZF_{x_1}^{UB}$,
 $ZF_{x_1}(aa)$, ... ε as follows.

§2 の結果より次のことがいえる。

3.2. Proposition. (a) $ZF_{x_1}^{UB}$ は, $ZF + AC_\omega$ の conservative extension ε である, 但し, AC_ω は, the axiom of choice for countable sets ε である。

(b) $ZF_{x_1}^W(aa)$ は, $ZF + DC$ の conservative extension ε -set ε である。

(c) $ZF_{x_1}^{W+}(aa)$ は $ZF + FL_{x_1}$ の conservative extension ε -set ε である。但し, FL_{x_1} は, non-empty set x に ε である, $P_{\omega_1}(x)$ は fine normal filter ε である。

Remark. $ZF_{x_1}(aa)$ は, $ZF(aa)$ より強い theory ε である。また, $ZF + DC$ に対して本質的に強い ε である。

Problem. $DC \rightarrow FL_{x_1}$ ε 証明である。($DC \rightarrow FL_{x_1}$ は不可能である)

Case II. $\kappa \in$ infinite cardinal ε する時,

$$"V(x) \leftrightarrow \bar{x} < \kappa"$$

が成立するとき //

この場合, $AC \in$ 成立するとき, $ZF_{\kappa}(aa) + Dual$ の理論は Large cardinal ε の理論と一致する。これは $\varepsilon = \aleph_1$ の場合も成立する。この結果は $\varepsilon = \aleph_1$ の場合も成立する。

$$\text{Theorem. } ZD_{\kappa}^I + Col_{\kappa}^I + Sep_{\kappa}^I + AC \vdash \varphi$$

iff

$$ZFC_{\kappa} + "\kappa \text{ is Mahlo}" \vdash \varphi$$

for every formula φ of L_{κ} .

参考文献.

[1]. Y. Kakuda, Set theory based on the language with the additional quantifier "for almost all". To appear.

[2]. M. Kaufmann, Set theory with a filter quantifier, To appear in JSL.