

一 様 水 路 の 不 定 流

高 橋 保

THEORY OF ONE DIMENSIONAL UNSTEADY FLOWS IN AN PRISMATIC OPEN CHANNEL

By *Tamotsu* TAKAHASHI

Synopsis

This paper treats with the unsteady flows in prismatic open channels by the theoretical analysis of one dimensional equation of motion and continuity. The author has shown that unsteady flows in an prismatic channel can classified by an index λ , where $\lambda \equiv (H_m - H_0)/i\sqrt{gH_m}Td$ has the value of the order of the ratio of water stage rising or falling speed to the vertical component of long wave celerity.

The critical value of λ , above which the wave breaks into a bore has obtained by the expansion of h and v in power series near the wave-front. Below the critical value, the bore formation is prevented and in the case where the value of λi is the order of unity or larger the waves propagate as "dynamic" and the Saint Venant equation must be modified for the effects of vertical acceleration, and if $\lambda i \ll 1$ the wave is "kinematic".

The author has obtained the second approximation of kinematic wave in the cases where $\lambda \ll 1$ and $\lambda i \ll 1$ and has compared the results with that obtained directly by the computer.

1. 緒 論

開水路非定常流の一次元解析法においては、基方程式としていわゆる Saint-Venant 式が使われ、古くからこれによって解析が進められてきており、多大の成果が得られている。とくに、最近の電子計算機の進歩により、計算技術上の問題点はあるが、種々の境界条件下において、かなり精度のよい数値解が短時間に求められるようになっている。したがって、Saint-Venant の方程式を基礎とするかぎり、その解を得る点に関しては残された問題は少ない。しかし、この Saint-Venant 式は Navier-Stokes の運動方程式において、鉛直および水平方向の加速度を省略して、流れが一次元的であると仮定して導き出されたもので、一様水路においても、そこに生起している流れをすべての場合に対して記述するには不十分であろう。したがって、Saint-Venant 式が示す開水路流れの物理的な特性について考察し、対象としている現象に対してこの式が十分であるという保証のもとに理論計算あるいは数値計算を進めなければならない。

林¹⁾は一様水路における洪水波を理論的に解析するにあたって、波頂における水位変動加速度と重力加速度の比によって特性が変化すると考えて、Saint-Venant 式に無次元量 $\sigma = \sqrt{-\ddot{F}(0)/g}/i$ を導入し、 $\sigma \ll 1$ の場合に波頂付近で σ に関する逐次近似解を求め、その解が実際の洪水波の低減特性をよく説明することを見出した。このように、Saint-Venant 式は洪水波のような波をよく説明できるが、 σ の値の他の領域についての特性はあまり明白ではなく、林は $\sigma \gg 1$ の場合には長波をあらわすとしている。

上述のように、 σ は Saint-Venant 式の特性を分類するには不十分であり、 $\sigma \ll 1$ の場合に対しても、 σ

の性格上議論が波頂付近にかぎられ、洪水ハイドログラフ全体の特性追跡に対しては不便である。このような点にかんがみ、本論文は不定流の特性を決定する要素としては水深の時間的な変化が重要であると考え、林のそれとは異なる新しい指標 λ を導入し、 λ の値によって Saint-Venant 式の特性がどのように変化するかを考察し、Saint-Venant 式の開水路不定流に対する適用限界について検討を加えるとともに、この式が現わす段波および洪水波の理論的な解析を試み、その問題点を明らかにしようとするものである。

2. 一様水路の不定に関する理論的考察

2.1 基礎方程式の無次元表示と指標 λ の導入

断面内平均流に対する一次元運動方程式および連続式は、広幅の長方形断面を考える場合には、Manning の抵抗則を用いて、

$$i - \left(1 - \frac{Q^2}{gH^3}\right) \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{gH} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gH^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{n^2 Q^2}{H^{10/3}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。ここに、 i ：水路勾配、 Q ：単位幅流量、 H ：水深、 n ：Manning の粗度係数、 g ：重力加速度、 x ：流下方向の距離、 t ：時間、である。対象としている現象に応じて (1)、(2) 式を連立に、与えられた初期および境界条件のもとで解く種々の方法が考案されているが、ここでは無次元化した方程式によって検討を加える。

林は長波性の指標として、

$$\sigma = \sqrt{-\ddot{F}(0)/g/i} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\ddot{F}(0)$ は波頂での水位上昇加速度、という無次元量を導入して、 $\sigma \ll 1$ の場合に、 σ による摂動解を求めて洪水波頂の通減率を求めているが、この理論では波形全体にわたる追跡ができないので、実際には各場所での $\ddot{F}(0)$ の値が不明であり、理論的に波高の通減状態を求めることができない。著者はこのような点にかんがみ、波形の伝播と変形に対しては、一次的にはむしろ水位の時間的な変化率が重要であると考え、そのようなことを反映する線型変換を採って基礎方程式の無次元表示をする。すなわち、上流端で Fig. 1 に示したような水位時間曲線が与えられたとき、(1)、(2) 式において、

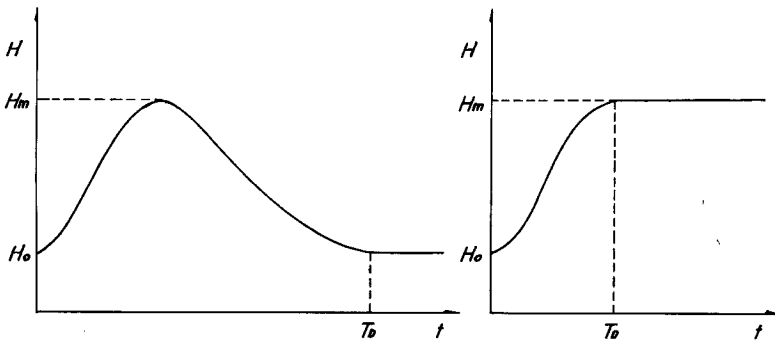


Fig. 1 Schematic diagram of $H \sim t$ curve at $x=0$.

$$\left. \begin{aligned} H &= H_m h \\ Q &= \sqrt{g} H_m^3 q \\ t &= \left(\frac{H_m}{H_m - H_0} \right) T_D \tau \\ x &= \sqrt{g} H_m^3 \left(\frac{1}{H_m - H_0} \right) T_D \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

のような変換をする。ただし、式中の記号は図に示したように、 T_D ：上流端の水位変化の継続時間、 H_m ：最大水深、 H_0 ：初期定常水深であり、 h, q, τ, ξ はそれぞれ H, Q, t, x の無次元量である。変換の結果、連続式は、

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

運動方程式は

$$\left(1 - \frac{1}{Fr^2} \frac{q^2}{h^{10/3}}\right) = \left\{ \left(1 - \frac{q^2}{h^3}\right) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{2q}{h^2} \frac{\partial q}{\partial \xi} \right\} \lambda \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに、

$$Fr^2 \equiv \frac{H_m^{1/3} i}{n^2 g} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\lambda \equiv \frac{H_m - H_0}{i \sqrt{g H_m T_D}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

であり、(7) 式は最大水深に対する Froude 数の 2 乗を示し、 λ はここで新しく導入された林の σ に対応する指標である。すなわち、 $(H_m - H_0)/T_D$ は水位上昇速度のオーダーの値を持っており、 $i \sqrt{g H_m}$ は最大水深に対応する長波の伝播速度の鉛直成分である。したがって、その比である λ の値によって不定流の性質は変化するものと考えられ、擬定流とみなされる洪水波では λ の値は 1 にくらべて十分に小さく、段波状の波では非常に大きい。以下、 λ によって Saint-Venant 式の示す挙動がどのように変化するかの考察を加えることにする。

2.2 段波の生成に関する考察

先に導入した λ の値が大きくなるにつれ、不定流は波動的性格を強く持つようになり、ある値を越えると波先で shock wave を形成することになるであろう。波先での水波の挙動についてはすでに Whitham & Lighthill²⁾ や Stoker³⁾ の研究があり、ここでも Whitham & Lighthill の方法に従って考えることにしよう。

波先において v と h を展開するために、

$$\left. \begin{aligned} X &= \tau \\ Y &= (v_0 + c_0) \tau - \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

のような変数変換を行なう。ただし、 v_0, c_0 はそれぞれ基底流に対する平均流速および長波の伝播速度の無次元表示で

$$v_0 = \frac{H_0^{2/3} i^{1/2}}{n \sqrt{g H_m}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{H_0}{H_m}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。

運動方程式 (6) を (9) 式によって変数変換すると、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{Fr^2} \frac{v^2}{h^{4/3}}\right) &= \left\{ \left(-1 - \frac{v^2}{h} + \frac{v v_0 + v c_0}{h}\right) \frac{\partial h}{\partial Y} + \frac{v}{h} \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \right. \\ &\quad \left. + (v_0 + c_0 - 2v) \frac{\partial v}{\partial Y} \right\} \lambda \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

同様に、連続式 (5) を変数変換すると

$$\frac{\partial h}{\partial X} + (v_0 + c_0) \frac{\partial h}{\partial Y} - v \frac{\partial h}{\partial Y} - h \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここで、 v, h を Y のべき乗に展開し、

$$\left. \begin{aligned} v &\equiv v_0 + v_1(X)Y + v_2(X)Y^2 + \cdots \\ h &= h_0 + h_1(X)Y + h_2(X)Y^2 + \cdots \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (14)$$

のように書く。(14) 式において Y の 1 乗の項まで考慮して、これを (12), (13) 式に入れ、 Y の 0 次、1 次の項に対して別個に (12), (13) 式が成立するという条件を用いる。まず (12) あるいは (13) 式の Y の 0 次項より、

$$h_1 = v_1 c_0 \cdots \cdots \cdots (15)$$

であり、 Y の 1 次項から出る運動方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{F_r^2} \frac{v_0^2}{h_0^{4/3}} \left(\frac{2}{c_0 v_0} - \frac{4}{3} \frac{1}{h_0} \right) h_1 &= \lambda \left\{ h_1^2 \left(-\frac{v_0}{h_0 c_0} - \frac{1}{h_0} - \frac{c_0 v_0}{h_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{v_0}{h_0} + \frac{1}{c_0} \right) \frac{\partial h_1}{\partial X} - \frac{2C_0}{h_0} (c_0 - v_0) h_2 + 2(c_0 - v_0) v_2 \right\} \cdots \cdots \cdots (16) \end{aligned}$$

連続式は

$$\frac{\partial h_1}{\partial X} - \frac{2h_1^2}{c_0} + 2h_2 c_0 - 2h_0 v_2 - 0 \cdots \cdots \cdots (17)$$

である。(16), (17) 式より (15) 式の関係を使って、

$$\frac{\partial h_1}{\partial X} = \frac{1}{c_0} \left\{ \frac{3}{2} h_1^2 - \frac{1}{2\lambda F_r^2} \frac{f_0}{h_0^{1/3}} \left(2 - \frac{4}{3} f_0 \right) h_1 \right\}$$

すなわち、

$$\frac{dh_1}{d\tau} = \frac{1}{h_0^{1/2}} \left\{ \frac{3}{2} h_1^2 - \frac{f_0}{\lambda F_r^2 h_0^{1/3}} \left(1 - \frac{2}{3} f_0 \right) h_1 \right\} \cdots \cdots \cdots (18)$$

なる関係を得る。ただし、 f_0 は基底流に対する Froude 数である。

(18) 式において、常に $dh_1 d\tau > 0$ となる場合には、 $h_1(\tau)$ は時間の経過とともに単調に増加し、ついには bore が形成されることになる。そして、この条件が成立するのは

$$h_1(\tau) > \frac{2}{3\lambda F_r^2} \frac{f_0}{h_0^{1/3}} \left(1 - \frac{2}{3} f_0 \right) \cdots \cdots \cdots (19)$$

の場合であり、いま簡単のために単斜上昇波を対象とすれば、波先における平均流水面となす角を θ とするとき、

$$\theta = \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{front} = -\frac{H_m - H_0}{\sqrt{g H_m T_D}} \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)_{\tau=0} = \lambda h_1(\tau) \cdots \cdots \cdots (20)$$

であるから、(20) 式を使えば (19) 式は、

$$1 > \frac{2i}{3\theta F_r^2} \frac{f_0}{h_0^{1/3}} \left(1 - \frac{2}{3} f_0 \right) \cdots \cdots \cdots (21)$$

となる。一方、水深 H_0 に対する平均流速を v_0 とすれば、

$$\theta = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{front}}{v_0 + \sqrt{g H_0}} \cdots \cdots \cdots (22)$$

であるから、これを (21) 式に用いて次元をもとに戻すと、

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{front} > \frac{2}{3} n^2 g^{3/2} H_0^{1/6} (1 + F_0) \left(1 - \frac{2}{3} F_0 \right) F_0 \cdots \cdots \cdots (23)$$

となり、

$$H_m = \alpha H_0 \cdots \cdots \cdots (24)$$

とすれば、

$$\lambda > \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{F_0} (1 + F_0) \left(1 - \frac{2}{3} F_0 \right) \cdots \cdots \cdots (25)$$

として波先での段波の生起条件を書くことができる。ただし、 F_0 は基底流に対する Froude 数で

$$F_0 = \frac{i^{1/2} H_0^{1/6}}{g^{1/2} n} \quad \dots\dots\dots (26)$$

である。一方、

$$\lambda = \frac{n^3 g}{i^{2/5} T_D} \alpha^{1/2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) F_0^3 \quad \dots\dots\dots (27)$$

であるから、Fig. 2 を用いて与えられた水路条件およびハイドログロフの条件に対して段波を生起すべき F_0 の値を求めることができる。すなわち (25) 式の右边を $f(F_0)$ と書き、ある α の値に対する λ と $f(F_0)$ の値を F_0 に対してプロットすれば Fig. 2 のような曲線群ができる。これらの同じ α の値に対する曲線の交点は段波を形成する限界の F_0 あるいは λ の値を与えており、それ以上の F_0 あるいは λ で段波を形成することになる。なお、 $\alpha=1$ は定常等流に対する場合を示しており、 λ 曲線は F_0 軸に一致するが、図からも明らかなように、 $F_0 > 3/2$ のとき流れに与えられた微小擾乱が発達し流れは不安定となる。この結果は先に Keulegan & Patherson⁴⁾ が求めたものと同じである。また、(27) 式からも明らかなように水路勾配および水位変化の継続的時間が大きいほど大きな F_0 の値で段波が発生し、水路粗度が大きいほど大きな F_0 で段波が発生する。

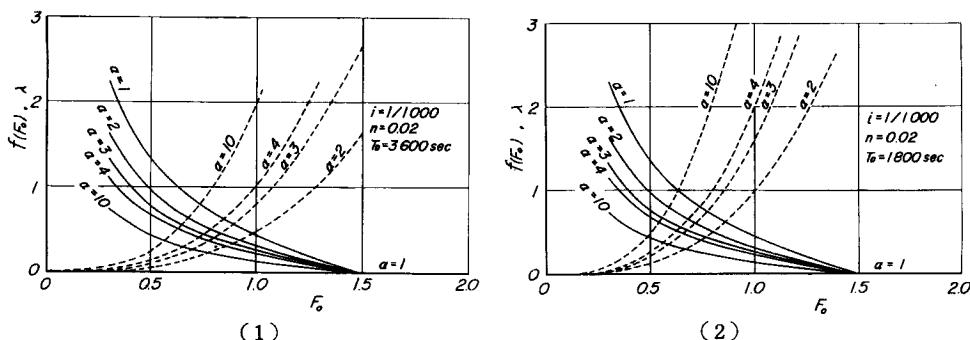


Fig. 2 (1), (2) Critical value of λ and F_0 for bore formation

また、(25) の条件式は (27) 式を使えば

$$\frac{\alpha-1}{T_D} > \frac{2i^{5/2}}{3n^3 g} \frac{1}{F_0^4} \left(1 + F_0\right) \left(1 - \frac{2}{3} F_0\right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

のようになり、右辺は水路条件と流れの初期条件で定まる量であり、左辺は上流端の水位時間曲線の形状によって定まる量である。したがって、(28) 式より段波を生起すべきハイドログラフを求めることができる。

一方、(25) 式が成立しない場合、すなわち、 λ が Fig. 2 の交点の値よりも小さい場合には、 $dh_1/d\tau < 0$ であり、波先の水面となす角 θ は伝播とともに逓減する。このような場合 (18) 式は容易に解けて、

$$h_1(\tau) = \frac{\frac{2}{3\lambda F_0^2 h_0^{1/3}} h_1(0) e^{-B\tau} f_0 \left(1 - \frac{2}{3} f_0\right)}{\frac{2}{3\lambda F_0^2 h_0^{1/3}} \left(1 - \frac{2}{3} f_0\right) - h_1(0) (1 - e^{-B\tau})} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。ここに、

$$B = \frac{1}{2\lambda F_0^2 h_0^{5/6}} f_0 \left(1 - \frac{2}{3} f_0\right) \quad \dots\dots\dots (30)$$

である。(29) 式より $h_1(\tau)$ の逓減は指数関数的であることがわかる。

つぎに、Fig. 3 のように、水位が時間的に降下して行くような波形の終末部分の伝播について考えるこ

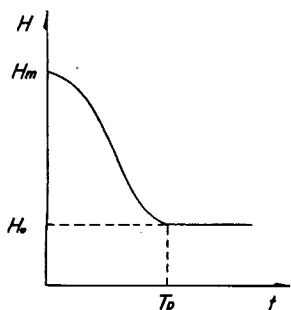


Fig. 3 Schematic diagram of $H \sim t$ curve at $x=0$.

とにする。水位上昇部の波先は前進特性曲線に沿って流下するから(9)式のような変数変換をとって考えたが、波の終端部は後退特性曲線に沿って上あるいは流下するから、変数変換としては、

$$\left. \begin{aligned} X' &= \tau \\ Y' &= (v_0 - c_0)\tau - \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

のようなものを考える。そうすると運動方程式は

$$\left(1 - \frac{1}{Fr^2} \frac{v^2}{h^{4/3}}\right) = \lambda \left\{ \left(-1 - \frac{v^2}{h} + \frac{v(v_0 - c_0)}{h}\right) \frac{\partial h}{\partial Y'} + \frac{v}{h} \frac{\partial h}{\partial X'} + \frac{\partial v}{\partial X'} + (v_0 - c_0 - 2v) \frac{\partial v}{\partial Y'} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

連続式は、

$$\frac{\partial h}{\partial X'} + (v_0 - c_0) \frac{\partial h}{\partial Y'} - v \frac{\partial h}{\partial Y'} - h \frac{\partial v}{\partial Y'} = 0 \dots\dots\dots (33)$$

となる。 v と h を(14)式と同じく Y' のべき乗に展開し、(32)、(33)式に入れ、 Y' の各べき乗の項にしてこれらの式が成立するという条件を考えると、 Y' の0次項より、

$$v_1 = -\frac{h_1}{c_0} \dots\dots\dots (34)$$

Y' の一次項に対する運動方程式は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{Fr^2} \frac{v^2}{h_0^{4/3}} \left(-\frac{2h_1}{v_0 c_0} - \frac{4}{3} \frac{h_1}{h_0} \right) \\ & = \lambda \left\{ h_1^2 \left(-\frac{1}{h_0} + \frac{2v_0}{h_0 c_0} \right) + \left(\frac{v_0}{h_0} - \frac{1}{c_0} \right) \frac{\partial h_1}{\partial X'} - 2 \left(1 + \frac{v_0}{c_0} \right) h_2 - 2(c_0 + v_0) v_2 \right\} \dots\dots (35) \end{aligned}$$

であり、同様に、連続式は

$$\frac{\partial h_1}{\partial X'} + \frac{2h_1^2}{c_0} - 2h_0 \left(\frac{1}{c_0} h_2 + v_2 \right) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

となる。(35)、(36)式より、

$$\frac{dh_1}{d\tau} = -\frac{1}{h_0^{1/2}} \left\{ \frac{3}{2} h_1^2 + \frac{1}{\lambda Fr^2 h_0^{1/3}} f_0 \left(1 + \frac{2}{3} f_0 \right) h_1 \right\} \dots\dots\dots (37)$$

を得る。(37)式は $h_1 > 0$ のとき $dh_1/d\tau < 0$ であるから h_1 は伝播とともにつねに減衰することになる。なお、(37)式は容易に解けて、その解は、

$$h_1(\tau) = \frac{h_1(0) e^{-B'\tau} f_0 \left(1 + \frac{2}{3} f_0 \right)}{3\lambda Fr^2 h_0^{1/3} h_1(0) (1 - e^{-B'\tau}) + 2f_0 \left(1 + \frac{2}{3} f_0 \right)} \dots\dots\dots (38)$$

となる。ただし、

$$B' = \frac{1}{2\lambda Fr^2 h_0^{5/6}} f_0 \left(1 + \frac{2}{3} f_0 \right) \dots\dots\dots (39)$$

である。すなわち、 $h_1(\tau)$ は時間に指数関数的にすみやかに減衰する。

上に述べたように、ここに導入した λ によって段波への遷移条件を明らかにすることができ、この条件を満足する λ の値をはさんで Saint-Venant 式の示す現象が異なることが明らかとなったので、以下では λ のとる値の範囲によって起る現象を分類し、それぞれの理論的解析を試みることにする。

2.3 λ が1にくらべて十分に大きくかつ段波を形成する場合

Fig. 2 からわかるように、 F_0 が比較的大きい通常の水路条件下においては、 $\lambda \gg 1$ で段波を形成すると考えてよいであろう。この場合の基礎方程式は、運動方程式(6)の左辺の摩擦項は1のオーダーの値を

持っているから、左辺全体が λ に比して無視できる程度となり、

$$\left(1 - \frac{q^2}{h^3}\right) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{2q}{h^2} \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

と連続式

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。これは基礎方程式において摩擦勾配項と水路勾配項が等しいと置いた場合と一致し、いわゆる Dynamic Wave となり、流速が水深の一個関数であると仮定する場合には Saint-Venant⁵⁾ が取扱った波と同じものとなる。そして、その波の伝播速度 ω は、

$$\omega = v_0 \pm 3\sqrt{h} \mp 2\sqrt{h_0} \quad \dots\dots\dots (41)$$

で与えられ次元をもとに戻せば

$$\omega = V_0 \pm 3\sqrt{gH} \mp 2\sqrt{gH_0} \quad \dots\dots\dots (42)$$

であることが得られるが、このままでは h について非線型であり解くことができない。

波高が基底水深にくらべ十分小さいような微小変動を考えると (40), (5) 式は線型化されて、

$$\left(1 - \frac{q_0^2}{h_0^3}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{1}{h_0} \frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2} - \frac{2q_0}{h_0^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

となる。これは任意の初期条件、境界条件下に解かれ得るが、いま考えているような波高が小さいときには、 T_D が非常に小さくなって λ がより十分に大きくなったものと考えられるから、与えるべき境界および初期条件は

$$\left. \begin{aligned} h(0, \tau) &= f(\tau) = 1, \quad \tau > 0 \text{ のとき} \\ &= 0, \quad \tau \leq 0 \text{ のとき} \\ h(\xi, 0) &= 0 \\ h_\tau(\xi, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

である。いま条件 (44) のもとで (43) を解くかわりに、境界条件

$$\left. \begin{aligned} h(0, \tau) &= f_2(\tau) = \frac{\tau^2}{2}, \quad \tau > 0 \text{ のとき} \\ &= 0, \quad \tau \leq 0 \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

を満足する解を求めると

$$U_2(\xi, \tau) = \frac{1}{2\omega^2} (\xi - \omega\tau)^2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

となる。ただし、

$$\omega = u_0 + \sqrt{h_0} \quad \dots\dots\dots (47)$$

である。したがって、

$$U_1(\xi, \tau) = \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = -\frac{1}{\omega} (\xi - \omega\tau) \quad \dots\dots\dots (48)$$

は境界条件

$$\left. \begin{aligned} f_1(\tau) &= U_1(0, \tau) = \tau, \quad \tau > 0 \text{ のとき} \\ &= 0, \quad \tau \leq 0 \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (49)$$

を満足する解であり、さらに、

$$U(\xi, \tau) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 1 \quad \dots\dots\dots (50)$$

は境界条件、

$$f(\tau) = U(0, \tau) = 1, \quad \tau > 0 \text{ のとき} \\ = 0, \quad \tau \leq 0 \text{ のとき} \quad \left. \vphantom{f(\tau)} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

を満足する解であることがわかるので、条件 (44) を満足する方程式 (43) の解は Duhammel の定理より、

$$h(\xi, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau U(x, \tau-t) f(t) dt \quad \dots\dots\dots (52)$$

すなわち、

$$h(\xi, \tau) = 1, \quad \tau > 0 \text{ のとき} \\ = 0, \quad \tau \leq 0 \text{ のとき} \quad \left. \vphantom{h(\xi, \tau)} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

として求まる。この解はユニットグラフに相当するステップを持つ理想段波を示しており、その伝播速度は (47) 式で与えられている。

2.4 λ が 1 にくらべて十分に小さい場合

波高が初期の基底水深にくらべてかなり大きい場合を考えることにすれば、 λ が 1 にくらべて十分に小さい場合には Fig. 2 からわかるように、通常波先で shock wave を形成することはないと考えてよいであろう。このような場合、2.1 での考察で明らかなように長波の速度で伝播する波先は伝播とともに指数関数的に減衰するが、それに続く波の主要部分はいわゆる Kinematic Wave として伝播する。これは一般に洪水波あるいは洪水流と呼ばれているものである。

さて、このような場合に対しては λ に関する基礎方程式 (5), (6) の摂動解を求めることができる。

$$h = h_0(\xi, \tau) + h_1(\xi, \tau)\lambda + h_2(\xi, \tau)\lambda^2 + \dots \\ q = q_0(\xi, \tau) + q_1(\xi, \tau)\lambda + q_2(\xi, \tau)\lambda^2 + \dots \quad \left. \vphantom{h} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

のような展開を行なう。初期条件および境界条件は、

$$\tau = 0 \text{ で } h = h_0(\xi) = \text{const} \\ \xi = 0 \text{ で } h = h_0(\tau) = f(\tau) \\ \xi = 0 \text{ で } h_1 = h_2 = \dots = 0 \quad \left. \vphantom{h} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

とする。(54) 式を (6) 式に代して λ のべき乗に整理し、まず λ の 0 次の項をとると、

$$1 - \frac{1}{Fr^2} \frac{q_0^2}{h_0^{10/3}} = 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

したがって、

$$q_0 = Fr h_0^{5/3} \quad \dots\dots\dots (57)$$

である。(57) 式を (5) 式に入れて

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{5}{3} Fr h_0^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) h_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (58)$$

となるから、 h_0 の一般解は境界条件を考慮に入れて、

$$h_0 = f\left(\tau - \frac{\xi}{\frac{5}{3} Fr h_0^{2/3}}\right) \quad \dots\dots\dots (59)$$

である。(59) 式は特性曲線

$$\omega \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{5}{3} Fr h_0^{2/3} \quad \dots\dots\dots (60)$$

上では $h_0 = \text{const.}$ となることを示しており、第 1 近似解では、波は伝播速度 ω で伝わり、減衰しないような Kinematic Wave である。

つぎに、第 2 近似解を得るために、 λ の 1 次の項まで考える。(6) 式において、 λ の 1 次の係数を左右両辺で等しいとおけば

$$\frac{1}{F_r^2} \frac{q_0^2}{h_0^{10/3}} \left(\frac{10}{3} \frac{h_1}{h_0} - \frac{2q_1}{q_0} \right) = \left(1 - \frac{q_0^2}{h_0^3} \right) \frac{\partial h_0}{\partial \xi} + \frac{1}{h_0} \frac{\partial q_0}{\partial \tau} + \frac{2q_0}{h_0^2} \frac{\partial q_0}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。したがって、(58) 式を考慮に入れれば

$$q_1 = \frac{5}{3} F_r h_0^{2/3} h_1 - \frac{1}{2} F_r h_0^{5/3} \frac{\partial h_0}{\partial \xi} \left(1 - \frac{4}{9} F_r^2 h_0^{1/3} \right) \quad \dots\dots\dots (62)$$

が得られ、 λ の 1 乗に関する連続式は、

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (63)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{5}{3} F_r h_0^{2/3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = & \frac{F_r}{h_0^{1/3}} \left\{ \left(\frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{5}{6} h_0 - \frac{4}{9} F_r^2 h_0^{4/3} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{h_0^2}{2} - \frac{2}{9} F_r^2 h_0^{7/3} \right) - \frac{10}{9} h_1 \frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right\} \quad \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\left(\frac{\partial h_0}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{5}{6} h_0 - \frac{4}{9} F_r^2 h_0^{4/3} \right) + \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{h_0^2}{2} - \frac{2}{9} F_r^2 h_0^{7/3} \right) \equiv K \quad \dots\dots\dots (65)$$

と置いて (64) 式を書きなおすと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{5}{3} F_r h_0^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left\{ h_1 - \int_0^\tau \frac{F_r}{h_0^{1/3}} \left(K - \frac{10}{9} \frac{\partial h_0}{\partial \xi} h_1 \right) D\tau \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。したがって、境界条件 (55) を満足する解は特性曲線

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \omega_0 = \frac{5}{3} F_r h_0^{2/3} \quad \dots\dots\dots (67)$$

上において、

$$h_1 = \frac{9}{10} \frac{K}{\frac{\partial h_0}{\partial \xi}} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{2}{3} \frac{\partial h_0}{h_0} \xi \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (68)$$

で与えられる。また、(59) 式より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial \xi} &= \frac{3f\dot{f}}{2\xi\dot{f} - 5F_r f^{5/3}} \\ \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} &= \frac{3f}{(2\xi\dot{f} - 5F_r f)^3} \{ 2\xi(\dot{f})^3 + 5F_r \dot{f}^{5/3} (4\dot{f}^2 - 3f\ddot{f}) \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (69)$$

であるから、(65) 式を考慮して (69) 式を (68) 式に入れると、

$$\begin{aligned} h_1 = & \frac{9}{10} \frac{f^2}{\dot{f}(2\xi - 5F_r f^{5/3})} \left\{ 2\xi \left(3 - \frac{14}{9} F_r^2 f^{1/3} \right) \dot{f}^3 + 5F_r \dot{f}^{5/3} \left(\frac{9}{2} + \frac{4}{9} F_r^2 f^{1/3} \right) \dot{f}^2 \right. \\ & \left. - F_r \dot{f}^{5/3} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} F_r^2 f^{4/3} \right) \ddot{f} \right\} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{2\xi}{2\xi\dot{f} - 5F_r f^{5/3}} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

のように h_1 が求められ、

$$h = h_0 + h_1 \lambda \quad \dots\dots\dots (71)$$

により、 h の第 2 近似値が求まる。なお、 q の第 2 近似は (62) 式より、

$$q = q_0 + \left\{ \frac{5}{3} F_r f^{2/3} h_1 - \frac{1}{2} F_r f^{5/2} \frac{3f\dot{f}}{2\xi\dot{f} - 5F_r f^{5/3}} \left(1 - \frac{4}{9} F_r^2 f^{1/3} \right) \right\} \lambda \quad \dots\dots\dots (72)$$

で求められる。

同様に、第3近似は λ^2 項まで考慮することによって求まるが、普通に河道にあらわれる洪水波を対象とする場合には第2近似までで十分であると考えられる。

以上の議論は水位ピークにおいては $\dot{f}=0$ となるのでそのままでは適用できない。つぎに水位のピークの迫跡を考える。ピークでは

$$\left. \begin{aligned} f=1, \quad \dot{f}=0 \\ \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} = \frac{9}{25 F_r^2} \ddot{f}_{peak} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

であるから、これを (66) 式に入れたら、特性曲線

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{5}{3} F_r \dots\dots\dots (74)$$

上において、

$$h_1 - \int_0^\tau \frac{9}{50} \frac{1}{F_r} \left(1 - \frac{4}{9} F_r^2\right) \ddot{f}_{peak} D\tau = \text{const.} \dots\dots\dots (75)$$

となるから、境界条件 (55) を考慮して、

$$h_1 = \frac{27}{250} \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{4}{9}\right) \ddot{f}_{peak} \xi \dots\dots\dots (76)$$

が得られる。したがって、ピークの第2近似解は、

$$h = 1 + \frac{27}{250} \lambda \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{4}{9}\right) \ddot{f}_{peak} \xi \dots\dots\dots (77)$$

で求められる。次元をもとに戻すと H_{peak} の第2近似は

$$H = H_m \left\{ 1 + \frac{27}{250} \frac{\ddot{F}_{peak}}{g H_m} \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{4}{9}\right) x \right\} \dots\dots\dots (78)$$

となる。これは林、田中⁵⁾ がそれぞれ別個に導いた式と一致している。

また、水位ピーク時の流量は (62) 式より、

$$q = F_r \left\{ 1 + \frac{9}{50} \lambda \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{4}{9}\right) \ddot{f}_{peak} \xi \right\} \dots\dots\dots (79)$$

であり、もとの次元に戻すと

$$Q = \frac{1}{n} H_m^{5/3} i^{1/2} \left\{ 1 + \frac{9}{50} \left(\frac{1}{F_r^2} - \frac{4}{9}\right) \frac{\ddot{F}_{peak}}{g H_m i} x \right\} \dots\dots\dots (80)$$

となる。上式の右辺中カッコの外は水深 H_m に対する等流量であり、これを Q_m と書くと、

$$\frac{Q_m - Q}{Q_m} / \frac{H_m - H}{H_m} = \frac{5}{3} \dots\dots\dots (81)$$

すなわち、水位ピーク時の流量の相対的減量は水位ピークの相対的減量の $5/3$ 倍に等しい。これは第2近似解においても、水似ピークの伝播速度が Kleitz-Seddon の法則に従っていることを示している。

つぎに、以上の理論の適用例として上流端境界条件が

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= (H_m - H_0) \sin \frac{\pi}{T_D} t + H_0, & 0 \leq t \leq T_D \text{ のとき} \\ &= H_0, & t > T_D \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (82)$$

で与えられ、 $H_m = 10 \text{ m}$, $H_0 = 2 \text{ m}$, $n = 0.03$, $i = 0.001$, $T_D = 4 \text{ hr}$, のような一様水路中の洪水波を考えよう。この場合、 $\lambda = 0.053$ となり、1より十分に小さいから理論の適用範囲と考えてよい。(32) 式の無次元表示は

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{4}{5} \sin \frac{5\pi}{4} \tau + \frac{1}{5}, & 0 \leq \tau \leq \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}, & \tau > \frac{4}{5} \end{cases} \quad (83)$$

であり、計算は $(\tau - \xi)$ 平面で前進特性曲線

$$s = \tau - \frac{\xi}{\frac{5}{3} F_r f(s)^{2/3}} \quad (84)$$

に沿って行ない得る。この特性曲線は Kinematic Wave として伝播するとする上の理論から導き出されたものであるから、Dynamic Wave の特性が濃い波先付近および終末部付近では誤差が大きくなるものと推察されるがその他の部分では比較的正しい結果を与えるものと予想される。計算結果は Fig. 4 の実線で示されるようなものである。

一方、基礎方程式 (1), (2) はそのまま電子計算機によって数値計算がなされ得る。ここでは上の場合と同じ境界条件に対して J. J. Stoker⁶⁾ が採用した方法により KDC-II による計算を試みた。その結果は Fig. 4

の丸印で示されているようなもので、先の考察のように波先および下降期において両者は少し違っているが、その他の部分ではほとんど満足すべき結果が得られている。なお、下降期のくい違いについては Stoker の方法による数値計算においても終末部付近で発散してしまつたので、この理論による計算の誤差を評価することは困難である。

2.5 λ が 1 あるいはそれ以上のオーダーの値を持つ場合

λ が 1 あるいはそれ以上の値を持っているときでも、Fig. 2 からわかるように、段波を形成しない場合は存在する。このような場合でも基礎方程式はそのまま電子計算機によって数値解を得ることはでき、また、初期の定常水深に比して変動水深を小さいとする微小変動法による線型化方程式によって解析解を求めることができる。しかし、基底水準に比して変動水位が十分に大きいような場合には、もはや鉛直加速度を無視することは適当でないとも考えられ、そのようなときには基礎方程式として (1), (2) 式をそのまま採用することは妥当でない。

鉛直加速度を考慮した場合の運動方程式は微小項を省略すれば

$$\left(1 - \frac{1}{F_r^2} \frac{q^2}{h^{10/3}}\right) = \lambda \left\{ \left(1 - \frac{q^2}{h^3}\right) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{2q}{h^2} \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{q^2}{3h} (\lambda i)^2 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + \frac{2q}{3} (\lambda i)^2 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \frac{h}{3} (\lambda i)^2 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi \partial \tau^2} \right\} \quad (85)$$

与えられる。したがって、 λi がなお 1 にくらべて十分に小さいような場合であれば、(85) 式の右辺の第 4, 5, 6 項は他の項に比して小さく、基礎方程式として (1), (2) 式を使つてもよいことがわかる。そしてこのような場合には、(54) 式の展開のかわりに、

$$\begin{cases} h = h_0(\xi, \tau) + h_1(\xi, \tau) \lambda i + h_2(\xi, \tau) \lambda^2 i^2 + \dots \\ q = q_0(\xi, \tau) + q_1(\xi, \tau) \lambda i + q_2(\xi, \tau) \lambda^2 i^2 + \dots \end{cases} \quad (86)$$

のように展開して考えれば、2.4 の場合と同じ方法で逐次近似解を求めることができ、その結果は水位ビーク以外では、第 2 近似までで、

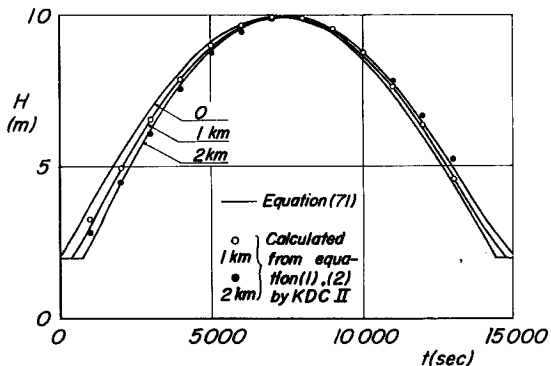


Fig. 4 Comparison of results between theoretical second approximation and direct computation by KDC II.

$$h = h_0 + \frac{9}{10} \frac{K}{\frac{\partial h_0}{\partial \xi}} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{2}{3} \frac{\frac{\partial h_0}{\partial \xi}}{h_0 i} \right) \xi \right\} \lambda i \quad \dots\dots\dots (87)$$

ただし, h_0 , K は (59), (65) 式で与えられるものである。(87) 式は右辺の $\exp$ の項のカッコ内の値が 1 にくらべて小さいときには (70), (71) 式の結果とほとんど同じ値をとることは明らかである。またピークにおいては (77) 式がそのまま成立し, 水位ピークの通減量は λ が 1 より大きい場合でも λi が 1 より十分に小さければ, (79) 式がそのまま成立することになる。

なお, λi がかなり大きい場合については, Keulegan & Patterson⁶⁾ の取扱い方法があり, また (85) 式の左辺を無視した場合に対する孤立波やクノイド波に対する 岩佐⁷⁾ の理論があることは周知のとおりである。

3. 結 論

以上, 一様な開水路における非定常流の解析に対して用いられる一次元運動方程式の物理的な特性を明らかにする目的で理論的な考察を加えてきたが, 得られた結果を要約するとつぎのようになる。

1. 水位変化速度と長波の伝播速度の比の程度の値をあらわす (8) 式で示されるような指標 λ によって開水路非定常流の特性分類が可能である。
2. 波先における段波の生起条件は (25) 式で与えられ, 任意の水路条件および上流端の水位変化に対する境界条件において, Fig. 2 のように図上で段波の生起条件を求めることができる。
3. λ の値が 1 にくらべて十分大きい場合には基礎方程式において摩擦項と水路勾配項が等しいと考えるのと結果的には同じであり, いわゆる Dynamic wave となり, Froude 数が比較的大きい通常の水路では段波を形成する場合が多い。
4. λ が 1 にくらべて十分に小さい場合には波の主要部分は Kinematic Wave として伝播する。これは一般に洪水波あるいは洪水流と呼ばれているものに相当し, λ によって逐次近似解を求めることができ, 本論文では第 2 近解まで求められた。この結果は波先および末端部付近を除いてかなり精度がよい。
5. λ が 1 あるいはそれ以上のオーダーである場合には上の解析をそのまま使うことができないが λi が 1 より十分に小さい場合は同様の解析が可能であり, このような場合には鉛直加速度の効果はそれほど顕著ではない。また, λi が 1 程度のオーダーになってかつ段波を形成しないような場合には鉛直加速度の効果が大きく, Dynamic Wave としての特性が顕著となる。

なお, 本論文は理論的な考察だけにとどまっており, λ が 1 にくらべて小さい場合については著者らが以前から行なってきた実験結果からも検証可能であるが, とくに, 段波の生成条件に関しては今後実験的検討を加えなければならないと考えている。

最後に本研究遂行にあたり御指導を賜った 矢野勝正教授および岩佐義朗教授に厚く謝意を表わすとともに, 計算にあたり浅井邦茂君をわずらわした。ここに感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) T. Hayashi : Mathematical theory and experiment of flood waves, Transactions of the Japan Society of Civil Eng. No. 18, pp. 13~26.
- 2) Lighthill M. J. and Whitham G. B. : On kinematic waves I. Flood movement in long rivers, Proc. Roy. Soc. of London, Vol 229, 1955, pp. 281~316.
- 3) Stoker, J. J. : Water Waves. Interscience Pub, 1957, pp. 451—509.
- 4) Keulegan G. H. and Patterson G. W. : A criterion for instability of flow in steep channels, Trans. A. G. U. 1940, pp. 594—596.

- 5) K. Tanaka : On the quasi-steady flow in the Open Channel (The theoretical analysis of flood routing), Technology of the Osaka Univ, Vol. 2, No. 44, 1952.
- 6) Keulegan G. H. & Patterson G. W. : Effect of turbulence and channel slope on translation waves, Journ, of Research, Nat. Bureau of Standards, Vol. 30, p. 461.
- 7) Iwasa Y. ; Analytical considerations on Cnoidal and Solitary Waves, Memoirs, Fac. Eng. Kyoto Univ. Vol. 17. 1955, pp. 264—276.