

退化 Garnier 系の解の極集合について

慶応大 理工 下村 俊 (Shun Shimomura)

複素パラメーター t, λ, μ をふくむ線形微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x - \lambda} \frac{dy}{dx} - \left(4x^3 + 2tx + 2H - \frac{\mu}{x - \lambda} \right) y = 0,$$

$$H = \frac{1}{2}\mu^2 - 2\lambda^3 - t\lambda$$

を考える. この方程式は $x = \infty$ において不確定特異点, $x = \lambda$ において指数が $(0, 2)$ である対数項を含まない確定特異点をもつ. 方程式 (1) がモノドロミーが不変であることは (つまりパラメーター t によらない Stokes 係数をもつ解の基本系が存在することは) $\lambda(t), \mu(t)$ が Hamilton 系

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

を満たすことと同値であり, この時, $\lambda(t)$ は Painlevé 方程式

$$(I) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 6\lambda^2 + t$$

を満たす ([2]). H. Kimura は [1] において次の方程式について同様の問題を扱った.

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\sum_{k=1,2} \frac{1}{x - \lambda_k} \right) \frac{dy}{dx} - \left(9x^5 + 9t_1 x^3 + 3t_2 x^2 + 3K_2 x + 3K_1 - \sum_{k=1,2} \frac{\mu_k}{x - \lambda_k} \right) y = 0.$$

ここで $x = \lambda_k$ ($k = 1, 2$) は $(0, 2)$ を指数にもつ対数項を含まない確定特異点である. この対数項を含まないという条件により K_j ($j = 1, 2$) は t_k, λ_k, μ_k ($k = 1, 2$) に関するある有理関数として決定される. この方程式についてのモノドロミー不変性は完全積分可能な Hamilton 系

$$(3) \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial \mu_k}, \quad \frac{\partial \mu_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial \lambda_k} \quad (j = 1, 2; k = 1, 2)$$

に同値である. そしてある適当な正準変換 $q_i = q_i(t, \lambda)$, $p_i = p_i(t, \lambda, \mu)$, $s_i = s_i(t)$ ($i = 1, 2$), $t = (t_1, t_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ により (3) は退化 Garnier 系

$$(dG) \quad \frac{\partial q_k}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_k} \quad (j = 1, 2; k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} 3H_1 = & \left(q_2^2 - q_1 - \frac{s_1}{3} \right) p_1^2 + 2q_2 p_1 p_2 + p_2^2 \\ & + 9 \left(q_1 + \frac{s_1}{3} \right) q_2 \left(q_2^2 - 2q_1 + \frac{s_1}{3} \right) - 3s_2 q_1, \\ 3H_2 = & q_2 p_1^2 + 2p_1 p_2 + 9 \left(q_2^4 - 3q_1 q_2^2 + q_1^2 - \frac{s_1}{3} q_1 - \frac{s_2}{3} q_2 \right) \end{aligned}$$

に変換される. 系 (dG) は (I)-型の Painlevé 方程式の 2 変数版とみなすことができる. そして (dG) の任意の解は Painlevé property をもつ ([3]).

定理 A. (dG) の任意の解 $\Xi = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ において, 各成分は $\mathbb{C}^2$ 上有理型関数である.

系 (dG) の解の各成分は $\mathbb{C}^2$ 内の analytic set に沿って極をもつ. この analytic set の (global な) 既約成分を pole divisor と呼ぶことにする. ここでは Garnier 系の解の pole divisor の形状に関するいくつかの結果を述べる. まず (dG) のすべての解は極をもつことがいえる.

定理 1. 系 (dG) の任意の解の各成分は少なくとも一つの pole divisor をもつ超越有理型関数である.

任意の解 $\Xi = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ に対して, 系 (dG) から得られる式

$$q_1 = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 q_2}{\partial s_2^2} + \frac{3}{2} q_2^2 + \frac{s_1}{6}, \quad p_1 = \frac{3}{2} \frac{\partial q_2}{\partial s_2}, \quad p_2 = -\frac{3}{8} \frac{\partial^3 q_2}{\partial s_2^3} + 3q_2 \frac{\partial q_2}{\partial s_2}$$

より $q_2(s_1, s_2)$ についてのみ pole divisor を考えればよいことがわかる.

定理 2. (1) (dG) の任意の解 Ξ の各 pole divisor は次のように表される.

$$\{(s_1, s_2) = (\pi(s), f(s)) \mid s \in \mathcal{R}\} \subset \mathbb{C}^2.$$

ここで

(i) $f(s_1)$ は方程式

$$(E) \quad y^{(4)} = -40(y')^3 y'' - \frac{143}{9} s_1 y' y'' - \frac{4}{3} y y'' - \frac{20}{3} (y')^2 - \frac{11}{6} s_1$$

($' = d/ds_1$) の解である.

(ii) $\pi: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi(s) = s_1$ は $f(s_1)$ の分岐 Riemann 面である.

(2) 逆に方程式 (E) の任意の解 $y = \phi(s_1)$ に対し, 系 (dG) の解 Ξ_* で analytic set

$$\{(s_1, s_2) = (\pi_*(s), \phi(s)) \mid s \in \mathcal{R}_*\} \subset \mathbb{C}^2$$

をその一つの pole divisor とするようなものが存在する. ここで $\pi_*: \mathcal{R}_* \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi_*(s) = s_1$ は $\phi(s_1)$ の分岐 Riemann 面である.

方程式 (E) の解については次の結果が成り立つ.

定理 3. (1) すべての $(a, B_0, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^4$, に対し方程式 (E) は $s_1 = a$ のまわりで Puiseux 級数で表される解

$$\phi(s_1) = \Phi(B_0, B_1, B_2, 3^{1/3}(s_1 - a)^{1/3}),$$

$$(4) \quad \Phi(B_0, B_1, B_2, \sigma) = C_0 - \sigma + \sum_{j \geq 5} C_j \sigma^j,$$

$$C_0 = B_0, \quad C_9 = B_1, \quad C_{11} = B_2$$

をもつ. ここで C_j ($j \geq 5, j \neq 9, 11$) は a, B_0, B_1, B_2 に関する多項式で一意にきまる.

(2) 方程式 (E) の任意の解 $y = g(s_1)$ に対し, 点 $s_1 = a^* \in \mathbb{C}$ の近くの点列 $\{\alpha_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ でつぎのような性質をもつものが存在するとする:

(i) $\alpha_\nu \rightarrow a^*$ as $\nu \rightarrow \infty$.

(ii) $\{g(\alpha_\nu) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ は有界集合.

このとき $s_1 = a^*$, のまわりでは $g(s_1)$ は解析的であるかもしくは次のように表示される.

$$(5) \quad g(s_1) = \Phi(B_0^*, B_1^*, B_2^*, 3^{1/3}(s_1 - a^*)^{1/3}).$$

ここで B_0^*, B_1^*, B_2^* はある複素積分定数である.

さらに pole divisor は局所的には次のような形状をもつ.

定理 4. $\Xi = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ を系 (dG) の任意の解とする. Ξ の各 pole divisor 上の任意の点 $(s_1, s_2) = (a_1, a_2)$ の近くでは $q_2(s_1, s_2)$ は次のいずれかの表示式をもつ:

$$q_2(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_2 - f(s_1))^2} Y(s_1, s_2),$$

$$q_2(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{(s_2 - \Phi_0(s_1))^2} + \frac{1}{(s_2 - \Phi_1(s_1))^2} + \frac{1}{(s_2 - \Phi_2(s_1))^2} \right) Y_*(s_1, s_2),$$

$$\Phi_l(s_1) = \Phi(a_2, B, B', \omega^l 3^{1/3} (s_1 - a_1)^{1/3}), \quad \omega = \exp(2\pi i/3), \quad l = 0, 1, 2.$$

ここで

- (i) $f(s_1)$ は $s_1 = a_1$ で解析的な (E) の解で $f(a_1) = a_2$ を満たす.
- (ii) $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot, \sigma)$ は (4) の形の収束級数で, B, B' はある複素積分定数である.
- (iii) $Y(s_1, s_2)$ と $Y_*(s_1, s_2)$ は $(s_1, s_2) = (a_1, a_2)$ で解析的であり $Y(a_1, a_2) = Y_*(a_1, a_2) = 1$ を満たす.

この結果からわかるように, 各 pole divisor は他の pole divisor とも, また, 自分自身とも交わることはない.

参考文献

- [1] H. Kimura, The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura Appl. **155** (1989), 25-74.
- [2] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **33** (1986), 575-618.
- [3] S. Shimomura, Painlevé property of a degenerate Garnier system of (9/2)-type and of a certain fourth order non-linear ordinary differential equation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (to appear).