

Navier-Stokes 方程式の解の数値的検証法について

Numerical Verifications of Solutions for the Navier-Stokes Equations

渡部 善隆[†]

Watanabe, Yoshitaka

[†]九州大学大型計算機センター

山本 野人[‡]

Yamamoto, Nobito

[‡]九州大学大学院数理学研究科

中尾 充宏[‡]

Nakao, Mitsuhiro T.

[‡]九州大学大学院数理学研究科

1 Introduction

我々は [8] において, Stokes 方程式の弱解の存在を保証する inf-sup 条件に関わる定数を数値評価することにより, 厳密な意味での a posteriori 誤差の数値的保証を与えた. また [4], [9] では, a posteriori 誤差評価と同様な手法を用いることにより, Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価が得られること, さらに [6] では, [8], [9] により得られた速度に関する H_0^1 誤差評価に対し, Poisson 方程式に対する Aubin-Nitsche trick に似た手法を適用することで, Stokes 方程式の有限要素解に対する L^2 誤差評価を導いた.

本稿では, Stokes 方程式に対して得られたこれまでの a priori および a posteriori 誤差評価を用いることで, [3], [10] において提案した非線形楕円型方程式に対する解の存在検証に関する残差引き戻しの手法が同次境界条件を持つ定常 Navier-Stokes 方程式に対しても適用可能であることを示す. あわせて, 計算機による解の存在検証アルゴリズムを紹介し, 幾つかの数値検証例を与える.

次の同次境界条件を持つ定常 Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形, $u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ は 2 次元ベクトル値関数, $\nu > 0$ とする. u, p は速度場, 圧力場をそれぞれあらわす. また f は流体に働く外力, ν は流体の粘性係数である.

次に, $H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし, $H_0^1(\Omega) \equiv \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $L_0^2(\Omega) \equiv \{v \in L^2(\Omega); (v, 1) = 0\}$ で定義する. ここで $(\cdot, \cdot)$ は Ω 上の L^2 -内積である. $L^2(\Omega)$ -norm を $|v|_0 = (v, v)^{1/2}$, $H_0^1(\Omega)$ -seminorm を $|v|_1 = |\nabla v|_0$ で, また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $H^{-1}(\Omega)$ と $H_0^1(\Omega)$ の duality pairing とし, $H^{-1}(\Omega)$ -norm を $|f|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} (\langle f, v \rangle / |v|_1)$ で定める. また, それぞれの内積, norm はベクトル値関数に対しても自然な定義が可能である. 以下本稿では同じ記号を用いる.

2 有限要素近似解と不動点定式化

T_h を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割, h を T_h の scale parameter とする. $h > 0$ は領域の分割幅を通常表す. また, $X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間, $Y_h \subset L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする. ここで X_h の近似性として次を仮定する:

$$\inf_{\xi \in X_h} |v - \xi|_1 \leq C_0 h |v|_2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad (2)$$

ただし C_0 は数値的に算定可能な正定数, $|\cdot|_2$ は Ω 上の H^2 -seminorm とする. 仮定 (2) は, 一般の有限要素空間で成立することが知られている. また, C_0 が数値的に決められる X_h の例は多い (cf. [5], [7]). さらに

に近似空間 X_h^2, Y_h において, 任意の $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対する Stokes 方程式:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = \xi & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の有限要素近似解が一意的に定まることを仮定する. このとき, Stokes 方程式の弱解 $[u, p] \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ と有限要素近似解 $[u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h$ に対し, ν のみに依存する数値的に算定可能な定数 $C_2 > 0$ が存在し, 誤差評価:

$$|u - u_h|_1 \leq C_2 |\xi|_{-1} \quad (3)$$

を得る. さらに [9] より, $\xi \in L^2(\Omega)^2$ の場合には, より “シャープ” な誤差評価:

$$|u - u_h|_1 \leq C_1 |\xi|_0 \quad (4)$$

を導くことができる. ここで C_1 は Ω, h および ν に依存する数値的に算定可能な定数である.

次に, (1) の有限要素近似解 $[u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h$ を以下で求める:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \operatorname{div} v_h) = -((u_h \cdot \nabla)u_h, v_h) + (f, v_h) & \forall v_h \in X_h^2, \\ -(\operatorname{div} u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Y_h. \end{cases} \quad (5)$$

X_h, Y_h に対する仮定より, (5) の解 $[u_h, p_h]$ は $-(u_h \cdot \nabla)u_h + f \in L^2(\Omega)^2$ を右辺とする Stokes 方程式:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} = -(u_h \cdot \nabla)u_h + f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

の有限要素近似解と一致する. 従って, $v_0 \equiv \bar{u} - u_h, p_0 \equiv \bar{p} - p_h$ とおくと, $v_0 \in H_0^1(\Omega)^2$ は $-(u_h \cdot \nabla)u_h + f \in L^2(\Omega)^2$ に対する Stokes 方程式の誤差を意味し, explicit な形は不定であるが [6], [8] の手法による a posteriori な norm の定量評価が可能である. ここで, $w \equiv u - \bar{u}, r \equiv p - \bar{p}$ とおくと, $u = w + v_0 + u_h$ となり,

$$g(w) \equiv -((u_h + v_0 + w) \cdot \nabla)(u_h + v_0 + w) + (u_h \cdot \nabla)u_h \in H^{-1}(\Omega)$$

に対して (1) の引き戻し形 (residual form)

$$\begin{cases} -\nu \Delta w + \nabla r = g(w) & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

を得る. 次に, (7) を不動点定式化する. 任意の $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対し, Stokes 方程式

$$\begin{cases} -\nu \Delta \hat{w} + \nabla \hat{r} = \xi & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \hat{w} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \hat{w} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

の弱形式は一意的な解 $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)^2$ を持つ (cf. [1]). $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対し, $A\xi$ を (8) の解 $\hat{w}$ として定めると, A は $H^{-1}(\Omega)^2$ から $H_0^1(\Omega)^2$ への連続線形写像となる. ここで, $F \equiv Ag$ とおけば, F は $H_0^1(\Omega)^2$ 上の compact map となる. よって, (7) は $H_0^1(\Omega)^2$ 上の不動点問題

$$w = Fw$$

に書き直すことができる。

次に, X_h, Y_h の仮定より, $\xi \in H^{-1}(\Omega)^2$ に対する Stokes 方程式 (8) の有限要素近似解 $\hat{w}_h \in S_h$ を一意に定めることができる. この対応関係を $A_h: H^{-1}(\Omega)^2 \rightarrow S_h$ とおき, S_h^* を

$$S_h^* \equiv \{v \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v = (A - A_h)\xi, \quad \xi \in H^{-1}(\Omega)^2\}$$

で, また product space X を $X \equiv (S_h, S_h^*)$ で定める. このとき, X はノルム $|x|_X \equiv \max\{|x_h|_1, |x^*|_1\}$ $x = (x_h, x^*) \in X$ に関して Banach 空間となる. ここで, X から $H_0^1(\Omega)^2$ への線形写像 $P: Px \equiv x_h + x^* \quad x = (x_h, x^*) \in X$ に対し, $G \equiv g \circ P$ とすれば,

$$\tilde{F}x \equiv (A_h Gx, (A - A_h)Gx)$$

は X 上の compact map となる. 従って, Schauder の不動点定理より, 空でない有界凸閉集合 $W \subset X$ に対し $\tilde{F}W \subset W$ が成り立つならば, $\tilde{F}$ の不動点 x が W 内に存在する. さらに, この不動点 $x = (x_h, x^*) \in X$ に対し, $Px = x_h + x^* \in H_0^1(\Omega)^2$ は F の不動点となる.

3 Newton-like Method と検証条件

ここでは, 不動点問題 $x = \tilde{F}x$ に [2], [3] で提案された Newton-like method を適用し, 解の存在検証条件を導く. まず Newton-like operator $N_h: X \rightarrow S_h$ を

$$N_h x \equiv x_h - [P_1 - A_h \hat{g}'(u_h)]_h^{-1} (x_h - A_h Gx) \quad x = (x_h, x^*)$$

で定義する. ただし $\hat{g}(w) \equiv -(w \cdot \nabla)w$, P_1 は $H_0^1(\Omega)^2$ から X_h^2 への H_0^1 -projection, $[P_1 - A_h \hat{g}'(u_h)]_h^{-1}$ は $H_0^1(\Omega)^2$ から X_h^2 への作用素 $P_1 - A_h \hat{g}'(u_h)$ を X_h^2 に制限した作用素の逆像であり, 存在を仮定する. 実際の計算では $[P_1 - A_h \hat{g}'(u_h)]_h^{-1}$ の存在は行列の正則性によって検証する.

ここで compact 作用素 $T: X \rightarrow X$ を

$$Tx \equiv (N_h x, (A - A_h)Gx)$$

で定めると, 二つの不動点問題 $x = Tx$, $x = \tilde{F}x$ は同値となる.

次に, T の不動点を実現する候補者集合 (candidate set) および検証条件を導く. 任意の $v_h \in X_h^2$ は実係数 $\{a_i\}_{1 \leq i \leq 2n}$ と X_h の基底 $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を用いて

$$v_h = \left(\sum_{i=1}^n a_i \phi_i, \sum_{i=1}^n a_{n+i} \phi_i \right)^T$$

と表現することができる. ここで $(v_h)_i$ を

$$(v_h)_i \equiv |a_i|$$

と書き, 非負な $\{W_i\}_{1 \leq i \leq 2n+2}$ に対し構成される $W_h \subset S_h$ および $W^* \subset S_h^*$ を

$$W_h \equiv \{w_h \in S_h \mid (w_h)_i \leq W_i \quad 1 \leq i \leq 2n\},$$

$$W^* \equiv \{w_1 + w_2 \in S_h^* \mid w_1, w_2 \in S_h^*, \quad |w_1|_1 \leq W_{2n+1}, |w_2|_1 \leq W_{2n+2}\}$$

で定義し, 候補者集合を

$$W \equiv (W_h, W^*) \subset X$$

とおく. W_{2n+1}, W_{2n+2} は (4), (3) における Stokes 方程式の誤差評価ノルムにそれぞれ対応する.

このとき, 次の検証条件が成立する:

Theorem 3.1

$$\begin{cases} N_h(W) \subset W_h, \\ (A - A_h)G(W) \subset W^* \end{cases} \quad (9)$$

が成立すれば, $\tilde{F}$ の不動点 x が W 内に存在する.

4 数値計算アルゴリズム

ここでは, 検証条件 (9) を満たす候補者集合 W を計算機内で実現するアルゴリズムについて述べる. まず, $N = 0$ に対し,

$$W_i^{(0)} = 0 \quad 1 \leq i \leq 2n+2,$$

$\{W_i^{(0)}\}_{1 \leq i \leq 2n+2}$ に対し $W^{(0)} = (W_h^{(0)}, W^{*(0)})$ と定義する.

次に, $N \geq 1$ に対し, 微小な $0 < \delta \ll 1$ を用いて以下を定める:

$$\bar{W}_i^{(N-1)} \equiv W_i^{(N-1)}(1 + \delta) \quad 1 \leq i \leq 2n+2.$$

さらに, $\{\bar{W}_i^{(N-1)}\}_{1 \leq i \leq 2n+2}$ によって構成される集合 $\bar{W}^{(N-1)} = (\bar{W}_h^{(N-1)}, \bar{W}^{*(N-1)})$ を作成する. この手順を δ -inflation と呼ぶ. 次に, 集合 $\bar{W}^{(N-1)}$ に対する候補者集合 $W^{(N)} = (W_h^{(N)}, W^{*(N)})$ を以下で定義する:

$$\begin{cases} W_h^{(N)} \equiv N_h \bar{W}^{(N-1)}, \\ W_{2n+1}^{(N)} \equiv C_1 \sup_{w \in \bar{W}^{(N-1)}} |G_1(w)|_0, \\ W_{2n+2}^{(N)} \equiv C_2 \sup_{w \in \bar{W}^{(N-1)}} |G_2(w)|_{-1}, \end{cases} \quad (10)$$

ここで $w = (w_h, w^*) \in X$ に対し

$$\begin{aligned} G_2(w) &\equiv -((v_0 + w^*) \cdot \nabla)(v_0 + w^*) \in H^{-1}(\Omega)^2, \\ G_1(w) &\equiv G(w) - G_2(w) \in L^2(\Omega)^2 \end{aligned}$$

である. 実際の計算では, (10) の各値は over-estimate の意味で評価される. この時, Theorem 3.1 より, 以下の計算機による検証条件を示すことができる:

Theorem 4.1 ある step K で

$$W_i^{(K)} < \bar{W}_i^{(K-1)} \quad 1 \leq i \leq 2n+2,$$

が成立するとき, $\{\bar{W}_i^{(K-1)}\}_{1 \leq i \leq 2n+2}$ より構成される集合 $\bar{W}^{(K-1)} = (\bar{W}_h^{(K-1)}, \bar{W}^{*(K-1)}) \subset X$ 内に $x = Tx$ を満たす x が存在する.

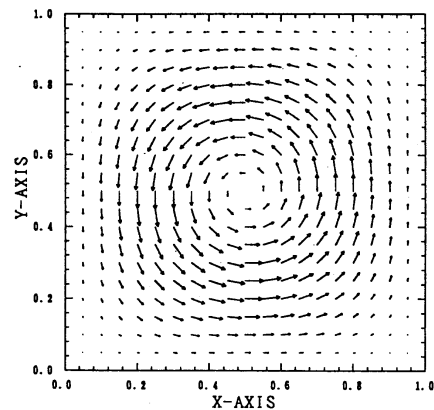
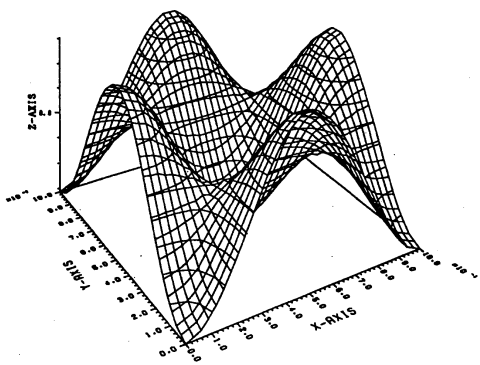
5 Numerical Examples

領域 Ω は $(0, 1) \times (0, 1)$ の正方領域とし, Ω を矩形要素に等分割する. x (または y) 軸方向の分割数を L とおく. 分割の parameter h は $h = 1/L$ となる. 有限要素空間 $X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 2 次要素 (piecewise biquadratic) を用いる. また, $Y_h \subset L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 1 次要素 (piecewise bilinear) を用いる. 区分的 2 次の基底も, 同じく 1 次元の区分 2 次要素のテンソル積で定義する. このとき X_h, Y_h は inf-sup 条件を満足する ([1]).

数値例は $f = (f_1, f_2)^2$ を適当な C に対し

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= C \sin^2 \pi x \sin \pi y \cos \pi y \\ u_2(x, y) &= -C \sin^2 \pi y \sin \pi x \cos \pi x \\ p(x, y) &= -C^2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y / 16 \end{aligned}$$

が解となるように選ぶ. $u_h \in X_h^2$ は Newton-like な手法を用い (5) を変形し, 反復法により求めた. なお, 打ち切りによって発生する誤差はここでは無視する (誤差の考慮については [10] を参照). 下図は, 圧力場 $p(x, y)$ および速度場 $u(x, y)$ をそれぞれプロットしたものである.



下表は, $Re = 1/\nu$ に対し, Theorem 4.1の検証条件を満足する候補者集合をあらわす. L は分割数, N は反復回数, $|u|_1$ は exact solution の H_0^1 -norm をあらわす. (1) の弱解 $u = u_h + v_0 + w$ は, 有限要素近似解 u_h の周りに v_0, w に対応する誤差分の $H_0^1(\Omega)$ の元を付け加えた集合の中に存在することが検証できた.

Re	L	N	$ u _1$	$ v_0 _1$	$\ W_h^{(N)}\ _\infty$	$W_{2n+1}^{(N)}$	$W_{2n+2}^{(N)}$
1	10	14	3.33×10^{-1}	2.61×10^{-2}	3.52×10^{-3}	2.44×10^{-3}	1.67×10^{-4}
2	10	12	2.22×10^{-1}	1.29×10^{-2}	1.33×10^{-3}	7.67×10^{-4}	7.67×10^{-5}
5	40	22	2.22×10^{-1}	3.55×10^{-3}	1.38×10^{-3}	7.59×10^{-4}	1.89×10^{-5}
10	40	23	1.11×10^{-1}	4.19×10^{-2}	4.26×10^{-4}	1.86×10^{-4}	1.47×10^{-6}
20	40	32	5.55×10^{-2}	5.81×10^{-4}	4.45×10^{-4}	1.96×10^{-4}	2.47×10^{-6}
40	40	27	2.22×10^{-2}	4.35×10^{-4}	2.90×10^{-4}	1.08×10^{-4}	2.42×10^{-6}
50	40	13	1.11×10^{-2}	2.68×10^{-4}	8.35×10^{-5}	1.95×10^{-5}	8.48×10^{-7}
100	40	15	4.44×10^{-3}	2.09×10^{-4}	6.63×10^{-5}	1.37×10^{-5}	1.02×10^{-6}

数値計算は FUJITSU VPP700/56, 言語は Fortran 90, 精度は倍精度計算で行なった. もちろん, 数値結果には丸め誤差が混入しているため, 厳密な解の存在検証を得るためには有理数演算, または精度保証付きソフトウェアでの計算が必要である.

参考文献

- [1] Girault, V., Raviart, P. A.: *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg New York, Springer (1986).

- [2] Nakao, M. T. : A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **164** (1992) pp.489–507.
- [3] Nakao, M. T. : Solving Nonlinear Elliptic Problems with Result Verification Using an H^{-1} Type Residual Iteration, *Computing, Suppl.*, **9** (1993) pp.161–173.
- [4] Nakao, M. T., Yamamoto, N. and Watanabe, Y. : Guaranteed Error Bounds for the Finite Element Solutions of the Stokes Problem, *Scientific Computing and Validated Numerics*, Proceedings of the International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics SCAN-95, held in Wuppertal, Germany, September 26-29, 1995 (G. Alefeld, A. Frommer, B. Lang, eds.), Mathematical Research, Volume 90, Akademie Verlag (1996) pp.258–264.
- [5] Nakao, M. T., Yamamoto, N. and Kimura, S. : On Best Constant in the Optimal Error Estimates for the H_0^1 -projection into Piecewise Polynomial Spaces, to appear in *J. Approximation Theory*.
- [6] 中尾 充宏, 山本 野人, 渡部 善隆 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 応用数学合同研究集会報告集, 龍谷大学 (1996) pp.203–208.
- [7] Schultz, M. H. : *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1973).
- [8] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 短期共同研究・数値計算における品質保証とその応用 – 感度解析から証明まで –, 京都大学数理解析研究所講究録, **928** (1995) pp.20–31.
- [9] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価, 科学技術における数値計算の理論と応用, 京都大学数理解析研究所講究録, **944** (1996) pp.41–49.
- [10] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications for Solutions to Elliptic Equations using Residual Iterations with a Higher Order Finite Element, *J. Comput. Appl. Math.*, **60** (1995) pp.271–279.