

パラメトリック共鳴する表面波の上の粒子のカオス運動

京大数理解 梅木 誠 (Makoto Umeki)

§ 1. はじめに.

規則的な速度場から生じる流体粒子のカオス運動は2種類に大別される。一つは3次元の定常流であり、もう一つは2次元の非定常流(周期流)である。ABC流 [Dombre et al. J. Fluid Mech. 167, 373, (1986)] や、steady confined Stokes 流 [Bajer and Moffatt, J. Fluid Mech. 212, 337, (1990)] は前者の例であり、blinking vortex 流 [Aref, J. Fluid Mech. 143, 1, (1984)] や tendril-whorl 流 [Khakhar et al. J. Fluid Mech. 172, 419, (1986)] は後者に属する。最近、水面波によって引き起こされる自由表面上の流体粒子の運動が実験的に研究されており、不規則な表面流の存在が報告されている。[Taneda, J. Fluid Mech. 227, 193 (1991)], [Ramshankar et al. Phys. Fluids A2 (11) 1955 (1990)]。本論文では、自由表面上の粒子の運動を弱非線形理論により解析する。特に内部共鳴した2つのモードが同時に励起された場合に2次の表面流が生ずる事を示

す。数値計算の結果、カオス的なドリフト現象が起こる事もわか、た。

§2. 定式化

非粘性非圧縮流体の渦なし流を考える。流体は一辺 l の正方形断面の柱状容器と自由表面、平らな底面で囲まれているとする。 (x, y) と z を水平、鉛直座標とし、 $z = \eta(t, x, y)$, $-d$ が各々自由表面、底を表す。速度場は速度ポテンシャル $\phi(t, x, y, z)$ により $\mathbf{v} = \nabla\phi$ と表される。具体的表現を次の変数分離形で与える。

$$\phi(t, x, y, z) = \sum_i \phi_i(t) \psi_i(x, y) H_i(z), \quad (1)$$

$$\eta(t, x, y) = \sum_i \eta_i(t) \psi_i(x, y). \quad (2)$$

ここで、

$$\psi_i(x, y) \equiv \psi_{mn}(x, y) = [(z - \delta_{m0})(z - \delta_{n0})]^{1/2} \cos m\pi x/l \cos n\pi y/l, \quad (3)$$

$$H_i(z) = \cosh[k_i(z+d)] / \cosh k_i d, \quad (4)$$

δ_{mn} はクロネッカーのデルタ記号であり、

$$k_i = (m^2 + n^2)^{1/2} \pi / l \quad (5)$$

はモード $i = (m, n)$ の波数である。対応する固有振動数は、

$$\omega_i = [\sigma(1 + \lambda^2 k_i^2) / \rho_i]^{1/2} \quad (6)$$

で与えられる。但し、 σ は重力加速度、 $\lambda = (\sigma / \rho g)^{1/2}$, σ は表面張力、 ρ は密度であり、 $\rho_i = (k_i \tanh k_i d)^{-1}$ とおく。
 i 番目のモードの変位の振幅 $\eta_i(t)$ を、

$\eta_i(t) = \epsilon a_i [p_i \cos \omega t + q_i \sin \omega t + \epsilon (A_i \cos 2\omega t + B_i \sin 2\omega t + C_i)]$
 と表すと [$\omega \approx \omega_i$ は波の実際の振動数], 弱非線形解析の結果⁽⁷⁾
 [Umeki, J. Fluid Mech. 227, 161, (1991)] より,

$$(A_i, B_i) = A_{nem} (L_{em}^1, L_{em}^2), \quad (18)$$

$$C_i = \frac{a_e a_m \omega^2}{4 a_n^2 \omega_n^2} A_{nem} L_{em}^3, \quad (19)$$

$$A_{nem} = -\frac{a_e a_m}{4 a_n^2} (1 - \omega_n^2 / 4\omega^2)^{-1} (a_{emn} - A_{nem} / 4), \quad (10)$$

$$a_{emn} = C_{emn} - a_m a_n D_{emn}, \quad (11)$$

$$L_{em}^1 = p_e p_m - q_e q_m, \quad L_{em}^2 = p_e q_m + q_e p_m, \quad (12)$$

$$L_{em}^3 = p_e p_m + q_e q_m, \quad L_{em}^4 = p_e q_m - q_e p_m,$$

$$C_{emn} = \ell^{-2} \int_0^\ell \int_0^\ell \psi_e \psi_m \psi_n dx dy \quad (13)$$

$$D_{emn} = \ell^{-2} \int_0^\ell \int_0^\ell \psi_e \nabla \psi_m \cdot \nabla \psi_n dx dy$$

なる関係がある。但し、(8)~(10)において繰り返しの記号は和を意味する。また、速度ポテンシャルに対しては、

$$\phi_n = \epsilon a_n^2 \omega [-p_n \sin \omega t + q_n \cos \omega t + \epsilon \tilde{A}_{emn} (L_{em}^1 \sin 2\omega t + L_{em}^2 \cos 2\omega t) - \epsilon \tilde{D}_{emn} L_{em}^4] \quad (14)$$

が得られる。ここで、

$$\tilde{D}_{emn} = \frac{a_m^2 a_e}{2 a_n} D_{emn}, \quad \tilde{A}_{emn} = \tilde{D}_{emn} - 2 A_{nem}. \quad (15, 16)$$

自由表面上の速度場は、

$$(v_x, v_y) = (\phi_x(t, x, y, z), \phi_y(t, x, y, z)) \Big|_{z=\eta(t, x, y)} \quad (17)$$

で与えられる。これをパラメータ ϵ で展開し、 $O(\epsilon^2)$ の項ま

で残り、内部共鳴したモード対 (m, n) と (n, m) , $m > n > 0$ のみが $O(\epsilon)$ で励起されると仮定すると、多少の計算の後、速度場は次式のように分けられる。($m > n = 0$ の場合も同様。)

$$(\tilde{v}_x, \tilde{v}_y) = (\tilde{v}_{1x}, \tilde{v}_{1y}) + \epsilon(\tilde{v}_{2x}^0, \tilde{v}_{2y}^0) + \epsilon(\tilde{v}_{2x}^D, \tilde{v}_{2y}^D). \quad (18)$$

ここで $\tilde{v}$ は無次元量で $v = \epsilon a_1 \omega \tilde{v}$ なる関係があり、

$$(\tilde{v}_{1x}, \tilde{v}_{1y}) = \sum_{i=1}^2 r_i \cos(t^* + \theta_i) (\psi_{ix}^*, \psi_{iy}^*), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_{2x}^0, \tilde{v}_{2y}^0) &= \sum_{i=3}^5 r_i^2 \sin(2t^* + 2\theta_i) C_i (\psi_{ix}^*, \psi_{iy}^*) \\ &+ \sum_{i=6}^8 r_i^2 \sin(2t^* + 2\theta_i) C_i (\psi_{ix}^*, \psi_{iy}^*) \quad (20) \\ &+ \sum_{i=9}^{12} r_i r_2 \sin(2t^* + \theta_i + \theta_2) C_i (\psi_{ix}^*, \psi_{iy}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_{2x}^D, \tilde{v}_{2y}^D) &= \frac{1}{4} M \left(-\frac{m+n}{m-n} (\psi_{9x}^* + \psi_{10x}^*) - \frac{m-n}{m+n} (\psi_{11x}^* + \psi_{12x}^*), \right. \\ &\quad \left. \frac{m+n}{m-n} (\psi_{9y}^* + \psi_{11y}^*) + \frac{m-n}{m+n} (\psi_{10y}^* + \psi_{12y}^*) \right). \quad (21) \end{aligned}$$

但し、 $(p_i, q_i) = r_i (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, $t^* = \omega t$, $(x, y) = l(x^*, y^*)$, C_i は定数, $M = r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$ は "角運動量" であり、モードは $(m, n), (n, m), (2m, 0), (0, 2n), (2m, 2n), (2n, 0), (0, 2m), (2n, 2m), (m-n, m-n), (m-n, m+n), (m+n, m-n), (m+n, m+n)$ の順序で番号付けを行った。 $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2^0$ は 1, 2 次のオーダの振動流であり、時間平均が 0 であるのに対し、 $\tilde{v}_2^D$ は 2 次のオーダのドリフト流で、振動に依らない定常な流れを表す。また、ドリフト流は発散が常に 0 であるため、流れ関数を用いて次のようにも表す事ができる。

$$(\tilde{v}_{2x}^D, \tilde{v}_{2y}^D) = M \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}, -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \right) \mathbb{I}_2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m+n}{m-n} \sin[(m-n)\pi x^*] \sin[(m-n)\pi y^*] + \sin[(m-n)\pi x^*] \sin[(m+n)\pi y^*] \right. \\ \left. + \sin[(m+n)\pi x^*] \sin[(m-n)\pi y^*] + \frac{m-n}{m+n} \sin[(m+n)\pi x^*] \sin[(m+n)\pi y^*] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

よって、自由表面上の流体粒子の運動は

$$\left(\frac{dx^*}{dt^*}, \frac{dy^*}{dt^*} \right) = \epsilon \sigma^2 (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y), \quad [\sigma = a_1/\epsilon] \quad (24)$$

を積分する事により得られる。[$x^*, y^* \in [0, 1]$]

1次のオーダの振動流に対して、

$$(x^*, y^*) = (x_0(\epsilon^2 t^*), y_0(\epsilon^2 t^*)) + \epsilon (x_1(t^*), y_1(t^*)) \quad (25)$$

の形の解 (x_0 はゆくりとしたドリフト、 x_1 は速い振動を表す) を仮定すると、 x_0 に対して、ドリフト効果が存在する事がわかる。これは流れ関数

$$\psi_1 = \sigma^2 \pi^2 m n \left\{ \frac{m+n}{m-n} \sin[(m-n)\pi x_0^*] \sin[(m-n)\pi y_0^*] - \frac{m-n}{m+n} \sin[(m+n)\pi x_0^*] \sin[(m+n)\pi y_0^*] \right\} \quad (26)$$

で表される。結局ドリフト流は $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ の流れ関数で与えられる。図1に代表的な (m, n) の組に対するドリフト流の流れ線を示す。 $n/m \rightarrow 1$ で大きなスケールの流れを表し、 $n/m \rightarrow 0$ で小さなセル構造の流れを与える。

§3. 数値解析：トラスの崩壊とカオス

$(m, n) = (3, 2)$ と $(6, 1)$ の2例について数値積分を行ない、ポアノワレ断面の変化を調べた。 $r_1 = r_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\lambda = 0$, $\tanh \kappa_1 d = 1$ と固定し、展開パラメータ ϵ を変化させた。総数1000のうち、後半の500をプロットした。

$(3, 2)$ に対しては、十分小さな ϵ に対して粒子は、波の振

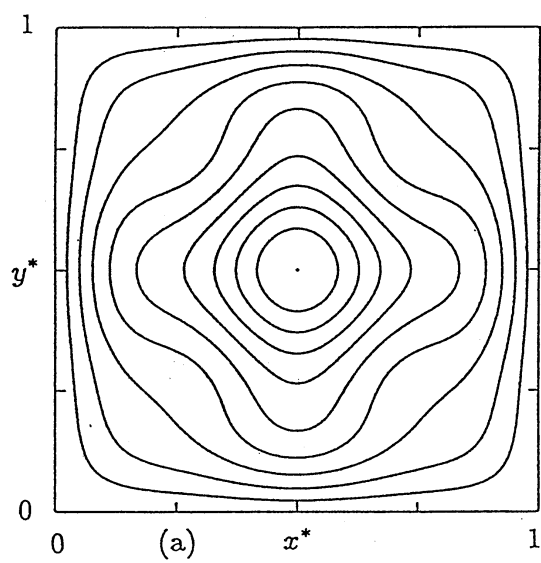
動とドリフト運動の2重周期運動を行なう。 ϵ が大きくなるにつれて、中心と辺の中間領域にトーラスの共鳴が起こり、カオス的な層が出現し始める。 ϵ がさらに大きくなりある臨界値を超えると、外側のトーラスが消滅し、回りながら四辺に近づくようになる。

(6,1)の場合は、小さな ϵ に対して中央部の中立安定なトーラスと外側の4つのsink, source が共存する。 ϵ が大きくなるとトーラスの共鳴だけでなく、周期倍分岐によりカオス状態が発生し、1つの粒子でも正方形断面の大部分の領域をカオス的に徘徊するようになる。この徘徊現象が、実験的に見つかっている異常拡散と関連深いと推測される。

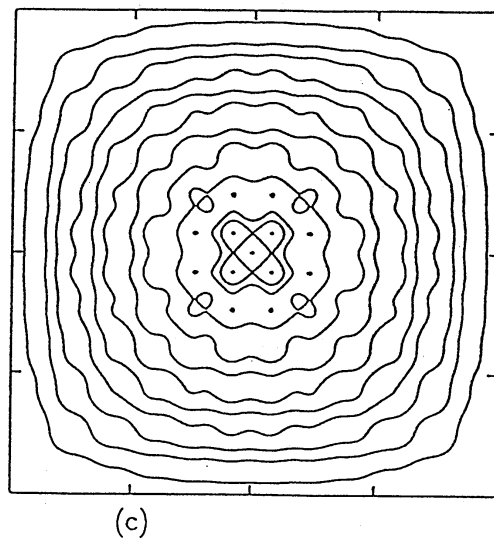
§4. 結論

3次元定在波表面上の流体粒子の運動を弱非線形理論により解析した。2次までの展開により、表面上に1, 2次の振動流と2次のドリフト流が存在する事がわかった。数値解析により、波の振幅を表す展開パラメータ ϵ がある程度大きくなると、カオス的な運動が生ずる事が示された。 (m, n) のいろいろな組に対し、ドリフト流の流線のパターンが大規模の流れから小さなセルの集合の構造にまで変化することが得られた。

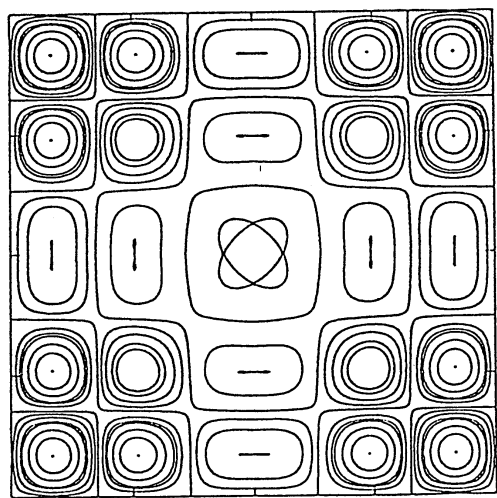
参考文献: M. Umeki (1991) preprint.



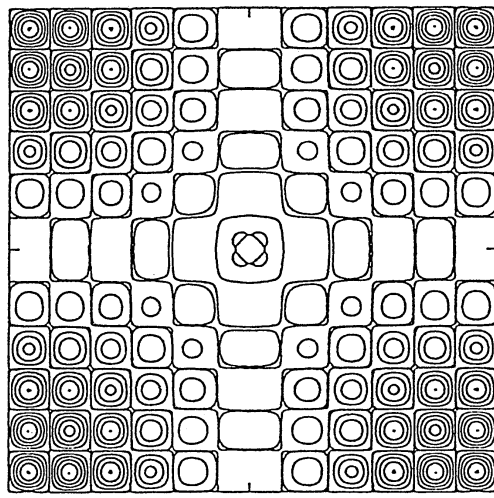
$(m, n) = (3, 2)$



$(12, 11)$



$(6, 1)$



$(12, 1)$

図1 ドリフト流の流線

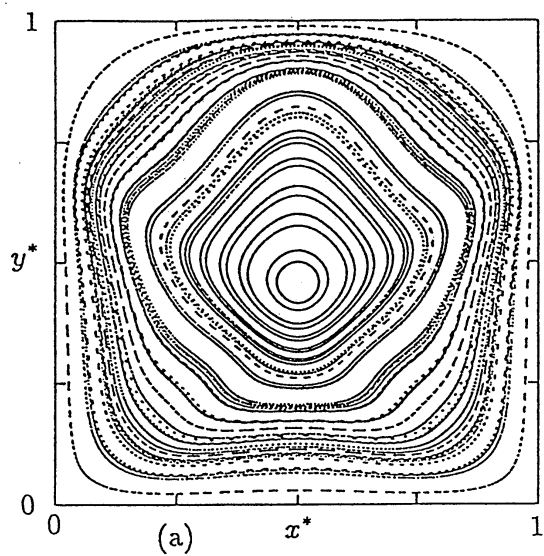
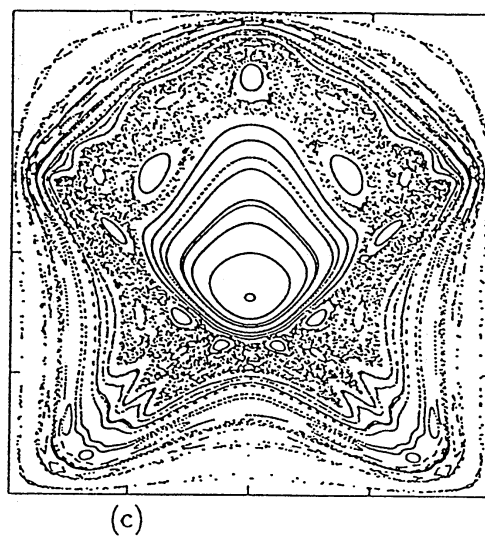
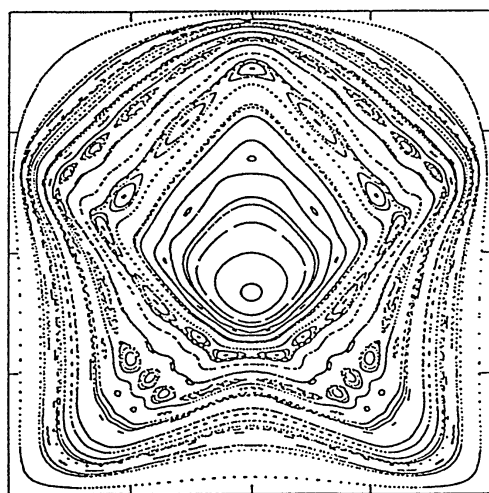
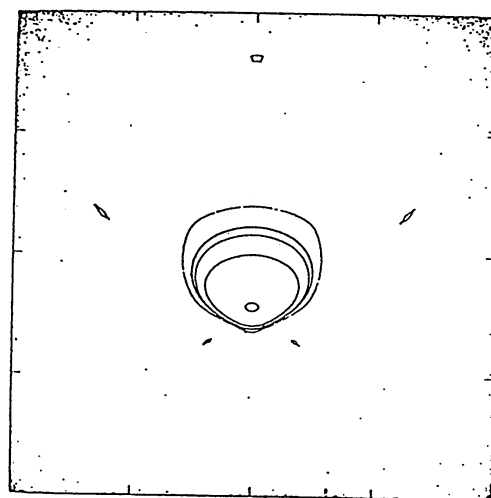
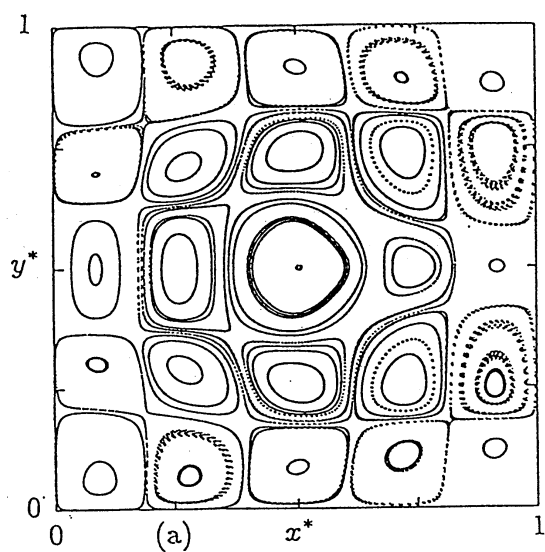

 $\epsilon = 0.1$

 0.20

 -0.18

 0.24

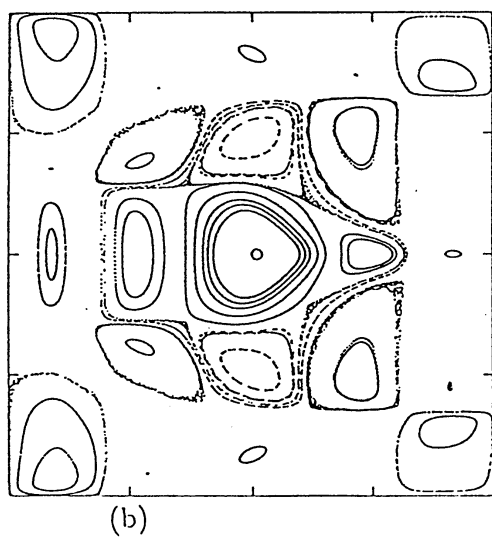
図2 流体粒子の軌道のホアン・カレ・フ・ロット。
初期に $(0.1, 0.1), \dots, (0.9, 0.9)$ の81個の
粒子を西に置した。 $(m, n) = (3, 2)$ 。



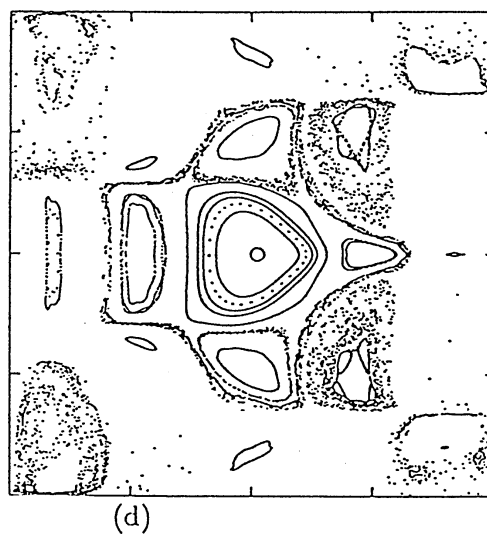
$\epsilon = 0.1$



0.23

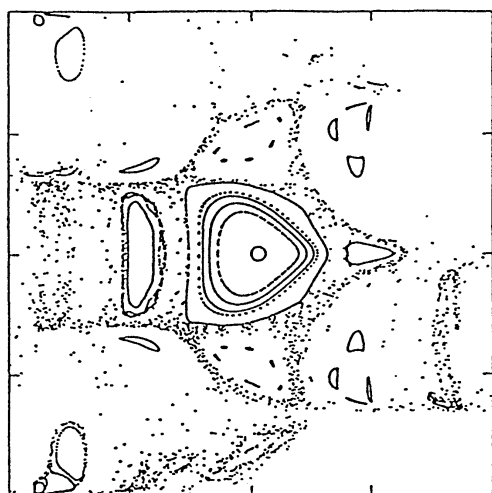


0.2



0.25

図3 流体粒子のポアンカレ・プロット。
 $(m, n) = (6, 1)$ 。



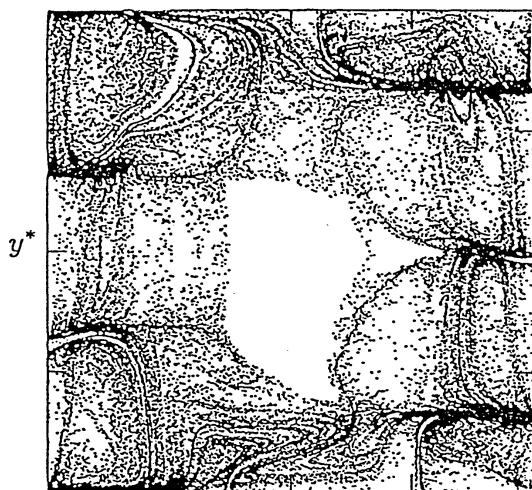
(e)

$$\epsilon = 0.275$$

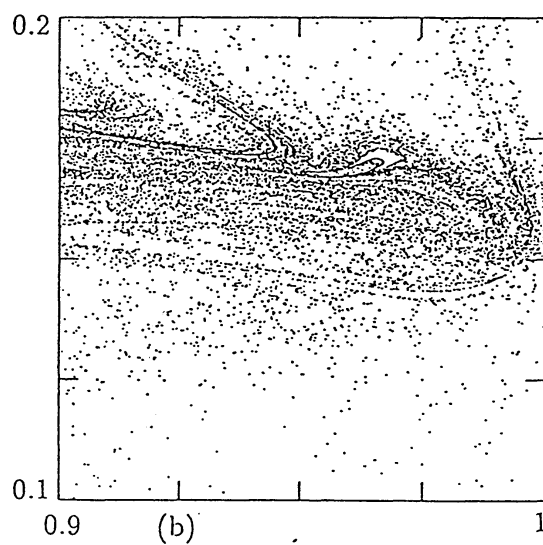
 3.


(f)

$$\epsilon = 0.30$$



(a)

 x^* y^* 

(b)

図4. 1つの粒子のポアンカレプロット。

$(m, n) = (6, 1)$, $\epsilon = 0.31$ 。

右は左の拡大図。

折れたたみ構造が見られる。