

## 浅層地下水流動モデルの不確定要因と その時・空間伝播特性

池淵 周一・森岡 武一

### UNCERTAIN FACTORS IN NUMERICAL MODELS OF FREE GROUNDWATER FLOW AND THEIR PROPAGATION IN TIME-SPACE

By *Shuichi* IKEBUCHI and *Takekazu* MORIOKA

#### Synopsis

There are many studies to estimate parameters in numerical models of groundwater flow. However, before parameter estimation, numerical analysis of uncertainty propagation of parameters is required in order to know which parameter to estimate, and how to estimate it.

In this paper, an approximate solution to the distribution of dependent random variables is applied to numerical models of groundwater. First-order second-moment method of multidimensional Taylor-series expansion, that is, is presented in matrix form for such analysis so as to calculate the mean and the covariance of predicted groundwater heads due to many uncertainty parameters.

This algorithm is applied to an assumed groundwater basin and its results are presented in graphic formula, and are compared with those calculated by Monte Carlo simulation.

#### 1. 序 論

浅層地下水の流動のモデル化は、多くの形でなされているが<sup>1)2)</sup>、透水係数や有効間隙率などの滯水層定数、あるいは基盤である難透水層の位置、降雨などによるかん養量や設定した境界からの流入量、河川水位、初期水位などの多くのパラメーターを含んでいる。これらのパラメーターは非常に不確定で、少ない場所での地点のデータしかえることはできない。

そこでパラメーター、特に透水係数あるいは透水量係数の同定が多くの研究によって行われている<sup>3)4)</sup>。しかし多くの場合、水位はよく実現値と一致しているものの、推定されたパラメーターの値には、やや現実の値にそぐわないものがある。これは1種類のパラメーターだけを同定する手法のせいである可能性がある。

そこで本研究においては各パラメーターが持つ誤差が地下水位に与える影響をテラー展開の1次の項を用いて解析する。この解析によって、どのパラメーターの誤差が最も大きく地下水位に響くか、すなわちどのパラメーターを同定すべきであるかや、逆にどのパラメーターの誤差の影響が無視しうほど小さいかを明らかにする。

さらには本研究によって構築されたシステムから、水位や各パラメーター同定のための観測網への示唆や、各パラメーターが同定されモデルが構成された際の、そのモデルの信頼度の表現への適用の可能性を示す。

## 2. 基礎方程式と有限要素法による離散化

地下水頭は鉛直方向に変化せずに常に地下水位と等しく、浅層地下水の流動は水平方向のもののみが存在するとする。また自由地下水であることと、流動層厚が10 m 前後の薄さと考えられることから、水の密度、透水係数及び有効間隙率の圧力水頭の大小による変化は無視できるほど小さいと仮定する。

さらに簡単のために、透水係数と有効間隙率の鉛直方向への変化、および不飽和浸透流の存在は大局的にみれば無視しうると仮定する。以上の仮定をおくことによって、浅層地下水における平面2次元流動モデルが次の式のように構成される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ K \cdot (H-Z) \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left\{ K \cdot (H-Z) \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right\} + Q' = N \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、各種の条件を以下のように設定する。

$$H|_{t=0} = H_0(x, y) \quad \dots\dots\dots \text{初期条件 (2)}$$

$$H|_{\Gamma_1} = R(x, y, t) \quad \dots\dots\dots \text{Dirichlet 境界条件 (3)}$$

$$K \cdot (H-Z) \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \cdot n_x + K \cdot (H-Z) \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \cdot n_y|_{\Gamma_2} = F(x, y, t) \quad \dots\dots \text{Neumann境界条件 (4)}$$

ここで、 $H_0(x, y)$  は地点  $(x, y)$  における初期水位 (m)、 $R(x, y, t)$  は地点  $(x, y)$ 、時間  $t$  での河川水位 (m)、 $n_x, n_y$  は Neumann 境界の外向き法線ベクトル、 $F(x, y, t)$  は地点  $(x, y)$ 、時間  $t$  での境界流入量 ( $\text{m}^2/\text{day}$ ) で流入が正、 $\Gamma_1$  は Dirichlet 境界、 $\Gamma_2$  は Neumann 境界である。

これらの式に対して Galerkin 有限要素法を適用する。用いる要素は3節点3角形要素で、内挿関数にはもっとも簡単な線形内挿関数を用いる。そうすると結局次のような行列方程式がえられる。

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{h} + \mathbf{B}' \cdot \partial \mathbf{h} / \partial t = \mathbf{c} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $\mathbf{h}$  は水位を節点の順番に並べたベクトルで、 $\mathbf{A}'$ 、 $\mathbf{B}'$  は座標、透水係数、有効間隙率、地下水位等を含んだそれぞれ  $n' \times n'$ 、 $n' \times n'$  の係数行列で、 $\mathbf{c}$  はかん養量、境界流入量などを含んだ  $n' \times 1$  のベクトルである。ただし、 $n'$  は全節点数である。この式の時間に関する偏微分項を差分によって近似して、次の式がえられる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{h}' = \mathbf{c} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで  $\mathbf{h}$  は現タイムステップの、 $\mathbf{h}'$  は前タイムステップの地下水位ベクトルである。

## 3. テーラー展開を用いた確率構造解析

### 3.1 行列式の確率変数

まず、式(6)の各項に含まれる不確定な確率変数をあげておくと、以下のようになる。

**A**; 透水係数 ( $K$ )、有効間隙率 ( $N$ )、基盤高さ ( $Z$ )、現在のタイムステップでの地下水位 ( $H$ )、前のタイムステップでの地下水位 ( $H'$ )

**B**; 透水係数 ( $K$ )、有効間隙率 ( $N$ )、基盤高さ ( $Z$ )、現在のタイムステップでの地下水位 ( $H$ )、前のタイムステップでの地下水位 ( $H'$ )

**c**; 有効間隙率 ( $N$ )、初期水位 ( $H_0$ )、かん養量 ( $Q$ )、境界流入量 ( $F$ )

**h**; 現在のタイムステップでの地下水位 ( $H$ )、河川水位 ( $R$ )

**h'**; 前のタイムステップでの地下水位 ( $H'$ )、河川水位 ( $R$ )

また、各確率変数を並べたベクトルを次のように定義する。

$$\begin{aligned}
u^T &= (K_1, \dots, K_n, N_1, \dots, N_n, Z_1, \dots, Z_n, Q_1^1, \dots, Q_n^1, Q_1^2, \dots, Q_n^2, F_1^1, \dots, F_n^1) \\
&= (K_i, i=1, n'; N_i, i=1, n'; Z_i, i=1, n'; Q_i^j, i=1, n', j=1, l'; F_i^j, i=1, m', j=1, l') \\
&\dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

行列の右肩の  $T$  は行列の転置を、変数の添字の  $m'$  は Neumann 境界の数を、右肩の添字は時間を表して、 $l'$  はタイムステップの最大値を示している。

### 3.2 行列式のテーラー展開

式(6)を確率的に解析するために、その両辺に左から  $A$  の逆行列をかけて、左辺の水位ベクトルを、全ての確率変数の平均値のまわりで1次のテーラー展開を行うと、次の式がえられる。なお以下の操作は Townley と Wilson の研究<sup>5)</sup>及び Dettinger と Wilson の研究<sup>6)</sup>を参考にしている。ただし、彼らの展開は基礎方程式(1)において、透水係数と有効層厚の積を透水量係数として扱っているが、本研究ではより一般的に透水係数、有効層厚ともに不確定な確率変数であるとしていることに注意されたい。

$$h = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot h' + \bar{A}^{-1} \cdot \bar{c} + \bar{D}_h \cdot (u - \bar{u}) + \bar{D}_{h'} \cdot (h' - \bar{h}') + \bar{D}_h \cdot (h - \bar{h}) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、行列とベクトルの上のバーはそれが全ての変数の平均で評価されていることを示す。 $D_h h$ の項が出てきているのは、式(6)が非線形であり、 $A$  や  $B$  の中にも水位が含まれているため、その水位と求めるべき水位が、いわば別個のものとして取り扱うわけである。また  $D$  は微分演算子で、 $D_h h$  は  $h$  ベクトルを  $x$  ベクトルで偏微分したものである。その一例として  $D_h h$  をあげると、次のとおりである。

$$D_h h = \frac{\partial h}{\partial h'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial H_1'} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial H_n'} \\ \frac{\partial H_2}{\partial H_1'} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial H_n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial H_1'} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial H_n'} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

すなわち、 $D_h h$  は  $n' \times n'$  行列となるわけである。

### 3.3 平均値行列と共分散行列

式(8)を用いると、地下水位の平均値ベクトル  $\bar{h}$  と、その共分散行列  $P_{hh}$  は次のようにえられる。なお、以下において  $P_{xy}$  は  $x$  ベクトルと  $y$  ベクトルの共分散行列を表すことにする。

$$\bar{h} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot \bar{h}' + \bar{A}^{-1} \cdot \bar{c} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned}
P_{hh} &= E[(h - \bar{h}) \cdot (h - \bar{h})^T] \\
&= E[\{\bar{D}_h \cdot h' \cdot (h' - \bar{h}') + \bar{D}_u \cdot h \cdot (u - \bar{u}) + \bar{D}_h \cdot h \cdot (h - \bar{h})\} \cdot \{\bar{D}_h \cdot h' \cdot (h' - \bar{h}') \\
&\quad + \bar{D}_u \cdot h \cdot (u - \bar{u}) + \bar{D}_h \cdot h \cdot (h - \bar{h})\}^T] \\
&= \bar{D}_h \cdot h' \cdot P_{h'h'} \cdot (\bar{D}_h \cdot h')^T + \bar{D}_h \cdot h' \cdot P_{h'u} \cdot (\bar{D}_u \cdot h)^T + \bar{D}_h \cdot h' \cdot P_{h'h} \cdot (\bar{D}_h \cdot h')^T \\
&\quad + \bar{D}_u \cdot h \cdot P_{uh} \cdot (\bar{D}_u \cdot h)^T + \bar{D}_u \cdot h \cdot P_{uh} \cdot (\bar{D}_h \cdot h')^T + \bar{D}_h \cdot h \cdot P_{hh} \cdot (\bar{D}_h \cdot h)^T \\
&\quad + \bar{D}_h \cdot h \cdot P_{hh} \cdot (\bar{D}_h \cdot h)^T \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

ここで、 $E(\cdot)$  はかっこ内の確率変数の平均をとる操作を表している。

式(10)から、地下水位の平均値ベクトルは、全てのパラメーターが確定量である場合の地下水位ベクトルと同じであり、容易に求めることができることがわかる。しかし、式(11)の右辺においては、仮定から考えてパラメーターの共分散行列  $P_{uu}$  が、また時間をおって計算することから、前のタイムステップでの水位の共分散行列  $P_{h'h'}$  がわかっているだけで、それ以外の項は与えられておらず、別個に計算せねばならない。

そこで、水位ベクトルの各確率変数による偏微分項である  $\bar{D}_h h$ ,  $\bar{D}_u h$ ,  $\bar{D}_h h$  をまず求めてみよう。

式(6)の両辺を  $h'$  について偏微分すると、次の式がえられる。

$$A \cdot \frac{\partial h}{\partial h'} + \frac{\partial A}{\partial h'} \cdot (E_n * h) + B \cdot \frac{\partial h'}{\partial h'} + \frac{\partial B}{\partial h'} \cdot (E_n * h') = \frac{\partial c}{\partial h'} \quad (12)$$

ここで、 $*$  はクロネッカーの積で、行列の偏微分を表すために、このような演算が必要とされるわけである。また  $E_n$  は  $n' \times n'$  の単位行列である。

この式を全ての確率変数の平均値において評価して移項し、表記方法をこれまでのものと合わせる。さらに水位ベクトルにおいて自分自身を偏微分すると単位行列がえられること、 $c$  には地下水位が含まれていないため右辺は0行列となることを考えると、次の式がえられる。

$$\bar{A} \cdot \bar{D}_h \bar{h} = -\bar{D}_h \bar{A} \cdot \{E_n * \bar{h}\} + \bar{B} + \bar{D}_h \bar{B} \cdot \{E_n * \bar{h}'\} \quad (13)$$

式(13)において、 $\bar{A}$ ,  $\bar{E}_n$ ,  $\bar{h}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{h}'$  はそれぞれ既知であり、 $D_h A$ ,  $D_h B$  などは実際に各行列を  $h'$  で偏微分すればよい。もちろん実際の計算においては  $A$  や  $B$  を求めてから偏微分するのではなく、各要素ごとに偏微分した行列を全要素について組み立てるわけであり、行列の中には各確率変数の2次の項がないため、それは容易である。すると式(4.10)から  $\bar{D}_h \bar{h}$  が求められることになる。

式(13)と同様に、次の2式が求められる。

$$\bar{A} \cdot \bar{D}_u \bar{h} = -\bar{D}_u \bar{A} \cdot \{E_n * \bar{h}\} + \bar{D}_u \bar{B} \cdot \{E_n * \bar{h}'\} + \bar{D}_u c \quad (14)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{D}_h \bar{h} = -\bar{D}_h \bar{A} \cdot \{E_n * \bar{h}\} + \bar{D}_h \bar{B} \cdot \{E_n * \bar{h}'\} \quad (15)$$

するとこれらの式から、 $\bar{D}_u \bar{h}$ ,  $\bar{D}_h \bar{h}$  がそれぞれ求められるわけである。この  $\bar{D}_h \bar{h}$  は、本来の意味からすれば単位行列になるはずである。しかしここでは先に述べたように、式(6)が非線形であるので、 $D$  の下の小文字の  $h$ , すなわち偏微分するがわの  $h$  を  $A$  や  $B$  の中に含まれている確率変数と考えているため、それと偏微分されている  $h$  とは別のものとする必要がある。

次に、式(11)に現れる種々の共分散行列について考えてみよう。まず各共分散の間には次のような関係が成り立っていることは明らかであろう。

$$P_{h'h} = P_{hh}^T \quad (16)$$

$$P_{h'u} = P_{uh}^T \quad (17)$$

$$P_{hu} = P_{uh}^T \quad (18)$$

すると、 $P_{h'u}$  が前のタイムステップでの  $P_{hu}$  であることを考えるならば、未知の共分散行列は2種類だけとなる。

まず  $P_{hu}$  については式(8)から次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P_{hu} &= E[(h - \bar{h}) \cdot (u - \bar{u})^T] \\ &= E[\{\bar{D}_h \bar{h} \cdot (h' - \bar{h}') + \bar{D}_u \bar{h} \cdot (u - \bar{u}) + \bar{D}_h \bar{h} \cdot (h - \bar{h})\} \cdot \{u - \bar{u}\}^T] \\ &= \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{h'u} + \bar{D}_u \bar{h} \cdot P_{uu} + \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{hu} \quad (19) \end{aligned}$$

するとこの式を移項して次のような式がえられる。

$$\therefore (E - \bar{D}_h \bar{h}) \cdot P_{hu} = \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{h'u} + \bar{D}_u \bar{h} \cdot P_{uu} \quad (20)$$

$\bar{D}_h \bar{h}$ ,  $\bar{D}_h \bar{h}$ ,  $\bar{D}_u \bar{h}$  等はすでに計算されており、 $P_{uu}$ ,  $P_{h'u}$  は既知であるから、この式から  $P_{hu}$  が求められる。この  $P_{hu}$  についても初期値、すなわち初期水位における  $P_{hu}$  については、直接水位を与えるならすべて0でよいし、定常解を計算して求めるのであればその際に求めておく必要があることになる。

$P_{hh'}$  についても同様に次の式が成り立つ。

$$\therefore (E - \bar{D}_h \bar{h}) \cdot P_{hh'} = \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{h'h'} + \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{hh'} \quad (21)$$

式(20)と同様に全ての項がえられているから、この式から  $P_{hh'}$  が求められる。この式については、初期値は

必要ではない。これによって、式(6)の右辺の未知の行列は総べて値がえられて、水位の共分散行列  $P_{hh}$  を求めることが出来るようになったわけである。

さて以上の式では、 $\bar{D}_h \bar{h}$ ,  $\bar{D}_h' \bar{h}$ ,  $\bar{D}_u \bar{h}$  の各項を式(13), 式(14), 式(15)を解くことによって求めたとしているわけであるが、ここで次のような行列を定義してみよう。

$$X = \bar{A} \cdot \bar{D}_h' \bar{h} \dots\dots\dots (22)$$

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{D}_u \bar{h} \dots\dots\dots (23)$$

$$Z = \bar{A} \cdot \bar{D}_h \bar{h} \dots\dots\dots (24)$$

このような  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  を用いるために、式(6), 式(20)と(21)に左から  $\bar{A}$  行列をかけ、式(6)にはさらに  $\bar{A}$  の転置行列を右からかけてそれぞれの式を書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot P_{hh} \cdot \bar{A}^T &= X \cdot P_{h'h'} \cdot X^T + X \cdot P_{h'u} \cdot Y^T + X \cdot P_{h'h'} \cdot Z^T + Y \cdot P_{uh} \cdot X^T \\ &\quad + Y \cdot P_{uu} \cdot Y^T + Y \cdot P_{uh} \cdot Z^T + Z \cdot P_{hh'} \cdot X^T + Z \cdot P_{hu} \cdot Y^T + Z \cdot P_{hh} \cdot Z^T \\ &\dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$[\bar{A} - Z] \cdot P_{hu} = X \cdot P_{h'u} + Y \cdot P_{uu} \dots\dots\dots (26)$$

$$[\bar{A} - Z] \cdot P_{h'h'} = X \cdot P_{h'h'} + Y \cdot P_{uh'} \dots\dots\dots (27)$$

式(11), 式(20), 式(21)を使うためには、まず式(13), 式(14), 式(15)を解かねばならない。これに対して式(25), 式(26), 式(27)を用いるならばその必要はなく、かわりに式(25)を解く手順が必要であるが、比較するとこちらのほうが計算時間が少なくてすむ。そのため、実際の計算においては  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  といった行列を用いた。

なお、河川水位の共分散の導入は、Dirichlet 境界条件と同様の方法を用いた。すると、河川水位だけは前のタイムステップとの遅れ分散を与えなければならない。

また、式(10), 式(11)のように共分散行列を求めるにあたって、たとえば式(8)のように1次でなく、2次以上のテーラー展開を行うとすると、単に計算すべき項が増えるだけでなく、3次以上のモーメントを与える必要がある。さらに時間を追って計算していくにつれ、必要となるモーメントの次数も増えて行くため、なんらかの簡略化を行わねばならない。このように2次以上のテーラー展開を行っても、厳密とは成りえないように、必要となる計算が幾何級数的に増えていく。このことを考えるなら、本研究の目的にも照らして、テーラー展開は1次で十分であると考えられる。

## 4. 仮想領域を対象としたシミュレーション

### 4.1 各種計算条件の設定

解析の対象領域は Fig. 1 に示すような仮想領域で、それを Fig. 2 のように分割する。山の部分から境界流入量があり、平地の部分へは流出がある。各土地利用に応じた有効間隙率、透水係数の平均値データおよびかん養量の推定方法を Table 1 と Table 2 に示す。

そして Fig. 3 に示す降雨のデータを用いてえられたかん養量を、Fig. 4 に示す。この図からわかるように、都市ではかん養が少なく、水田ではかんがい期に水田からのかん養があるとしている。また境界流入量と河川水位のデータを Fig. 5 に示す。

初期水位の分布は、基盤高さに 10 m を加えたものとした。基盤高さは節点 1 において 0 m とし、その他の節点においては節点 1 との距離の 0.01 倍をその地点の基盤高さとした。

### 4.2 種々の解析例

まず計算した解析の各ケースの条件を Table 3 に示す。各ケースの  $Q$  はかん養量、 $F$  は境界流入量、

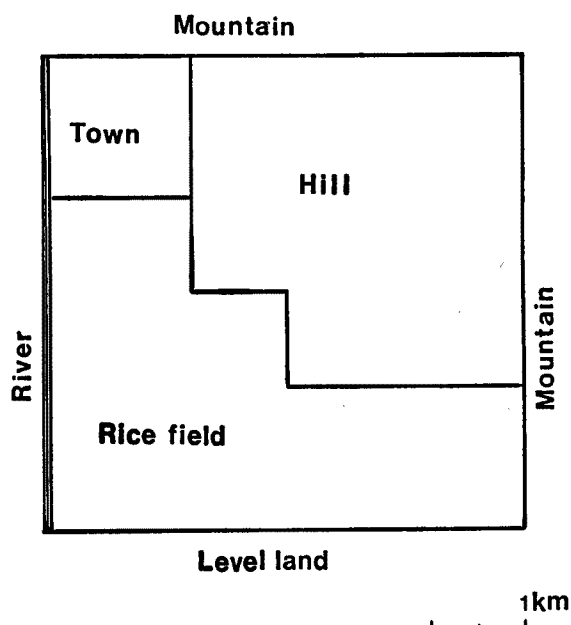


Fig. 1 Sketch of study field and its land use.

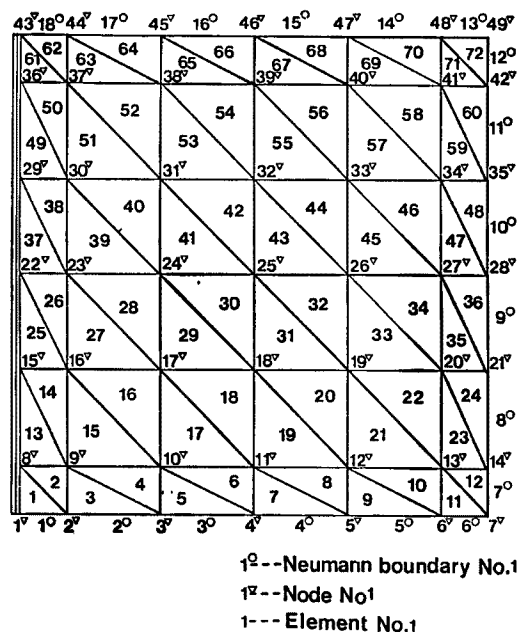


Fig. 2 Division of sphere.

Table 1 Mean data of area

| Land use                                          | Hill                                   | Town                                   | Rice field                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Effective porosity                                | 0.1                                    | 0.1                                    | 0.1                                                                                                                          |
| Hydraulic conductivity ( $\times 10^{-3}$ cm/sec) | 5.0                                    | 3.0                                    | 3.0                                                                                                                          |
| Recharge to groundwater (mm/day)                  | $1.2 \times$<br>(Recharge by rainfall) | $0.3 \times$<br>(Recharge by rainfall) | $1.0 \times [\max \times \{(\text{Recharge by rainfall}), (\text{Recharge by rice field})\} - (\text{Recharge by pumping})]$ |

Table 2 Data of recharge to groundwater by rice field and pumping

|                                       | Recharge to groundwater by rice field (mm/day) | Recharge to groundwater by pumping (mm/day) |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Non irrigation season, Time step 1-14 | 0.7                                            | 0.0                                         |
| Irrigation season, Time step 15-60    | 2.5                                            | 0.04                                        |

K は透水係数, N は有効間隙率, Z は基盤高さ, R は河川水位, H0 は初期水位, A はそれ以外を示し, M は変数が正規分布に従うとしてモンテカルロ・シミュレーションで計算したことを示す。また各ケースの 1 は現実に似せて全節点, 全時間で誤差があるとしており, 各ケースの 2 の条件はモンテカルロ・シミュレーションのそれと合わせてある。

モンテカルロ・シミュレーションによるものを除くと, 全てのケースで平均水位は同一の値を取り, モンテカルロ・シミュレーションによるものもほぼそれと一致している。ここで平均水位の代表例を Fig. 6 に示す。平均水位の空間的分布は, 時間的に肉眼ではわからない程度の変化しか示さないことが図からもわか

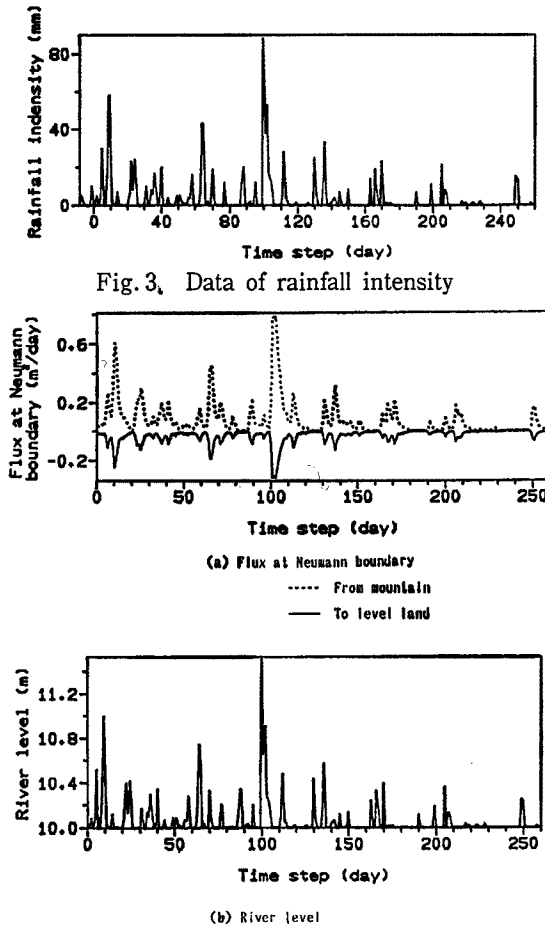


Fig. 3. Data of rainfall intensity

Fig. 5 Data of flux at Neumann boundary and river level.

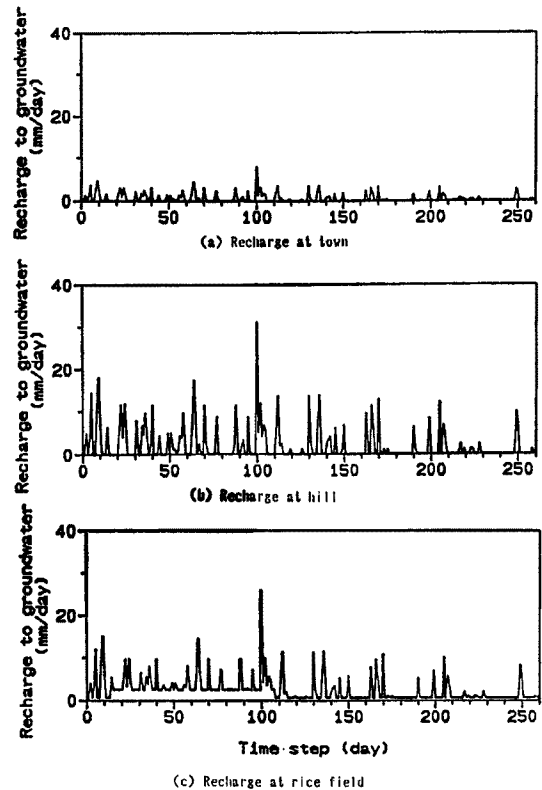


Fig. 4 Data of recharge to groundwater.

る。時間的変動は土地利用によって異なり、節点10のように水田ではかん養期に水位が上がり、節点31のように都市では常に水位が下がり気味である。これらは降水量と比較すると妥当な動きを示しており、現実の地下水位をうまくシミュレートしていると言える。

#### 4.3 解析例についての考察

節点10の全時間のかん養量が変動係数  $COV=0.3$  の誤差を持つ case Q3 の結果を、Fig. 7 に示す。この図のように、節点10のかん養量の誤差はその点でもっとも大きく、周辺を除くと遠くまでは伝わらない。ここで周りにもやや大きい誤差が出ているのはかん養量を要素で線形近似しているためで、節点10はもちろん節点3などにもその誤差が加わることになる。しかしそのことを考えるなら、かん養量の誤差はほぼその地点にのみ影響し、周囲には伝わりにくいと言える。このことから、かん養量を線形近似することは妥当であるといえる。なぜなら、例えば要素の中の一部の地点でかん養量が線形近似された値より異なっても、その影響は節点での水位にまで及びにくいと考えられるからである。また水位からかん養量を推定する場合、周りのかん養量の影響がでにくいと、比較的推定しやすい。ただし推定できるのは水位のわかっている地点でのかん養量で、他の地点のかん養量は推定できない。なお水位から推定するとは、例えばモデルを構築して逆問題としてパラメータを同定するといった手法をイメージしている。なお以下ですべての図の縦軸は、特に断わらない限り縮尺が一定ではないので、その値に注意されたい。

Neumann 境界からの流入量が、全境界、全時間に  $COV=0.6$  の誤差を持つ case F1 の結果が Fig. 8 で

Table 3 Random variations of each case

| Case | Random variation                                     | Case | Random variation                                                                     |
|------|------------------------------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Q1   | COV of Q at all time at all nodes are 0.3            | Z2   | Standard deviation of Z at node 10 is 1(m)                                           |
| Q2   | COV of Q at node 10 at time 1 is 0.3                 | R1   | Standard deviation of R at all Dirichlet boundary are 0.01(m)                        |
| Q3   | COV of Q at node 10 at all time are 0.3              | A1   | All variables have COV or standard deviation which are equal to those of each case 1 |
| Q4   | COV of Q at node 10 at all time are 0.1              | A2   | COV of Q at all time at node 10 are 0.3 and COV of N at node 10 is 0.2               |
| F1   | COV of F at all Neumann boundary at all time are 0.6 | A3   | COV of K at node 10 is 0.6 and COV of N at node 10 is 0.2                            |
| F2   | COV of F at Neumann boundary 8 at time 1 is 0.6      | A4   | Almost same as case A1 but standard deviation at node 10 at all time are 0.5(cm)     |
| F3   | COV of F at Neumann boundary 8 at all time are 0.6   | A5   | COV of Q at all time at node 10 are 0.3 and COV of K at node 10 is 0.6               |
| F4   | COV of F at Neumann boundary 8 at all time are 0.3   | H1   | Standard deviation of H0 at all nodes are 0.1(m)                                     |
| K1   | COV of K at all nodes are 0.6                        | H2   | Standard deviation of H0 at node 10 is 0.1(m)                                        |
| K2   | COV of K at node 10 are 0.6                          | MQ   | Same as case Q2 but calculated by Monte Carlo simulation                             |
| K3   | COV of K at all nodes are 0.6 and have covariance    | MF   | Same as Case F2 but calculated by Monte Carlo simulation                             |
| N1   | COV of N at all nodes are 0.2                        | MK   | Same as case K2 but calculated by Monte Carlo simulation                             |
| N2   | COV of N at node 10 are 0.2                          | MN   | Same as case N2 but calculated by Monte Carlo simulation                             |
| Z1   | Standard deviation of Z at all nodes are 1(m)        | MZ   | Same as case Z2 but calculated by Monte Carlo simulation                             |

Q: Groundwater recharge    F: Flux at Neumann boundary    K: Hydraulic conductivity  
 N: Effective porosity        Z: Base height    R: River level    H0: Initial head

ある。標準偏差の空間的分布を見ると、その誤差の影響はほぼ境界にとどまっており、内部にまで及んでいない。実際、標準偏差の時間的変動を見ると、境界上にある節点5に比べて、一つ内部にある節点20の標準偏差の大きさは8分の1程度になり、もう一つ内部にある節点19になるとさらにその6分の1程度になっている。このことから、境界流入量の誤差の影響は内部にまで及ばないためさほど厳密に推定する必要がないといえるし、また内部の水位の動きから推定することは困難であるともいえる。もし地下水位を観測して境界流入量を推定しようとするなら、境界上の水位を観測する必要がある。

全節点での透水係数が  $COV=0.6$  の誤差を持つ case K1 の結果が Fig. 9 である。標準偏差の空間的分布を見ると、境界流入量のある節点でのみやや大きい、他はほぼ一様に分布している。また時間的変動を見ると、ある程度の値に達するとほぼ定常になるようなきれいな曲線を描いている。これは透水係数が水平方向の流動に関わっているため、平均水位の変動が少ないため、水平方向の流量は変化せず、そのためこのようなきれいな曲線になったと思われる。このことから、透水係数の推定においては時間が50日程度を越



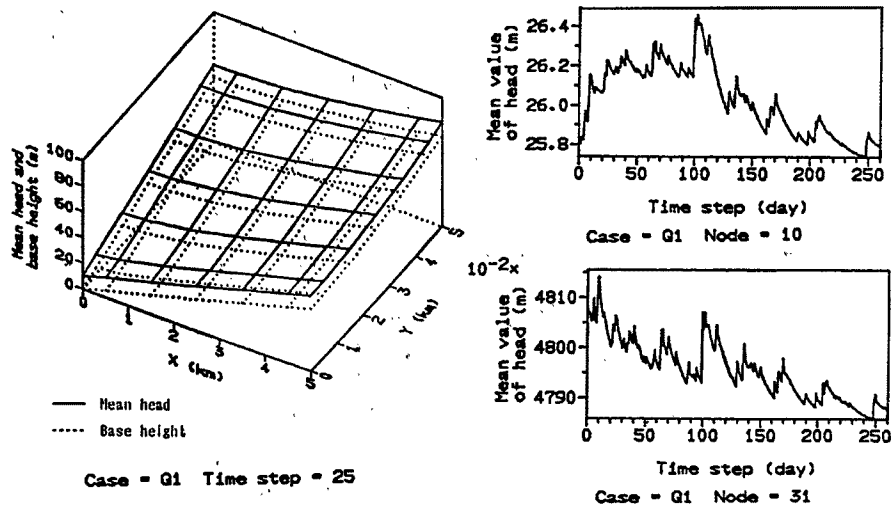


Fig. 6 Spatial distribution and time variation of mean head and base height.

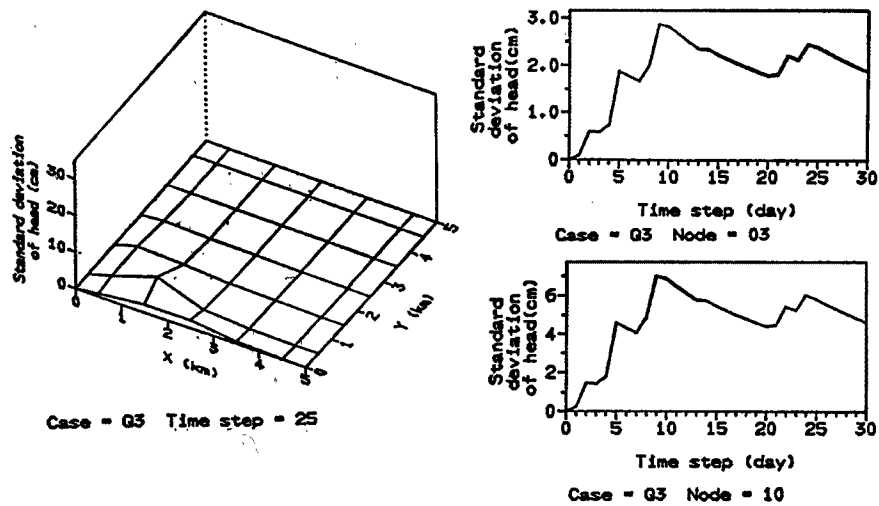


Fig. 7 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case Q3.

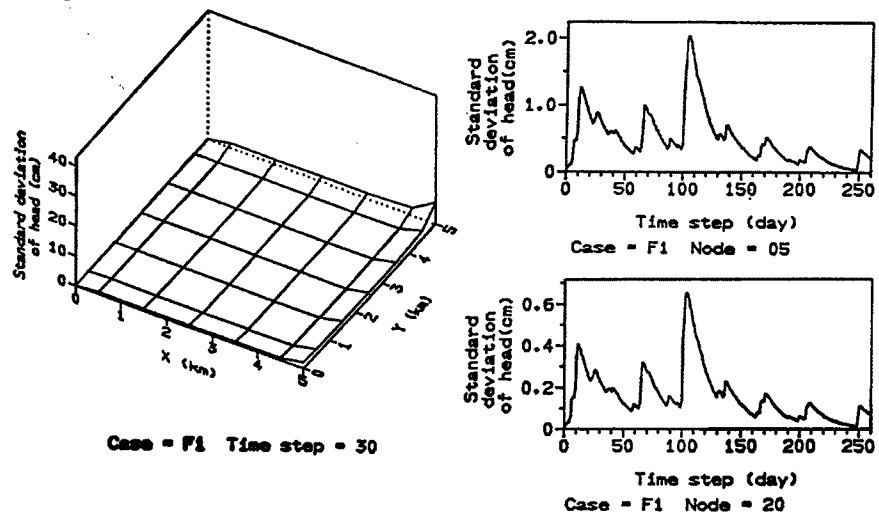


Fig. 8 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head case F1.

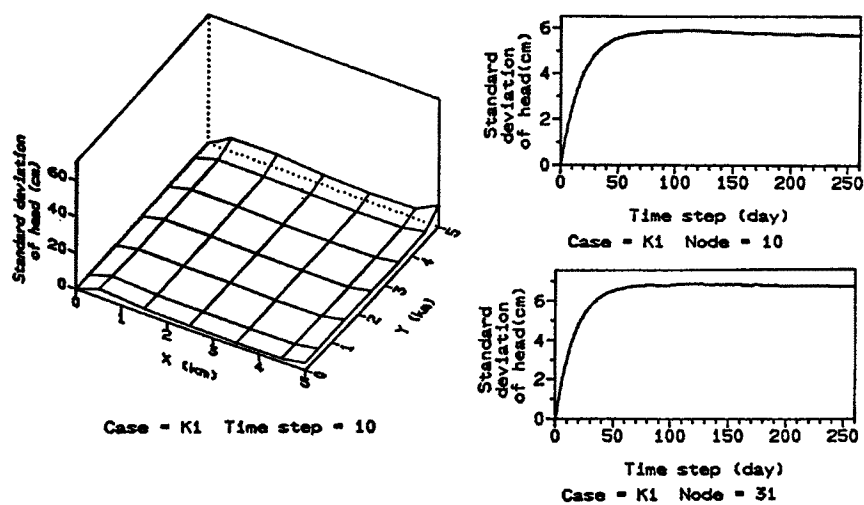


Fig.9 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case K1.

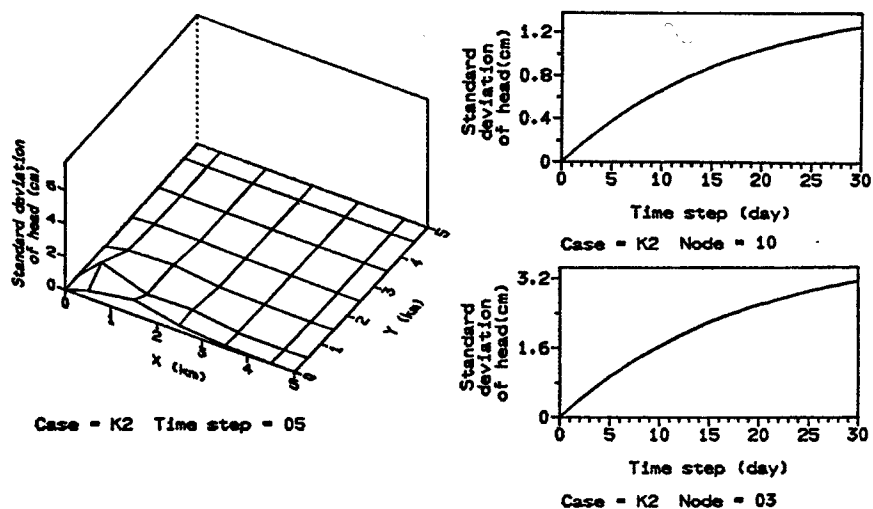


Fig.10 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case K2.

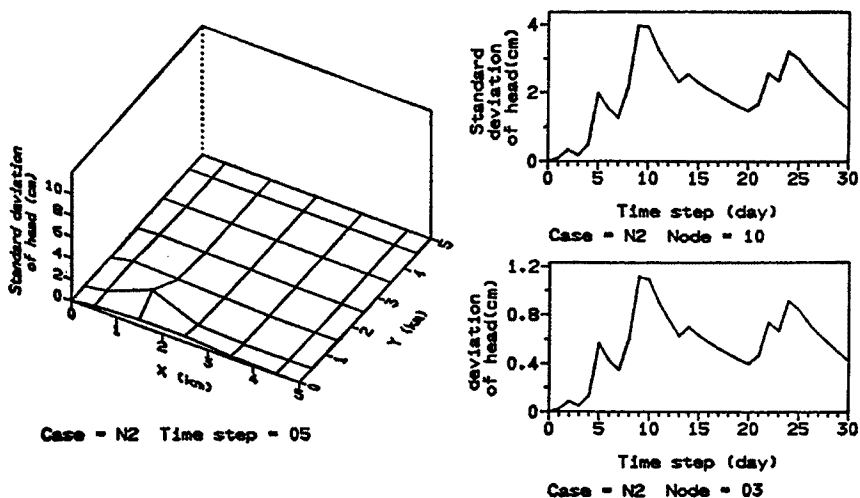


Fig.11 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case N2.

えると意味がなく、せいぜい20程度の日数までとどめておかなければ、推定の効率が下がると考えられる。

また節点10の透水係数のみが  $COV=0.6$  の誤差を持つ case K2 の結果を Fig. 10 に示す。標準偏差の空間的分布を見ると、誤差のある節点よりも、その周囲の節点に影響が及んでいることがわかる。このことから、透水係数は線形近似に馴染みにくいと考えられる。なぜなら、要素の中で透水係数が線形近似された値と異なる場合、周囲の水位に影響が出て、そのため推定する場合に思わぬ誤差が出やすくなる。そこで、透水係数は要素内で一定であるとする方が線形近似するよりもよいと思われる。これは、透水係数の値が非常に大きな範囲で変動することからも妥当であるといえる。

節点10の有効間隙率が  $COV=0.6$  の誤差を持つ case N2 の結果を Fig. 11 に示す。有効間隙率もかん養量と同様に、誤差を持つ地点の水位にのみ影響を与える。すなわちかん養量と同様に、有効間隙率も線形化して差し支えないといえよう。標準偏差の空間的分布は case Q3 と似ており、時間的変動もややにているものの、このケースの方が降雨がないとはやく0にちかづく。有効間隙率はいわば土の隙間であるから、誤差を持った場合にはかん養量の大小に応じて水位に影響を与えるため、この2つのケースが似通っていると考えられる。

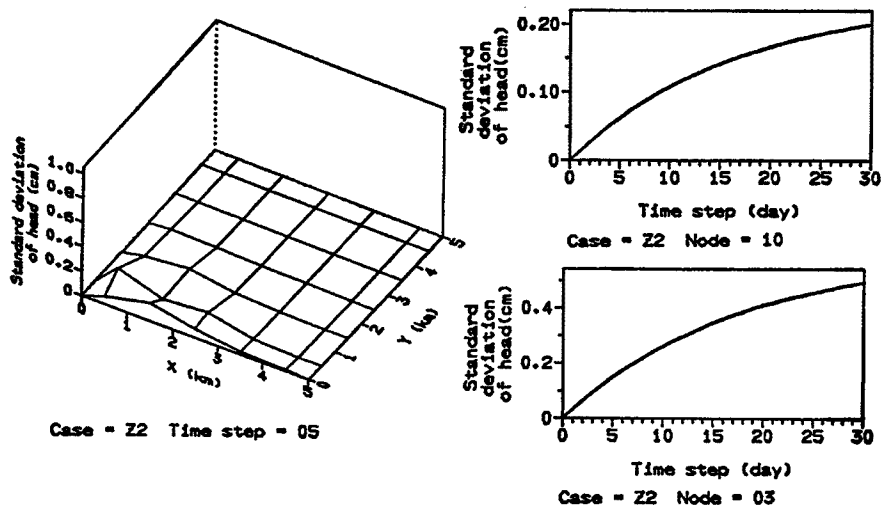


Fig. 12 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case Z2.

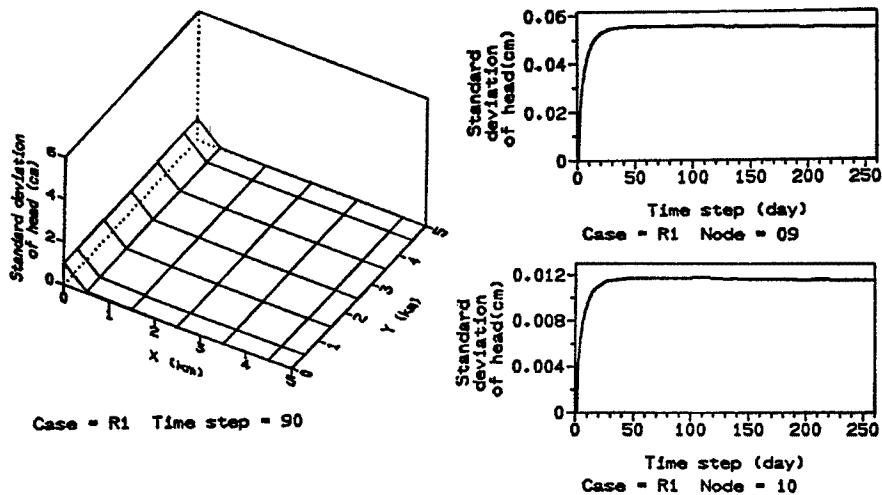


Fig. 13 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case R1.

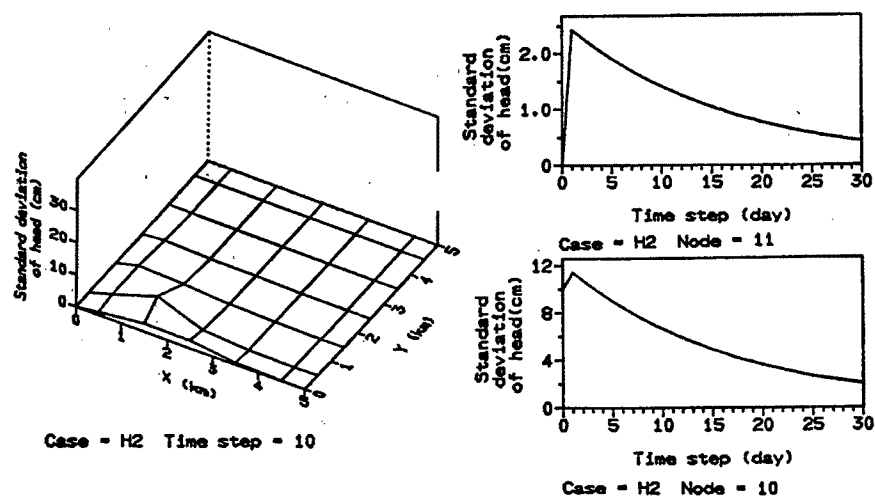


Fig.14 Spatial distribution and time variation of standard deviation of head at case H1.

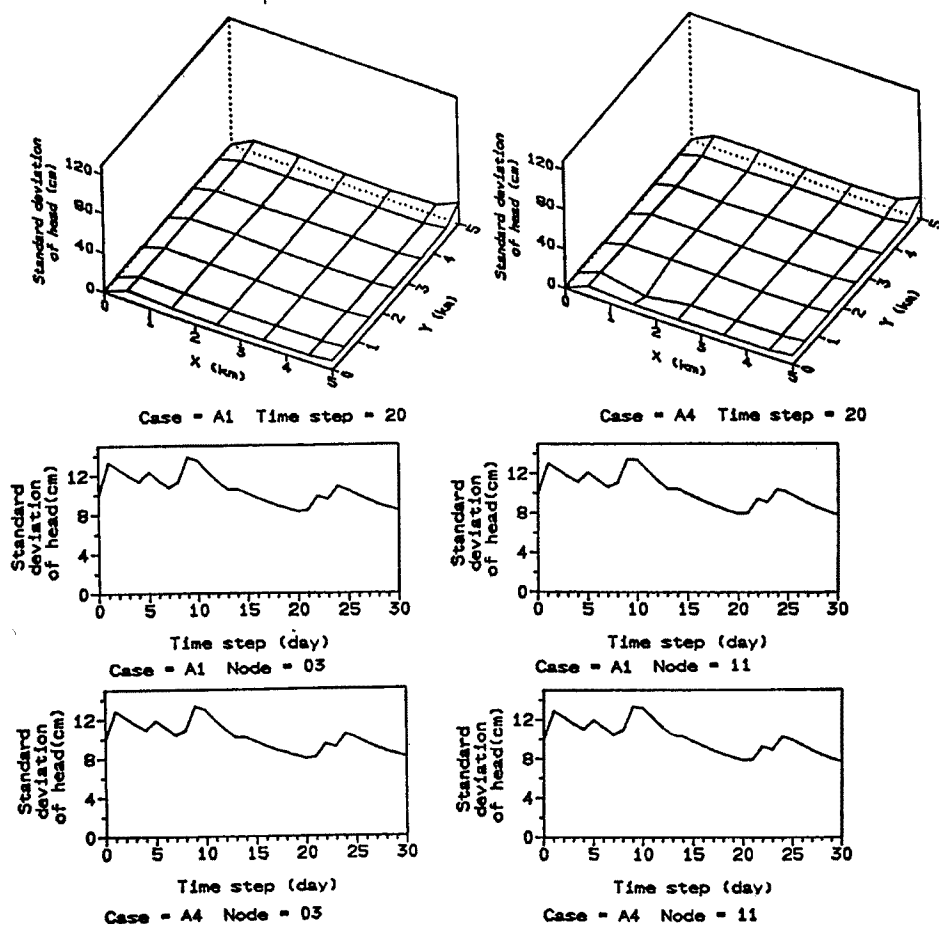


Fig.15 Comparison of standard deviation between case A1 and case A4.

節点10での基盤高さが 1(m) の標準偏差を持つ case Z2 の結果を Fig.12 に示す。透水係数の場合と似ているが、値が小さい。このように値が小さいことと、元来基盤高さは空間的に連続的に変化することを考え合わせると基盤高さも線形化してよいし、またさほど厳密な値は必要でない。

全河川節点が、0.01 (m) の標準偏差を持つ case R1 の結果が Fig.13 である。標準偏差の空間的分布を見ると、河川の誤差の影響は内部まで及んでいない。さらに内部での時間的変動を見ると、水位の誤差は 0.1 (mm) 程度であり、無視しうほど小さい。ただし 1 (cm) の誤差しか与えていないのは、河川水位が測定されていると考えているためで、そうでないなら誤差は10倍以上になると考えられる。

節点10の初期水位が 0.1 (m) の標準偏差を持つとする case H2 の結果が Fig.14 である。初期水位の影響も、周囲には伝わりにくい。

節点10に井戸があり、水位の標準偏差が 0.5 (cm) とわかっていて、後の条件は case A1 と同じである case A4 の結果と、case A1 の結果を比較したのが、Fig.15 である。標準偏差の空間的分布を見ると、節点10でのみ値が小さくなっているようである。時間的変動を見ると、周りの標準偏差の値は、ほとんどかわらない。実際の数値を見てみると、4 から 5 (mm) 程度、case A4 のほうが標準偏差が小さくなっている。

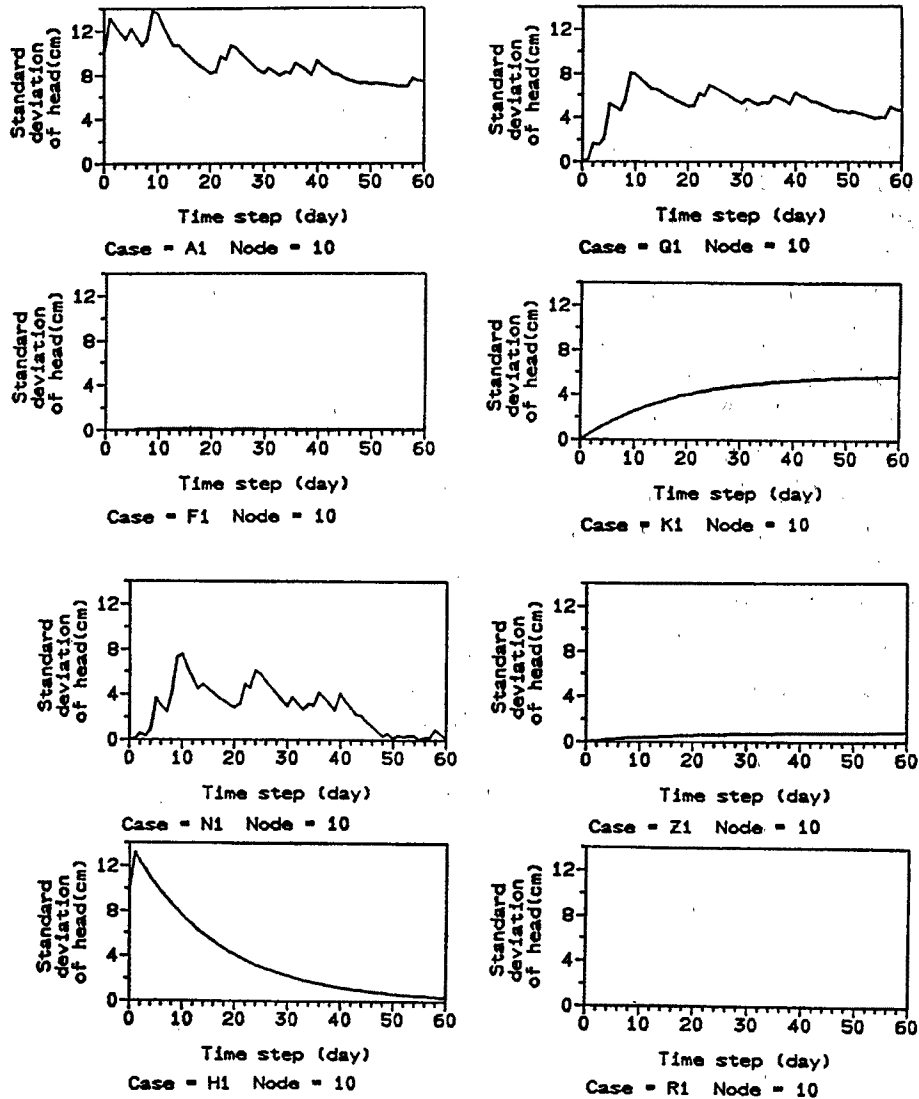


Fig.16 Comparison of standard deviation among all cases 1.

どの変数の誤差が水位に与える影響が大きいかわかるために、全ケースの1の結果を、縦軸を合わせて比較したのが **Fig. 16** である。図からみて、明らかに境界流入量、基盤高さ、河川水位の誤差の影響は無視できるほど小さく、初期水位の誤差の影響も、時間と共に小さくなっていく。そして透水係数、有効間隙率、かん養量の誤差がほぼ同程度の影響を与えている。また水位の標準偏差は全ケースのその単純な足し算とならず、非常に打ち消しあっていることがわかる。

#### 4.4 観測システムへの示唆

これまでにもこの章で述べてきたことであるが、パラメーターの線形化については、透水係数を除けば線形化して差し支えない。透水係数だけは線形化するよりも要素内で一定であるとしたほうがよいであろう。

しかしそうすると透水係数の同定に際して問題が出てくる。即ち、実際のデータをいかにして同定の手順の中に導入するかである。線形化を行った場合は、実際のデータをその地点での真値として代入すればよかった。これは簡単ではあるが、問題点を含んでいる。まずモデルの真値と実際にえられたデータは同一ではない。透水係数は水平方向の流動に関わっており、空間的に領域を離散化している以上、モデル真値とは離散化された小領域での重み付き平均値であり、透水係数のようにオーダー的に変動する場合、モデル真値と実際のデータとは異なることが多い。

また **Fig. 10** のように、透水係数の影響が周囲の水位により大きく及ぶため、透水係数を同定する際に、実際のデータを真値として代入すると、要素の内部での透水係数の値が周りの節点での透水係数の値に影響してしまう。すなわち、真値が与えられている点の透水係数はそれ以外の値を取れないため、水位を合わせるために周りの節点での透水係数が非常に大きく、あるいは小さく同定されてしまう恐れがある。

そこで実際のデータも、Townley と Wilson の研究<sup>5)</sup>での事前推定された透水係数の扱いと同じく、その値と推定された値との差が小さくなるように目的関数を替えることによって導入すれば良い。

以上では透水係数のみを同定する場合を考えているが、**Fig. 16** を見ても分かるように、かん養量や有効間隙率なども同定すべきである。しかしそうなると同定すべきパラメーターの数が多くなり過ぎるのであれば、次のような条件を満たす必要がある。即ち最低でも水位を観測する場所のかん養量と有効間隙率を知る必要がある。これは **Fig. 7** や **Fig. 11** のようにかん養量と有効間隙率の誤差の影響は誤差のある地点で大きいので、これらの影響と透水係数の影響を分離せねばならない。あるいはこの条件も難しいのであれば、せめて降雨のない時期を選んで同定すべきであろう。これはかん養量と有効間隙率の影響が主に降雨によって左右されるため、これらの影響をできるだけ少なくするためである。

以上のような考察を含めて、現実には浅層地下水を利用する際に必要な手順は次のようになる。

まず対象領域を定めねばならないが、**Fig. 8** からわかるように、境界流入量の影響は境界上か、厳密にみてもそれより1つ内部に入った節点までしか及ばないことから、必要とされるよりもやや大きめに取って置いて、領域の分割を境界付近においてやや細かくすれば良い。河川水位の影響を避けるために、河川の近くでも同様のことを行う必要があることは **Fig. 13** から明かである。

モデルの構築に当たっては、かん養量や有効間隙率、基盤高さなどは線形近似でよいが、透水係数だけは要素内で一定としたほうがよい。場所的なデータとしては、基盤高さはそのおおよそがわかっているが、有効間隙率は、できれば水位が観測できる全ての井戸の周辺の値をえることが望ましい。透水係数については、もちろん多くの地点でわかっているほどよいが、あくまでもそれを真値ではなく不確かな情報として取り扱う必要がある。境界流入量は推定値でよいし河川水位もさほど精密には知る必要はないが、いくつかの地点での観測は必要であろう。かん養量も、井戸の周辺でわかっていることが望ましい。初期水位は、井戸ではわかっているはずであるから、そのほかの地点ではさほど厳密でなくてよい。

また運用の、すなわちモデルのタイムステップの単位は1日程度がよく、それ以上だとかん養量の変化からくる水位の変化に対応できない。

浅層地下水の利用システムを動かしたすと、数値モデルから各地点での平均地下水位を計算すると同時に、

得られた観測水位から透水係数を各時間ごとに同定する。この際、有効間隙率とかん養量の影響を避けるために、降雨の少ない時点でのみ同定するか、あるいは降水量に応じて推定の精度に重みをつける。または各時間ごとに同定をおこなうかわりに、**Fig. 9** から考えて30日程度を1ステップとして同定したほうがよいかも知れない。

そして本研究の手法を用いて、各パラメーターの推定誤差から地下水位の標準偏差を計算し、システムの安全度として用いる。また特に水位の信頼性を高くする必要がある地点では、有効間隙率を知る必要がある。透水係数が時間と共にゆっくりと水位に影響を与えるのに対し、有効間隙率やかん養量は各時間ごとにすぐさま水位に影響を与えるものの、長期的にみれば透水係数ほど水位に影響しない。この違いを常に把握しておく必要がある。

また水位の観測点を増やす際には、case A4で行ったように、ある地点の水位の標準偏差が観測誤差となるところとした場合、全領域にわたっての標準偏差の和と、それが無い場合のそれとの差をとって、その差がもっとも大きくなる地点に観測点をあげばよい。その最適点の選定は、節点の数が少ないことから、さほどの手間をかけずに済むはずである。有効間隙率やかん養量の観測点を選ぶ際にも同様のことが言える。いずれも、ある点での標準偏差が観測誤差に等しいとして、その観測がない場合との、全領域にわたっての標準偏差の和の差がもっとも大きくなる、すなわちその観測によって最も標準偏差が少なくなる地点を選べばよい。

## 5. 結 論

本研究は、浅層地下水の平面的流動を表す数値モデルを有限要素法を用いて構成し、テラー展開の1次の項を利用した確率的手法をそれに導入することによって、各パラメーターの誤差が、地下水位に与える影響をシミュレートするシステムを作り上げたものである。

これまでの地下水に関する研究は、パラメーターの同定にしてもやみくもに、いわば手探りの状態で行われてきた。もちろんここでいうのはその数学的手法についてではなく、何を同定すべきなのか、どのような条件で同定すべきなのかといった前提条件についてである。このような点を明らかにすることが本研究の目的であった。

ここに、えられた成果を要約すると、以下のようになる。

### ① 各パラメーターの誤差の空間的、時間的分布

このことによって、どのパラメーターが水位に大きな影響を与え、どのパラメーターの影響が無視できるほど小さいか、またその影響は時間的にどのように増えていくのか、空間的にはどのような広がりを持つのかといった点が明かとなった。

### ② パラメーターの同定手法への示唆

同定すべきパラメーターが透水係数と有効間隙率、かん養量であることがわかり、また透水係数は線形近似を行うべきでなく、要素内で一定であるとすべきことが明かとなった。さらに透水係数のみを同定するなら、水位の観測を行う地点での有効間隙率とかん養量を知っておく必要があることが明らかとなった。

### ③ 本研究のシステムの、地下水流動モデルの安全度評価への適用

本研究で用いたシステムによって、パラメーターの推定誤差から水位の誤差がえられるため、これを安全度として用いることができる。

### ④ 観測システムへの示唆

何らかの観測点を設ける際に、標準偏差の減少を情報量として捉えることによって、最適な観測位置を選ぶ基準を示した。

### ⑤ 地下水利用システムへの示唆

どのようなデータをどのような精度で手にいれ、どのような場所で手にいれるべきであることを示した。

## 参 考 文 献

- 1) Thomas, F. M. and Holtz, D (1978) : The use and utility of numerical models in groundwater-related water resource management, ICSU-SCOPE (地下水管理モデル, 水収支研究グループ訳, 社団法人環境情報科学センター)
- 2) 水収支研究グループ (昭和51年) : 地下水盆の管理, 東海大学出版会
- 3) Neumann, S. P. and Yakowitz, S (1969) : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, Water Resources Research, Vol. 15, No. 4, pp. 845-860.
- 4) 上田年比古, 神野健二, 平野文昭 (昭和59年) : 室見川流域の透水量係数と非定常地下水位の推定, 第28回水理講演会論文集, 1984年2月, pp. 601-608.
- 5) Townly, L. R. and Wilson, J. L. (1985) : Computational efficient algorithms for parameter estimation and uncertainty propagation in numerical models of groundwater flow, Water Resources Research, Vol. 21, No. 12, pp. 1851-1860.
- 6) Dettinger, M. D. and Wilson, J. L. (1981) : First order analysis of uncertainty in numerical models of groundwater flow, Part 1. mathematical developement, Water Resources Research, Vol. 17, No. 1, pp. 149-161.