

直接シミュレーションによる不規則波浪場の非線形分散関係に関する研究

岐阜大・工・土木 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

1 目的

海洋波は無限に多くの中立な波動モードが、非線形性に起因する弱い相互作用をしながら共存する、いわゆる「波動乱流」「弱乱流」などと呼ばれる状況を形成している。

ほとんどの理論的研究およびスペクトル表現に基づいた数値的研究においては、例えば速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ であれば

$$\phi(x, z, t) = \sum_k a_k(t) e^{ik \cdot x} e^{kz} \quad (1)$$

というように、さまざまな物理量は2次元水平面内の空間変数 x についてモード分解された形で表現される。したがってそこで問題にされるのは波数に関するスペクトルであり、またその時間発展である。一方、現地観測や水槽実験から得られるもっとも標準的なデータは、ある定点において観測された波形の時系列であり、そこでは周波数に関するスペクトルおよびその空間発展が問題となる。

これら二つの記述法、すなわち波数スペクトルに関する理論的な研究結果と、周波数スペクトルに関する観測結果を比較検討するためには、どうしても周波数と波数ベクトルの間の読み替えが必要となる。これに対しては他に頼りにする手段も見当たらないので、通常は深水重力波に対する線形分散関係 $\omega^2 = gk$ が用いられる。しかし海洋波浪場は弱いながらも非線形な波動の集合であり、はたしてこの線形分散関係がどの程度よく成り立っているものなのかはしっかりと押さえておく必要がある。

線形分散関係がどの程度よく成り立つかはもちろんその波動場の状況による。非線形性を左右するエネルギー密度が大きくなれば当然その精度は悪くなるであろうし、また同じエネルギー密度を持つ波動場でも、スペクトル幅が狭く、したがって自由波成分に対して非線形性によって生み出された拘束波成分が多い場合には、やはり線形分散関係は成り立ちにくいであろう。極端な場合として Stokes 波と呼ばれる非線形な周期的定常進行波の場合、すべての高調波は基本波と同一の速度で伝播し、分散性は完全に消滅する。

本研究では、現実の海洋波に近いエネルギー密度およびスペクトル形状を有するような波動場を構築し、非線形水面波動場を記述する基礎方程式に基づいてその時間発展を数値的に追跡することにより、各波数成分が実際にはどの程度のスピードで伝播しているのかを検出し、線形分散関係の結果との比較を試みる。

2 波速の検出方法

ここでは水は非粘性、非圧縮、またその運動は非回転で、したがって速度場はLaplace方程式を満たす速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ の勾配として表現されるものとする。自由表面の変位を $\eta(x, t)$ と記すことにし、また水深は無限大とする。Zakharov(1968)によると、このような状況における水の運動は、全エネルギー

$$H = \frac{1}{2} \int dx \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dz + \frac{1}{2} g \int \eta^2 dx \quad (2)$$

をハミルトニアンとし、 $\eta(x, t)$ と $\psi(x, t)$ を正準変数とするハミルトン系として定式化することができる。したがって、ある時刻 t_0 に x 平面のすべての点に対して $\eta(x, t_0)$ と $\psi(x, t_0)$ が与えられると、すべての時刻における水の波の運動が確定するということになる。 $\eta(x, t)$ 、 $\psi(x, t)$ の時間発展を数値的に追跡する手法としてはさまざまなものが存在するが、ここではそれらの中で「高次スペクトル法」と呼ばれる手法を採用する。「高次スペクトル法」では $\eta(x, t)$ や $\psi(x, t)$ は x について一価関数と仮定され、フーリエ級数により表現される。そのため、自由表面が多価関数となる砕波などは表現できないが、その一方で高速フーリエ変換の活用により、広大な海面の時間発展を高速に追跡することができる。この手法の詳細についてはWest et al.(1987), Dommermuth & Yue (1987), 田中(1998)などを参照されたい。

各波動モードの伝播速度を検出するためには、 $\eta(x, t)$ と $\psi(x, t)$ で規定された各瞬間の海面の状態を、さまざまな波動モードの重ねあわせとして表現し直す必要がある。これに対してはやはりZakharov(1968)が採用した「複素振幅関数」 $b(k, t)$ が有用である。 $b(k)$ は $\eta(x, t)$ と $\psi(x, t)$ のフーリエ変換 $\hat{\eta}(k, t)$ 、 $\hat{\psi}(k, t)$ から

$$b(k, t) = \sqrt{\frac{\omega(k)}{2k}} \hat{\eta}(k, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega(k)}} \hat{\psi}(k, t), \quad \omega(k) = \sqrt{gk} \quad (3)$$

によって定義される。すべての非線形効果を見捨てた線形理論の場合、ハミルトニアン H は $b(k)$ を用いて

$$H_2 = \int \omega(k) b(k) b^*(k) dk \quad (4)$$

のように表現され、対応する正準方程式は

$$i \frac{\partial b(k, t)}{\partial t} = \omega(k) b(k, t) \quad (5)$$

となる。この意味で $b(k, t)$ は線形波動場の固有モードとなっている。ここで特に重要なのは、ある特定の波数 k_0 においてのみゼロでない値を持つ $b(k)$ 、すなわち

$$b(k, t) = b_0 \delta(k - k_0) e^{-i\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad b_0: \text{複素定数} \quad (6)$$

は、

$$\eta(x, t) = a_0 \cos(k_0 \cdot x - \omega_0 t + \alpha), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_0}{2\omega_0}} |b_0|, \quad \alpha = \arg b_0 \quad (7)$$

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\omega_0}{k_0} \right) a_0 \sin(k_0 \cdot x - \omega_0 t + \alpha) \quad (8)$$

のように波数ベクトル k_0 の線形自由波を与えるという点である。この事実より、 $\eta(x, t)$ 、 $\psi(x, t)$ で記述された海面の状態は、 $b(k, t)$ に変換することにより、単色自由波の重ねあわせとして表現し直すことが可能となる。

上記のように、線形理論であれば波数ベクトル k に対応する波動モードの複素振幅 $b(k, t)$ は

$$b(k, t) = b_0(k) e^{-i\omega(k)t} \quad (9)$$

のように振る舞う。このことから、弱非線形な不規則波動場中の波数ベクトル k の波動モードの「見かけの振動数」 ω_{ap} および「見かけの位相速度」 C_{ap} は

$$\omega_{ap} = -\frac{\partial \theta(k)}{\partial t}, \quad C_{ap} = \frac{\omega_{ap}}{k} \quad (10)$$

と定義することができよう。ここで $\theta(k)$ は $b(k)$ の位相を表わす。

$$b(k, t) = r(k, t) e^{i\theta(k, t)} \quad (11)$$

と書く時、

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t} + i \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (12)$$

より ω_{ap} は

$$\omega_{ap} = -\text{Im} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial t} \right] \quad (13)$$

で求めることができる。ここで必要となる $\partial b(k)/\partial t$ は、高次スペクトル法が与える $\partial \eta(x, t)/\partial t$ 、 $\partial \psi(x, t)/\partial t$ 及び $b(k, t)$ の定義(3)より求められる。

3 エネルギー保有領域における分散関係

ここでは弱非線形不規則波動場として、方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ が JONSWAP スペクトル

$$\Phi(\omega, \theta) = C \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4\omega^4}\right) \gamma^{\exp[-(\omega-1)^2/2\sigma^2]} \times \begin{cases} (2/\pi) \cos^2 \theta, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\theta| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (14)$$

であるようなものを考える。ここで

$$C = 3.279E, \quad \gamma = 3.3 \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 & (\omega < 1), \\ 0.09 & (\omega \geq 1), \end{cases} \quad (15)$$

E は単位水平面積あたりの波動場のエネルギー（すなわちエネルギー密度）を表し、伝播方向依存性としては、主伝播方向からの角度を θ として $\cos^2 \theta$ に比例するとしている。また時間空間はつねに、スペクトルのピーク振動数 ω_p および重力加速度 g がともに1となるように規格化するものとする。 $\Phi(\omega, \theta)$ の概形を図1に示す。 $\Phi(\omega, \theta)$ が与えられると、それに対応する $|b(k)|$ の分布が決まる。不定な $b(k)$ の位相部分は一樣乱数で与えること

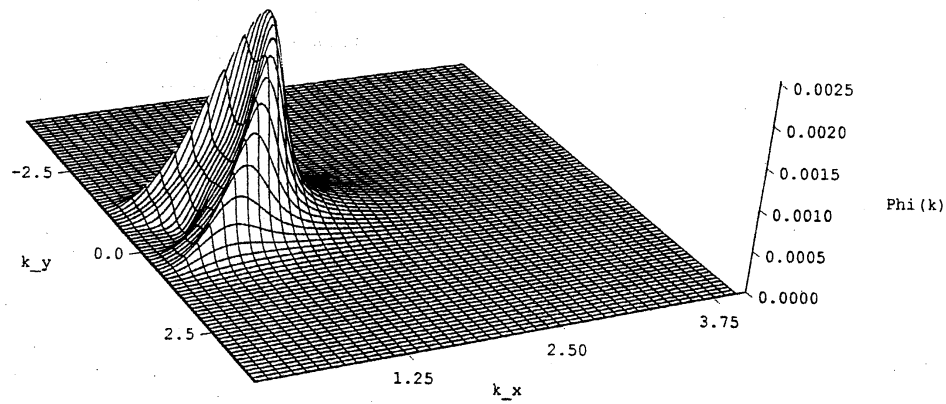


図 1: JONSWAP スペクトルの概形

初期スペクトル形	JONSWAP
方向依存性	$\cos^2 \theta$
エネルギー密度	$E = 0.0025$
メッシュ点数	$N_x = N_y = 2048$
非線形のオーダー M	3
最大モード番号	$k_{\max} = l_{\max} = 512$
ピークのモード番号	$k_p = k_{\max}/12 = 42, l_p = 0$
シミュレーション時間	$0 \leq t \leq 10T_p$
時間発展スキーム	4 次の Runge-Kutta (+ α)
時間きざみ	$\Delta t = T_p/25$

表 1: 数値シミュレーションの各種パラメタ設定

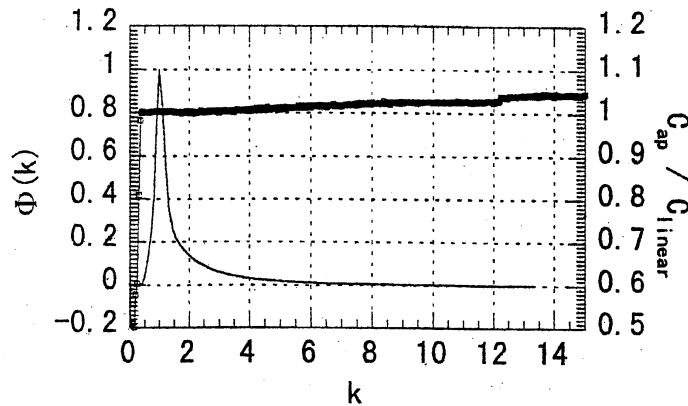


図 2: 見かけの伝播速度と線形の伝播速度の比

とする。このようにして $b(k)$ の場が一つ決まると、(3) より対応する一組の $\eta(x)$, $\psi(x)$ が定まり、高次スペクトル法によりその時間発展を追跡することができる。

ここでは表1に示すような設定のもとで数値シミュレーションを行った。この表で T_p はスペクトルピークに対応する周期で、われわれの規格化 ($\omega_p = 1$, $g = 1$) のもとでは 2π である。 $k_p = 42$ ということは、計算対象となる実空間上の海面(正方形)の一辺がスペクトルピークに対応する波から見て42波長分であることを示しており、また非線形のオーダー $M = 3$ は、4波相互作用までの非線形相互作用を取り込むことを示している。Gaussianでスペクトルが狭帯域の場合には、波高の分布はRayleigh分布に従うこと、またその場合有義波高 $H_{1/3}$ と E の間には

$$H_{1/3} = 4\sqrt{E} \quad (16)$$

の関係が成り立つことが知られている。代表的な振幅 a として $\frac{1}{2}H_{1/3}$ を、また代表的波数 k としてスペクトルのピーク波数(われわれの規格化では1)を採用すると、 $E = 0.0025$ は $ak = 0.1$ に対応する。また例えばピーク周波数が8秒、すなわち波長にして約100mの場合、 $E = 0.0025$ は有義波高 $H_{1/3}$ が3.2m程度の海に対応している。

図2はこのようにして得られた各波数成分の伝播速度と、線形分散関係から求められる伝播速度の比を k の関数としてプロットしたものである。また参考のためにエネルギースペクトル(ピーク値が1となるように規格化)もプロットしてある。波数 k の増大とともに徐々に線形の伝播速度からのずれが増大しているのが見られる。しかしずれの大きさはピークの12倍高調波に対してもわずか3%未満である。

同じく見かけの伝播速度と線形の伝播速度の比 C_{ap}/C_{linear} を波数ベクトル k 平面上のイメージとして表現したものが図3である。一般に k が大きくなるにつれて比が増大すること、また伝播方向がスペクトルの主方向に近い波動ほど線形伝播速度からのずれが大きくなる傾向があることが分かる。

海洋波の高周波領域のエネルギースペクトルはほぼ ω^{-4} に比例すると言われている。この時、 k_p の12倍高調波におけるエネルギーはスペクトルのピークにおけるレベルのわずか1%以下である。またここで採用しているスペクトル形状およびエネルギー密度は、

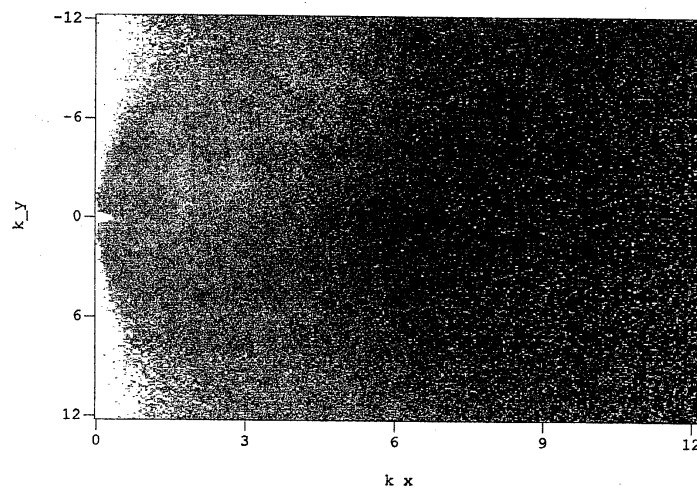


図 3: 見かけの伝播速度と線形の伝播速度の比 (波数ベクトル平面)

現実の海洋波浪場のそれと比べてそれほどかけ離れたものではない。これらの事実と上で得られた数値結果を考え合わせると、現実の海洋波では、少なくともエネルギー的に意味のある周波数の範囲（例えば周波数でピークの3倍高調波程度以下）では、実質的には線形分散関係がかなりいい精度で成り立っていると考えてよいように思われる。ただし、ここではまだ一つのスペクトル形、一つのエネルギーレベルしか扱っていないので、今後スペクトル形およびエネルギー密度をさまざまに変えて検討をする必要がある。

非線形不規則波浪場における分散関係に関する理論的な研究としては、例えば Masuda et al. (1979) がある。そこでは各波数ベクトルの波動は自由波成分と拘束波成分に分離されている。そして自由波成分の伝播速度に対しては、高波数になるにしたがって線形伝播速度からのずれがしだいに増大すること、スペクトルの主方向に近い方向に伝播する波動ほど線形伝播速度からのずれが大きくなる傾向があることなど、定性的にはここで得られた数値的結果と合致する性質が予言されている。しかし定量的に比較するとかなりの相違が見られる。具体的には $E = 0.0025$ の時、例えば周波数で2.5倍高調波（波数で6.25倍高調波）で主方向($\theta = 0$)に伝播する成分波の場合、伝播速度の線形伝播速度からのずれは、われわれの数値結果によると約4%であるのに対し、Masuda らの理論によると約10%にもなる。われわれの手法では、ある波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持つ波動成分は、自由波も拘束波もすべて含んでいるのに対し、Masuda らの理論ではそれらを分離して取り扱っており、上記の Masuda らの理論の結果とは、このうち自由波に対するものである。拘束波成分は和の非線形干渉の結果生み出されるものが多く、したがって通常その伝播速度は線形分散関係から期待される伝播速度よりかなり速いと考えられる。したがって、Masuda らの理論値に拘束波の寄与分まで含めたとすると、われわれの数値結果との定量的相違は増加しこそすれ縮まる見込みはないように思われる。この点に関してはまだまだ今後の検討を要する。

4 高周波領域における分散関係

前節の結果によると見かけの伝播速度の線形の伝播速度からのずれは、高波数に行くほど単調に増大する。このことから、どんどん高波数に行くとうなるのであろうかというナイーブな疑問が浮かんでくる。海洋波の高周波領域での周波数スペクトルは前にも記したように

$$\Phi(\omega) \propto \omega^{-4} \quad (17)$$

と言われている。線形分散関係に基づいてこれを波数スペクトル $\Phi(k)$ に翻訳すると

$$\Phi(k) \propto k^{-5/2} \quad (18)$$

に対応する。しかし高周波領域における波数スペクトルを直接観測した Banner et al.(1989)によると

$$\Phi(k) \propto k^{-3} \quad (19)$$

がかなりよく成り立っているとのことである。

Belcher & Vassilicos(1997)は、波動場は滑らかな波ととんがった波頂を持つ碎波との重ねあわせであるとの考えから出発して、線形分散関係から見ると一見矛盾するこれら2つのスペクトルのべき則を両立させるような理論を構築しているようであるが、その理論はかなり難解で、その価値を正當に評価するだけの力量が残念ながら今のわれわれにはない。そこで発想を変えて、「 ω^{-4} という周波数スペクトルと、 k^{-3} という波数スペクトルを両立させるためには、 k と ω の間にどのような分散関係があればいいのか」という風に問うてみると、簡単な計算から

$$\omega \propto k^{2/3} \quad \text{instead of} \quad k^{1/2}, \quad (20)$$

したがって

$$C \propto k^{-1/3} \quad \text{instead of} \quad k^{-1/2}, \quad (21)$$

であればいいことが分かる。前節の結果によると波数 k の増加に伴う見かけの伝播速度 C_{ap} の減少は線形理論より遅いので、傾向としては上の要求と矛盾していない。このような問題意識から、この節では前節で考慮した以上の高波数成分の伝播速度がどのようなになっているのかを調べることにする。

シミュレーションの各種設定を表にすると以下のようなものである。前節のシミュレーションでは主方向にピークの12倍高調波まで取り入れていたが、ここではそれを48倍高調波まで引き上げている。その代償として、スペクトルの横方向の広がりはかなり狭くし、それにより y 方向に必要なメッシュ数を減らしている。

図4(a),(b)はこのようにして得られた各波数成分の見かけの伝播速度を(a)線形グラフおよび(b)両対数グラフで表したものである。図4(b)を見ると期待通り(?)ピーク波数の10倍から40倍というかなり広い範囲にわたって、べき則 $C_{ap} \propto k^{-1/3}$ に近い振る舞いをする領域が存在するように見える。

次に、方向分布が狭くなった極限として、伝播方向を完全に一方向にした2次元問題について同様の計算を行った結果が図5(a),(b)である。やはり同じデータを(a)線形グラ

初期スペクトル形	JONSWAP
方向依存性	$\cos^{10430} \theta$
エネルギー密度	$E = 0.0025$
メッシュ点数	$N_x = 8192, N_y = 64$
非線形のオーダー M	3
最大モード番号	$k_{\max} = 2048, l_{\max} = 16$
ピークのモード番号	$k_p = k_{\max}/48 = 42, l_p = 0$
時間発展スキーム	4 次の Runge-Kutta (+ α)
時間きざみ	$\Delta t = T_p/100$

表 2: 高周波用数値シミュレーションの各種パラメタ設定

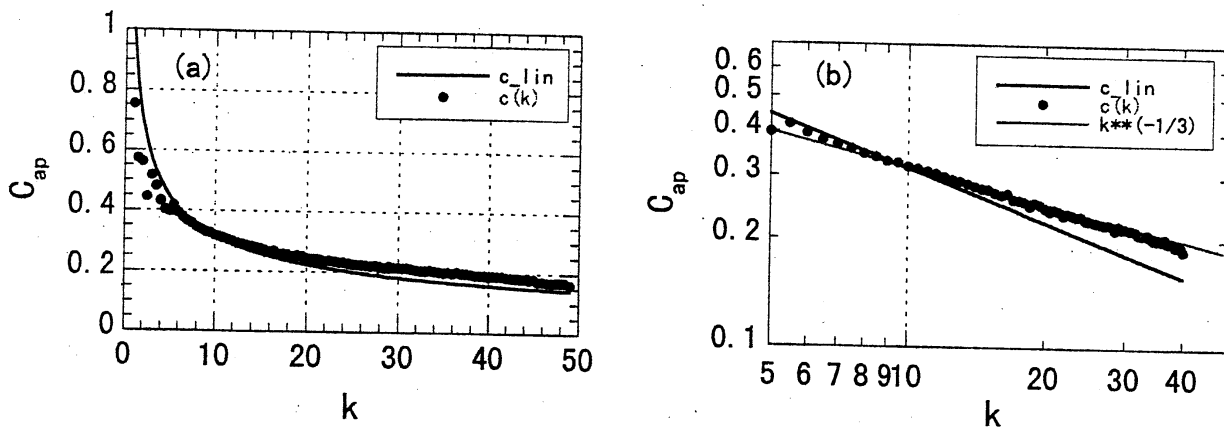


図 4: 見かけの伝播速度 (3次元 ; 4波相互作用まで)

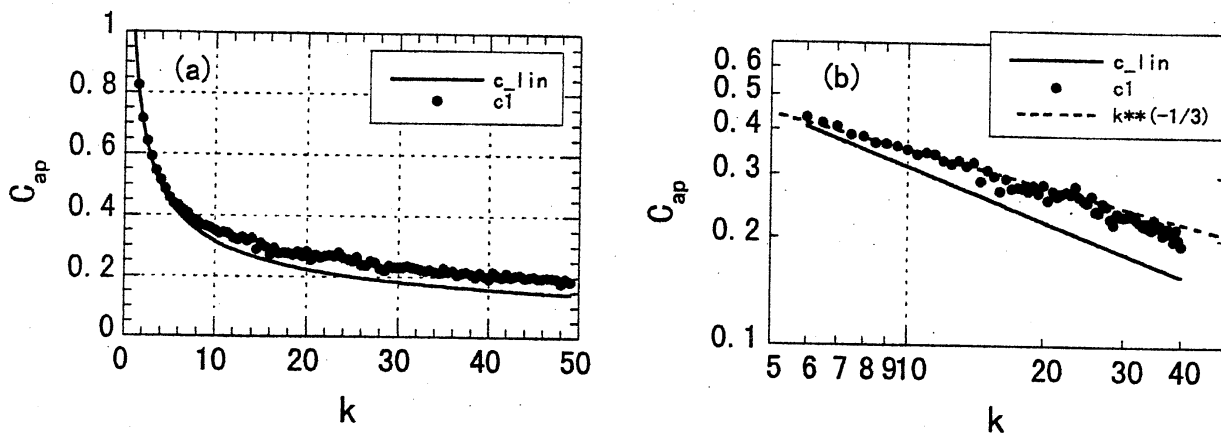


図 5: 見かけの伝播速度 (1方向伝播 ; 4波相互作用まで)

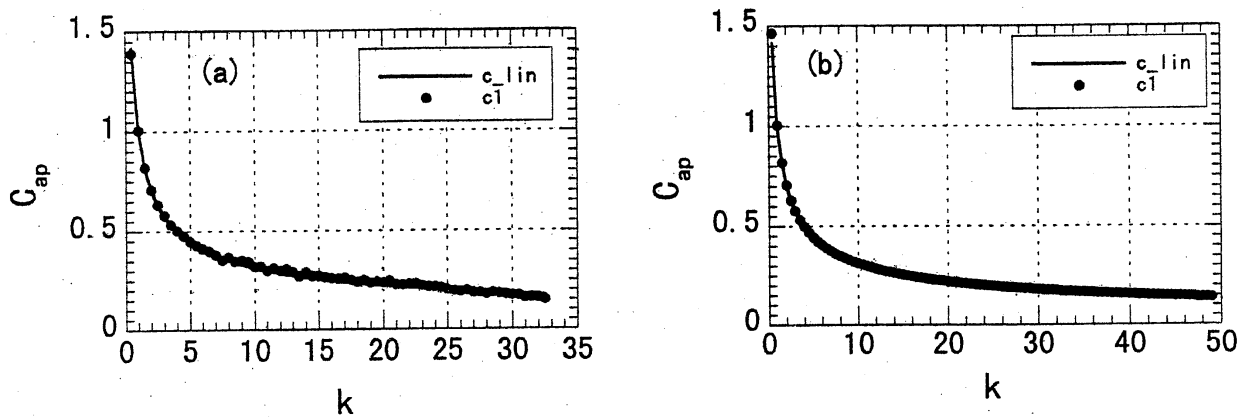


図 6: 見かけの伝播速度 (1 方向伝播) (a)3 波相互作用まで、(b)2 波相互作用だけ

フおよび(b)両対数グラフで表している。ここでもやはり $C_{ap} \propto k^{-1/3}$ に近い振る舞いを見ることができる。

ここで採用している West et al. 流の高次スペクトル法は、ハミルトン形式における正準変数である $\eta(x, t)$ と $\psi(x, t)$ についてコンシステントな打ち切りをしているので、2 波相互作用だけの取り込み (すなわち線形理論)、3 波相互作用までの取り込み、などということが自由にできる。図 6 は図 5 で示したのとまったく同じ計算を、(a)3 波相互作用までを考慮して行ったもの、(b)2 波相互作用だけを考慮して行ったものの結果であるが、これらは線形分散関係からのズレを引き起こしているものが 4 波相互作用であることを如実に示している。

5 結論

本研究から得られた結論をまとめると以下のようなものである。

1. スペクトル形およびエネルギー密度をさまざまに変えた更なる検討が必要ではあるが、現実の海洋波では、少なくともエネルギー的に意味のある周波数の範囲 (例えば周波数でピークの 3 倍高調波程度以下) では、実質的には線形分散関係がかなりいい精度で成り立っていると考えてよさそうである。ただし、線形分散関係からのずれの大きさに関しては、Masuda et al. (1979) の理論的予測との間にはかなりの定量的な不一致がある。
2. 風による吹送流や砕波の影響などの付加的要因を導入せずとも、ごく標準的な非線形水波の枠組みの中においても、一見矛盾すると思われる高周波成分の周波数スペクトル $\Phi(\omega) \propto \omega^{-4}$ と波数スペクトル $\Phi(k) \propto k^{-3}$ を両立させるような新たな分散関係 $\omega \propto k^{2/3}$ を得る事ができる。
3. この新たな分散関係は明らかに 4 波相互作用が引き起こすものであり、それより低次の非線形相互作用の枠内で説明することはできない。また 1 方向伝播についても

同様の現象が観測され、3次元性はあまり本質的ではないように思われる。

4. 第3節に行った高周波成分まで含む数値シミュレーションは第2節の計算に比べ数値的に難しく、かなり小さな時間キザミを取ってもオーバーフローを起こしやすい。この場合には着目する波数領域とエネルギー保有領域とのスケールがかなりよく分離されているので、それをもっと積極的に利用して、今後はむしろZakharov方程式などに基づくより解析的なアプローチを目指す方が有効なのかもしれない。

参考文献

- [1] Banner, M.L., Jones, I.S.F. and Trinder, J.C.: Wavenumber spectra of short gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 198 (1989), 321-344.
- [2] Belcher, S.E. and Vassilicos, J.C.: Breaking waves and the equilibrium range of wind-wave spectra. *J. Fluid Mech.*, 342 (1997), 377-401.
- [3] Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P.: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 184 (1987), 267-288.
- [4] Masuda, A., Kuo, Y-Y. and Mitsuyasu, H.: On the dispersion relation of random gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 92 (1979), 717-730.
- [5] 田中光宏：海洋波のための数値スキームの研究. 数理解析研究所講究録 1030 「波動現象におけるパターンの生成と特異性」 (1998), 162-172.
- [6] West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, M. and Milton, R.L.: A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, 92 (1987), 11,803-11,824.
- [7] Zakharov, V.E.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.)*, 2 (1968), 190-194.