

# Homology と Conley Index 入門<sup>1</sup>

埼玉大学 理学部 新居 俊作<sup>2</sup>

## 1 はじめに

力学系を分析する指針として Conley [1] は以下のようなプログラムを提案した.

(1) 与えられた力学系について, 平衡点や周期軌道等の孤立した不変集合を特定する.

(2) 次にその様な不変集合の間の “heteroclinic orbit”<sup>3</sup> を決定する.

特に後半の heteroclinic orbit の決定を, 前半で特定された孤立不変集合の持つ位相的な性質によって行なおうというのが Conley Index の理論である.

孤立不変集合が平衡点に限られる場合に各平衡点に Index を定義し, それを力学系の定義されている空間の位相的な構造に関連付けることによって, 平衡点自体やその間の heteroclinic orbit の存在を示すことは Poincaré 以来行なわれていることである.

Conley Index, 特に Connection Matrix の理論は, この視点を押し進めて不変集合の間の heteroclinic orbit の存在や分岐の議論を位相的な情報に基づく代数的な議論によって行なう体系である.

このように不変集合の位相的な情報を代数的な形で利用することにより, 必ずしも平衡点とは限らない不変集合も平衡点の様に扱って, その位相的な構造を力学系の大域的な性質の分析に利用出来ることが Conley Index の大きな特徴である.

本稿では代数的位相幾何学及び Conley Index の基本的な考え方と, それを用いて如何にして力学系の性質を調べるかを解説することを目標とする. 解説は簡潔で本質が理解しやすく, self-contained になるように心がけたつもりである. そのため, 単純な例を取り上げたり, 特殊な場合にのみ通用する議論を行っている箇所もある. より具体的な例や一般的な議論については, 参考文献にあげた論文を各自参照して頂きたい.

## 2 位相空間の胞体分割と Homology

### 定義 1

位相空間  $M$  が以下のように分割される時, この分割を  $M$  の胞体分割と呼ぶ.

<sup>1</sup> この原稿は, 2002 年 1 月 7 日-11 日に京都府立ゼミナールハウスで行なわれた「応用解析チュートリアル・冬の学校」の講義ノートである.

<sup>2</sup> E-mail: snii@rimath.saitama-u.ac.jp

<sup>3</sup> heteroclinic orbit とは, おおざっぱにいうと, 異なる平衡点の間を結ぶ軌道である. 例えば第 5 節の図 11 を参照.

$$(1) M = \coprod_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 1 \leq i \leq I_n}} e_n^i$$

(2) 各  $e_n^i$  について  $n$  次元閉球体  $\overline{D}_n$  から  $M$  への連続写像  $\varphi_n^i$  で  $\varphi_n^i|_{D_n}$  が  $D_n$  から  $e_n^i$  への同相写像となるものがある. ( $e_n^i$  を  $n$  次元胞体とよぶ.)

$$(3) \text{ 各 } \varphi_n^j \text{ について } \varphi_n^j(\partial D_n) \subset \coprod_{\substack{m \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq I_m}} e_m^i$$

注意

与えられた空間の胞体分割は (存在すれば) 無限にある.

例 1.

図1では閉円盤  $\overline{D}_2$  の二通りの胞体分割が示されており, 図2では球面  $S^2$  の二通りの胞体分割が示されている.

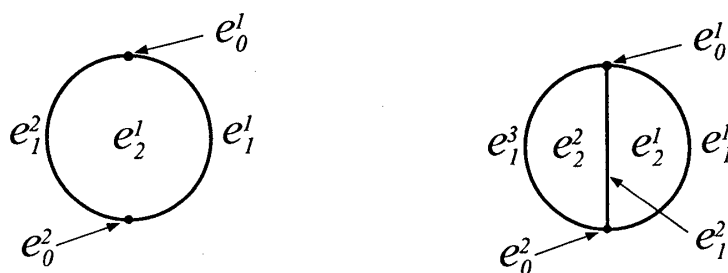


図 1:  $\overline{D}_2$  の胞体分割

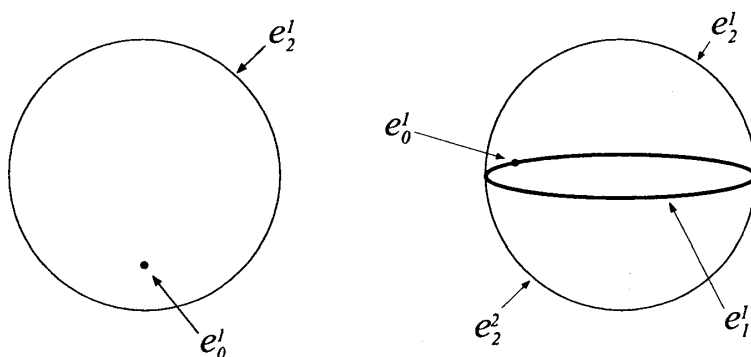


図 2:  $S^2$  の胞体分割

以下では  $M$  の胞体分割  $M = \coprod e_n^i$  が与えられたとし,  $M$  の各  $n$  次元胞体に  $n$  次元多様体としての向きを与える. 特に  $0$  次元胞体に対しては  $\pm 1$  によって向きを与える.

各  $n$  次元胞体  $e_n^i$  に対して  $I_{n-1} \times 1$  行列

$$\partial_n^i = \begin{pmatrix} b_{1,i}^{(n)} \\ \vdots \\ b_{I_{n-1},i}^{(n)} \end{pmatrix}$$

を次のように定める.

先ず  $\partial D_n$  に  $D_n$  の向きから決まる向きを定め (図 3 参照),  $\varphi_n^i(\partial D_n)$  が  $e_{n-1}^j$  を覆う (向きを込めた) 回数を  $b_{j,i}^{(n)}$  とする. 但し向きのついた胞体  $e_n^i$  に対して, この胞体に対する逆の向きは元の向きの  $-1$  倍と考える.

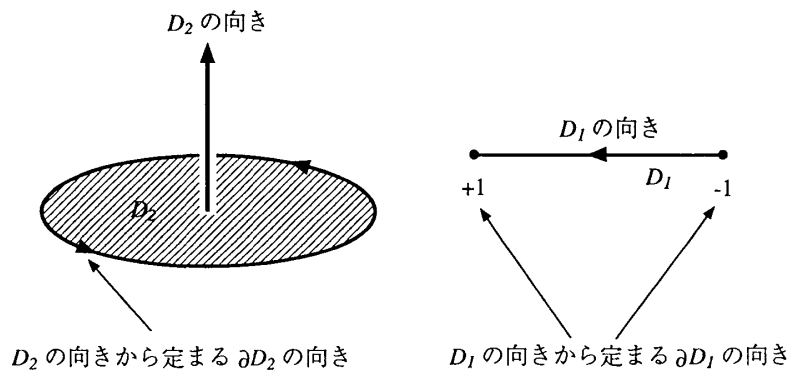


図 3:  $D_n$  の向きから定まる  $\partial D_n$  の向き

これを用いて  $I_{n-1} \times I_n$  行列  $\partial_n$  を

$$\partial_n := \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(n)} & \cdots & b_{1,I_n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{I_{n-1},1}^{(n)} & \cdots & b_{I_{n-1},I_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

によって定める. また

$$\partial_0 := \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(0)} & \cdots & b_{1,I_0}^{(0)} \end{pmatrix}$$

は  $e_0^i$  の向きが  $+1$  のときは  $b_{1,i}^{(0)} = 1$  とし  $e_0^i$  の向きが  $-1$  のときは  $b_{1,i}^{(0)} = -1$  として決める.

## 定義 2

$\partial_n$  を  $\mathbb{R}^{I_n}$  から  $\mathbb{R}^{I_{n-1}}$  (又は  $\mathbb{Z}_2^{I_n}$  から  $\mathbb{Z}_2^{I_{n-1}}$ ) への写像とみなし,  $\partial_0$  を  $\mathbb{R}^{I_0}$  から  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{Z}_2^{I_0}$  から  $\mathbb{Z}_2$ ) への写像とみなして

$$H_n(M) := \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

と定める.  $H_n(M)$  を  $M$  の (胞複体の)  $n$  次元 Homology 群<sup>4</sup> とよぶ.

<sup>4</sup> 通常は  $\partial_0 = 0$  として定義したものを Homology 群とよび, 上記の  $\partial_0$  を用いて定められる Homology 群は簡約 (reduced) Homology 群とよび  $\bar{H}_n(M)$  と書く. しかし本稿では, 後の議論を簡単にする為にこの様に定義する.

## 注意

位相幾何学の入門書では、普通係数環として  $\mathbb{Z}$  を用いて *Homology* を定義しているが、*Conley Index* を扱う場合、係数環として体、特に  $\mathbb{Z}_2$  を用いることも多いので、ここでは係数環は  $\mathbb{R}$  又は  $\mathbb{Z}_2$  としておく。

## 事実

$H_n(M)$  は  $M$  の胞体分割の仕方によらず、同型を除いて一意である。

## 例 2

図 4 の左側の向き付けられた胞体分割に対しては

$$\partial_n = 0 \ (n \geq 3) \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \partial_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

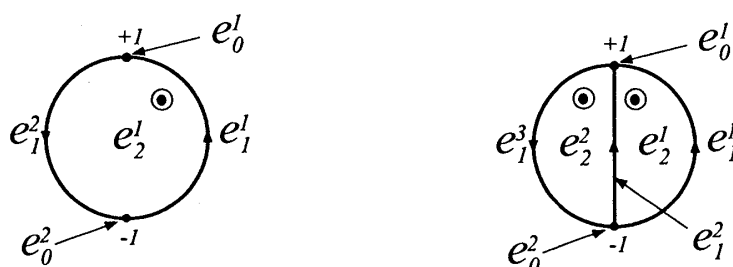
右側の向き付けられた胞体分割に対しては

$$\partial_n = 0 \ (n \geq 3) \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \partial_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

となり、いずれの場合からも

$$H_2(\overline{D_2}) = 0 \quad H_1(\overline{D_2}) = 0 \quad H_0(\overline{D_2}) = 0$$

となる。



⊙は2次元胞体の向きを表す

図 4:  $\overline{D_2}$  の Homology 群

また、図 5 の左側の胞体分割については

$$\partial_n = 0 \ (n \geq 3) \quad \partial_2 = 0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^0 \quad \partial_1 = 0 : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R} \quad \partial_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

右側の胞体分割に対しては

$$\partial_n = 0 \ (n \geq 3) \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \partial_1 = 0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \partial_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

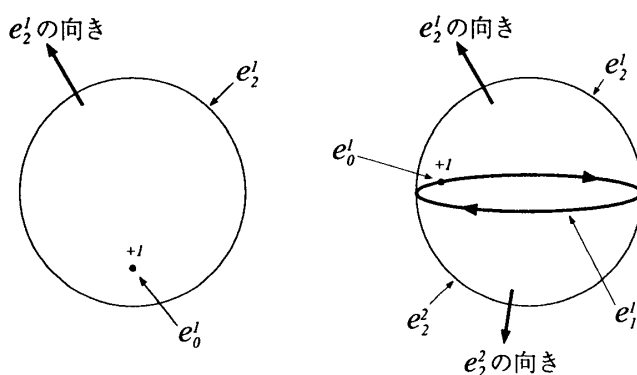


図 5:  $S^2$  の Homology 群

となり, いずれの場合からも

$$H_2(S^2) = \mathbb{R} \quad H_1(S^2) = 0 \quad H_0(S^2) = 0$$

が得られる.

#### 注意

特にこの例から分かるように,  $M$  が  $n+1$  次元胞体の境界になっていない  $n$  次元球面を含めば,  $H_n(M)$  はそのような球面の数だけ  $\mathbb{R}$  を含む.

逆に,  $H_n(M)$  が  $\mathbb{R}^k$  を含むならば,  $M$  は大体  $S^n$  を  $k$  個含むと考えて良い. (常にそうである訳ではないが)

### 3 ベクトル場による胞体分割 と Floer Homology

この節では  $M$  を compact な多様体とし,  $X$  を  $M$  上のベクトル場,  $X$  が  $M$  上に誘導する flow を  $\phi^t$  とする.

#### 仮定

- (1)  $X$  の平衡点は全て *hyperbolic*. 即ち,  $p$  が平衡点であれば  $X$  の  $p$  での線型化  $DX(p)$  は実部が零の固有値を持たない.
- (2)  $M$  上の点  $m$  が平衡点でなければ

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(m) = p, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(m) = q$$

となる平衡点  $p, q$  が存在する.

- (3) 任意の二つの平衡点  $p, q$  について,  $p$  の不安定多様体  $W^u(p)$  と  $q$  の安定多様体  $W^s(q)$  は (交わるならば) 横断的に交わる. 即ち,  $W^u(p) \cap W^s(q) \ni m$  とすると  $m$  における  $W^u(p)$  の接空間と  $W^s(q)$  の接空間の和が  $M$  の接空間を張る.

$X$  の平衡点  $p$  に対して  $W^u(p)$  の次元, 即ち  $DX(p)$  の実部正の固有値の数を  $p$  の index とよび  $\text{Ind}(p)$  で表す.

上記の仮定を満たすベクトル場が与えられると, 次のように  $M$  を胞体分割できる.

まず,  $X$  の平衡点で  $\text{Ind}(p) = 0$  となるものをゼロ次元胞体  $e_0^i$  ( $1 \leq i \leq I_0$ ) とする. 次に  $n \geq 1$  について  $\text{Ind}(p) = n$  となる平衡点の不安定多様体  $W^u(p)$  を  $n$  次元胞体  $e_n^i$  ( $0 \leq i \leq I_n$ ) とする. この時, 上記の仮定 (1), (2) より  $M = \coprod_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 0 \leq i \leq I_n}} e_n^i$  が成り立つ. (但し,  $\dim M = N$  とする.) また, 各  $p$  について  $W^u(p)$  は  $D^{\text{Ind}(p)}$  と同相である. さらに, 仮定 (3) から  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(m) = p$  かつ  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(m) = q$  ならば  $\text{Ind}(p) > \text{Ind}(q)$  が成り立つので 胞体分割の条件 (3) も成り立つ.

### 例 3

図 6 参照.

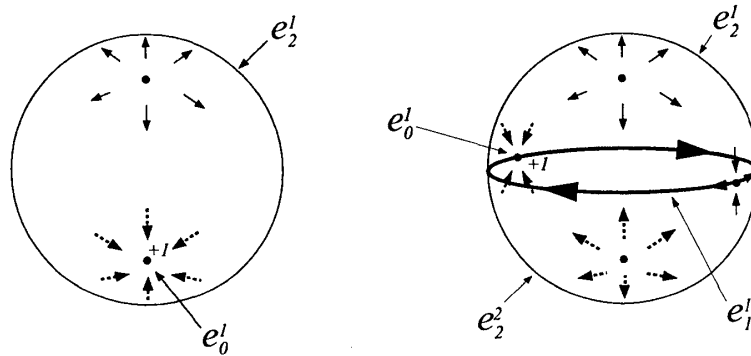


図 6: ベクトル場による  $S^2$  の胞体分割

この胞体分割を用いて定義した  $M$  の Homology 群  $H_n(M)$  を *Floer Homology*<sup>5</sup> とよぶ.

## 4 Conley Index と Connection Matrix

前節で解説した Floer Homology において, 各胞体を”太らせる”と Conley Index が得られる.

まず各ゼロ次元胞体 (index ゼロの平衡点)  $e_0^i$  に対し, その十分小さい閉近傍  $L_0^i$  で以下を満たすものをとる.

(\*)  $\partial L_0^i$  上でベクトル場は内向きである.

次に 1 次元胞体  $e_1^i$  について, 以下のような集合  $L_1^i$  と  $N_1^i$  をとる.

(1)  $L_1^i$  は  $\overline{e_1^i \setminus (\cup L_0^j)}$  の  $M \setminus (\cup L_0^j)$  内での管状閉近傍.

(2)  $N_1^i \subset \partial L_1^i$  は  $\partial L_1^i \cap e_1^i$  の  $\partial L_1^i$  における閉近傍.

<sup>5</sup> 正確には, このアイデアを無限次元空間に適用したものが Floer Homology である

(3)  $N_1^i$  上ではベクトル場は外向きで  $\partial L_1^i$  の他の点ではベクトル場は内向き.

図 7 参照

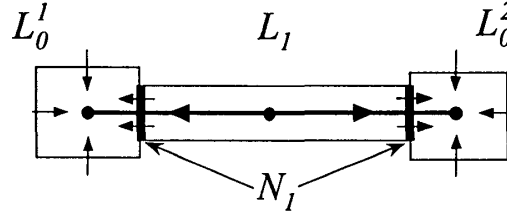


図 7:  $L_0$ ,  $N_1$  及び  $L_1$  の取り方

以下同様にして  $n$  次元胞体  $e_n^i$  に対し, 次を満たす集合  $L_n^i$  と  $N_n^i$  をとる.

(1)  $L_1^i$  は  $\overline{e_n^i \setminus (\bigcup_{m \leq n-1} L_m^j)}$  の  $\overline{M \setminus (\bigcup_{m \leq n-1} L_m^j)}$  内での閉近傍.

(2)  $N_n^i \subset \partial L_n^i$  は  $\partial L_n^i \cap e_n^i$  の  $\partial L_n^i$  における閉近傍.

(3)  $N_n^i$  上ではベクトル場は外向きで  $\partial L_n^i$  の他の点ではベクトル場は内向き.

この時, 各  $L_n^i$  における同値関係を  $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in N_n^i$  によって定め,  $L_n^i / \sim$  を  $L_n^i / N_n^i$  と書く (但し  $N_n^i = \emptyset$  の場合については,  $\{*\}$  を一点からなる集合として  $L_n^i / N_n^i := L_n^i \amalg \{*\}$  とする),  $L_n^i / N_n^i$  は  $S^n$  に Homotopy 同値である.

逆に,  $n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) と  $i \in \mathbb{N}$  で添字付けられた  $\overline{D_N}$  と同相な空間  $L_n^i$  と閉集合  $N_n^i \subset \partial L_n^i$  の組で,  $L_n^i / N_n^i$  が  $S^n$  と Homotopy 同値なものを与えられたとする. この時, 各  $N_n^i$  の  $\partial L_m^j \setminus N_m^j$  ( $m \leq n-1$ ) への張り合わせ方を指定すれば元の多様体  $M$  の胞体分割  $M = \amalg e_n^i$  を得ることが出来る.

このことより,  $M$  の胞体分割を得るには  $M$  上のベクトル場  $X$  に課せられていた条件は, 以下のように緩めることが出来る.

#### 仮定

次の条件を満たす  $\overline{D_N}$  と同相な集合  $L_n^i$  によって  $M$  を分割することが出来る.

(i.e.  $M = \amalg L_n^i$ )

(1) 異なる  $L_n^i$  と  $L_m^j$  は境界でしか交わらない.

(2)  $\partial L_n^i$  上でベクトル場が外向きである点の集合を  $N_n^i$  とすると  $\partial L_n^i \setminus N_n^i$  ではベクトル場は内向きであり,  $L_n^i / N_n^i$  は  $S^n$  と Homotopy 同値である.

(3)  $N_n^i \cap L_m^j \neq \emptyset$  かつ  $(m, j) \neq (n, i)$  ならば  $m \leq n-1$

以上の条件を満たす  $M$  の分割が与えられれば  $M$  の Homology 群を得ることが出来る. すなわち,  $L_n^i$  の ( $N_n^i$  における)  $L_{n-1}^j$  への張り合わせ方によって

$$\partial_n = \begin{pmatrix} b_{1,1}^{(n)} & \cdots & b_{1,I_n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{I_{n-1},1}^{(n)} & \cdots & b_{I_{n-1},I_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

を定め,  $H_n(M) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$  を求めれば良い.

注意

これが所謂 *Morse* 理論のアイディアである.

例 4

図 8 参照.

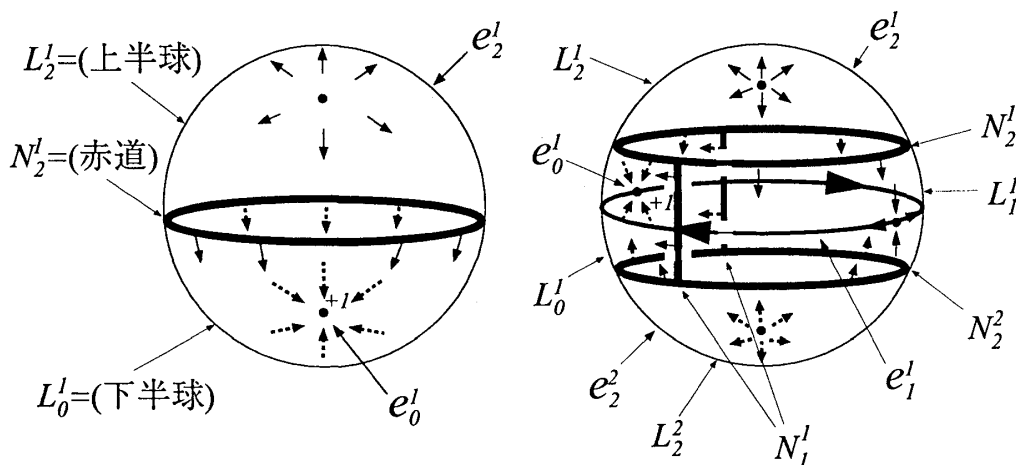


図 8:  $S^2$  の分割

注意

特に各  $L_n^i$  内の不変集合は必ずしも *hyperbolic* な平衡点に限る必要はない.

この事実よりベクトル場の不変集合の Conley Index を次のように定める.

定義 3

$M$  を多様体,  $X$  をその上のベクトル場,  $\phi^t$  を  $X$  の定める *flow* とする. 空集合または  $\phi^t$  の *compact* な不変集合  $S$  ( $\phi^t(S) = S, \forall s$ ) に対し, 以下の条件を満たす *compact* 集合の組  $(L, N)$  を  $S$  の *Index pair* とよび,  $L/N$  の Homology 群を  $CH_*(S)^6$  と書いて  $S$  の (Homology) Conley Index とよぶ. また, *Index pair* が存在するような *compact* 不変集合を *isolated invariant set* とよぶ.

<sup>6</sup> 通常は,  $CH_*(S)$  は空間対  $(L, N)$  の (通常) Homology 群として定義される. しかし今の設定では, これは  $L/N$  の (簡約) Homology 群と同型なので, ここではこのように定義する.

- (1)  $S$  は  $L$  の内部に含まれる.
- (2)  $S$  は  $L$  に含まれる最大の不変集合. ( $S = \emptyset$  の場合は  $L$  内には不変集合は存在しない.)
- (3)  $N \subset \partial L$  上ではベクトル場は外向きであり  $\partial L \setminus N$  ではベクトル場は内向きである.

図 9 参照.

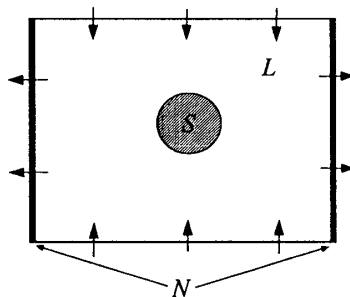


図 9: Conley Index

事実

$S = \emptyset$  ならば  $L/N$  は一点と Homotopy 同値であり任意の  $n = 0, 1, 2, \dots$ , について  $CH_n(S) = 0$  が成り立つ. よって  $CH_*(L/N) \neq 0$  ならば  $L$  内には非自明な不変集合があることになる.

一般に compact 多様体  $M$  上のベクトル場  $X$  が与えられた時, 以下を満たすような互いに共通部分を持たない isolated invariant set の集合  $S = \{S_i\}_{i=1}^I$  を  $M$  の Morse 分解とよぶ.

- (1)  $S$  には半順序  $<$  が定められている.
- (2)  $m \in (M \setminus \cup S_i)$  ならば,  $S_j < S_i$  をみたすある  $S_i, S_j \in S$  について  $\alpha(m) \subset S_i$  かつ  $\omega(m) \subset S_j$  が成り立つ.

この時, 次のような  $n$  で添字付けられた行列  $\Delta_n = (\Delta_n(j, i))$  が存在する.

$$(1) \Delta_n: \oplus CH_n(S_i) = \begin{pmatrix} CH_n(S_1) \\ \vdots \\ CH_n(S_I) \end{pmatrix} \rightarrow \oplus CH_{n-1}(S_i) = \begin{pmatrix} CH_{n-1}(S_1) \\ \vdots \\ CH_{n-1}(S_I) \end{pmatrix}$$

(2)  $\Delta_n(j, i) \neq 0$  ならば, ある  $m \in M$  について  $\alpha(m) \subset S_i$  かつ  $\omega(m) \subset S_j$  が成り立つ.

$$(3) \Delta_{n-1} \Delta_n = 0$$

$$(4) H_n(M) = \text{Ker } \Delta_n / \text{Im } \Delta_{n+1} \text{ が成り立つ.}$$

定義 4

$\Delta$  を Connection Matrix とよぶ.

上記の  $M$  の分割  $M = \coprod L_n^i$  に対しては  $\Delta_n := \partial_n$  と置くと  $\Delta$  は Connection Matrix になる.

以下では都合で Homology は  $\mathbb{Z}_2$  上で考える.

### 例 5

2 次元球面  $S^2$  上のベクトル場  $X$  が以下の仮定を満たすとする.

#### 仮定

- (1)  $X$  の平衡点は全て *hyperbolic* である.
- (2)  $X$  の平衡点の集合  $\mathcal{S}$  は  $S^2$  の *Morse* 分解を与える.

$$\mathcal{S}_0 := \{p \in \mathcal{S} \mid \text{Ind}(p) = 0\},$$

$$\mathcal{S}_1 := \{p \in \mathcal{S} \mid \text{Ind}(p) = 1\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \{p \in \mathcal{S} \mid \text{Ind}(p) = 2\}$$

とし  $k := \#\mathcal{S}_0$ ,  $l := \#\mathcal{S}_1$ ,  $m := \#\mathcal{S}_2$  とするとき  $k, l, m$  の関係を求める.

$\text{Ind}(p) = 0$  ならば

$$CH_2(p) = 0, \quad CH_1(p) = 0, \quad CH_0(p) = \mathbb{Z}_2,$$

$\text{Ind}(p) = 1$  ならば

$$CH_2(p) = 0, \quad CH_1(p) = \mathbb{Z}_2, \quad CH_0(p) = 0,$$

$\text{Ind}(p) = 2$  ならば

$$CH_2(p) = \mathbb{Z}_2, \quad CH_1(p) = 0, \quad CH_0(p) = 0$$

なので

$$\bigoplus_{p \in \mathcal{S}} CH_2(p) = \mathbb{Z}_2^m, \quad \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} CH_1(p) = \mathbb{Z}_2^l, \quad \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} CH_0(p) = \mathbb{Z}_2^k$$

である. よって

$$\Delta_n = 0 \ (n \geq 3), \quad \Delta_2: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^l, \quad \Delta_1: \mathbb{Z}_2^l \rightarrow \mathbb{Z}_2^k, \quad \Delta_0: \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

となるが,  $\text{Ker } \Delta_n / \text{Im } \Delta_{n+1} = H_n(S^2)$  が成り立つので,

$$H_n(S^2) = 0 \ (n \geq 3), \quad H_2(S^2) = \mathbb{Z}_2, \quad H_1(S^2) = 0, \quad H_0(S^2) = 0$$

より以下の関係が得られる.

$$\dim \text{Ker } \Delta_2 = 1,$$

$$\dim \text{Ker } \Delta_1 = \dim \text{Im } \Delta_2 = m - 1,$$

$$k - 1 = \dim \text{Ker } \Delta_0 = \dim \text{Im } \Delta_1$$

よって  $\dim \operatorname{Im} \Delta_1 = 1 - \dim \operatorname{Ker} \Delta_1$  より,

$$k - l + m = 2$$

が得られる. したがって, 上記の仮定を満たすベクトル場の平衡点はこの関係式をみたさなければならない.

#### 注意

$S$  が平衡点の集合である範囲では, この結論は *Euler* 標数を用いた通常の議論と同一である. しかし, *Conley Index* を用いると,  $S$  が必ずしも平衡点ではない *isolated invariant set* の集合である場合にも同様の結論を得ることが出来る.

更に一般に compact とは限らない多様体  $M$  上のベクトル場  $X$  が与えられた時,  $X$  の *isolated invariant set* の集合を  $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^I$  とし,  $\mathcal{M} = \left(\bigcup_i S_i\right) \cup \{m \in M \mid \exists i, j \text{ s.t. } \alpha(m) \subset S_i, \omega(m) \subset S_j\}$  とおく. この時 Connection Matrix の性質の (4) を次で置き換えた性質を満たす行列  $\Delta_n$  が存在する.

(4')  $CH_n(\mathcal{M}) = \operatorname{Ker} \Delta_n / \operatorname{Im} \Delta_{n+1}$  が成り立つ.

#### 定義 5

上記の  $\Delta_n$  も *Connection Matrix* とよぶ.

#### 例 6

図 10 の二つのベクトル場について考える. どちらの例についても, 平衡点  $p_3$  と  $p_2$  に関しては

$$CH_2(p_2) = CH_2(p_3) = 0, \quad CH_1(p_2) = CH_1(p_3) = \mathbb{Z}_2, \quad CH_0(p_2) = CH_0(p_3) = 0$$

であり, 平衡点 1 については

$$CH_2(p_1) = 0, \quad CH_1(p_1) = 0, \quad CH_0(p_1) = \mathbb{Z}_2$$

が成り立つ.

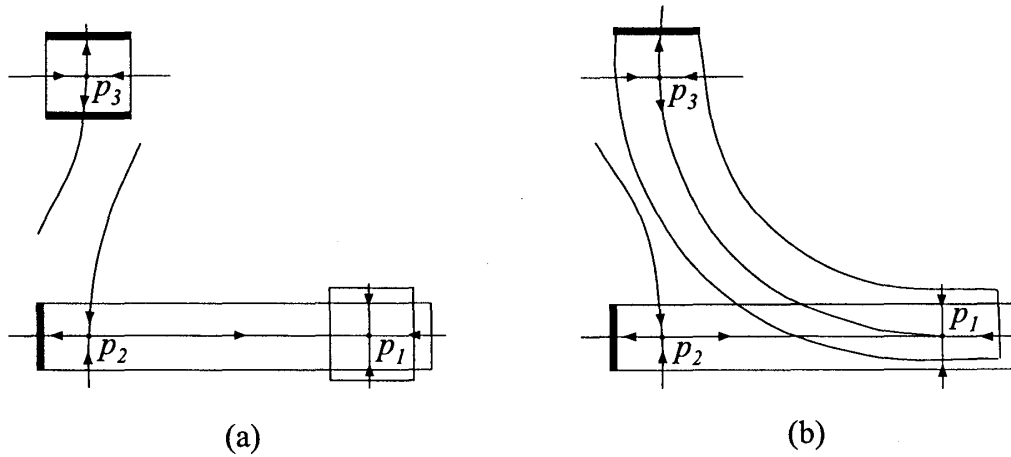
$\mathcal{M}_2$  を平衡点  $p_1, p_2$  とその間の *heteroclinic orbit* からなる不変集合とし,  $\mathcal{M}_3$  を平衡点  $p_1, p_3$  とその間の *heteroclinic orbit* からなる不変集合とする. また  $\mathcal{M}$  を平衡点  $p_1, p_2, p_3$  とその間の *heteroclinic orbit* からなる不変集合とする. このとき  $\mathcal{M}_2$  の *Conley Index* は次で与えられる.

$$CH_2(\mathcal{M}_2) = 0, \quad CH_1(\mathcal{M}_2) = 0, \quad CH_0(\mathcal{M}_2) = 0$$

これに対し,  $\mathcal{M}_3$  は (a) と (b) で異なる.

$$(a): CH_2(\mathcal{M}_3) = 0, \quad CH_1(\mathcal{M}_3) = \mathbb{Z}_2, \quad CH_0(\mathcal{M}_3) = \mathbb{Z}_2$$

$$(b): CH_2(\mathcal{M}_3) = 0, \quad CH_1(\mathcal{M}_3) = 0, \quad CH_0(\mathcal{M}_3) = 0$$

図 10:  $\mathcal{M}$  とその Index pair の例

よって  $\mathcal{M}_2$  について考えると,  $\Delta_1(1, 2) = 1$  となる. これに対して,  $\mathcal{M}_3$  については,

$$(a): \Delta_1(1, 3) = 0 \quad (\text{Connection Matrix の性質 (2)}) \quad (b): \Delta_1(1, 3) = 1$$

となる. よって  $\mathcal{M}$  の Connection Matrix は

$$(a): \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b): \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. (但し,  $\Delta_*(j, i): \mathbb{Z}_2^0 \rightarrow \mathbb{Z}_2^0$  も  $\Delta_*(j, i) = 0$  と書いた.)

## 5 Transition Matrix

この節では Transition Matrix を紹介するが, 具体例について例示するに留め正確な定義, 定理の statement は省略する.

$\lambda \in (-\delta, 1 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) に依存するベクトル場の族  $X_\lambda$  が  $\lambda$  に依存しない三つの平衡点  $p_1, p_2, p_3$  を持ち, かつ  $\lambda = 0$  のときの定性的な dynamics が図 10 の (a) で与えられ,  $\lambda = 1$  のときの定性的な dynamics が図 10 の (b) で与えられるとする. 更に,  $p_2$  から  $p_1$  への heteroclinic orbit も  $\lambda$  によらないとする. このとき, ある  $\lambda \in (0, 1)$  について  $X_\lambda$  は平衡点  $p_3$  から平衡点  $p_2$  への heteroclinic orbit を持つことを Connection Matrix を用いて示す方法を解説する. (図 11 参照)

考える系  $\dot{x} = X_\lambda$  を  $\dot{\lambda} = \varepsilon\lambda(1 - \lambda)$  と couple した系を考える.

$$\begin{cases} \dot{x} &= X_\lambda \\ \dot{\lambda} &= \varepsilon\lambda(1 - \lambda) \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$  のときこの系は  $(p_i, 0)$  と  $(p_i, 1)$  の 6 個の平衡点及び  $(p_i, 0)$  から  $(p_i, 1)$  への 3 つの heteroclinic orbit と  $(p_2, 0)$  から  $(p_1, 0)$ ,  $(p_2, 1)$  から  $(p_1, 1)$ ,  $(p_3, 1)$  から  $(p_1, 1)$  への各 heteroclinic orbit と  $(p_2, 0)$  から  $(p_1, 1)$  への heteroclinic orbit を持つ.

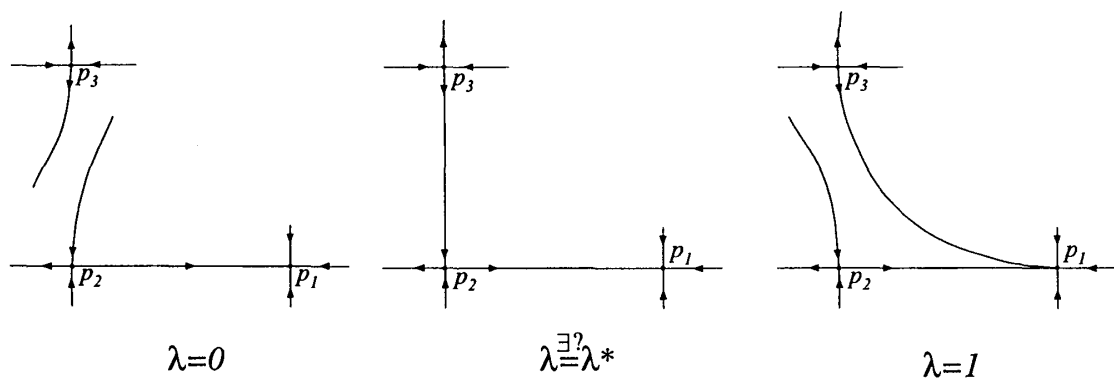


図 11: 分岐問題

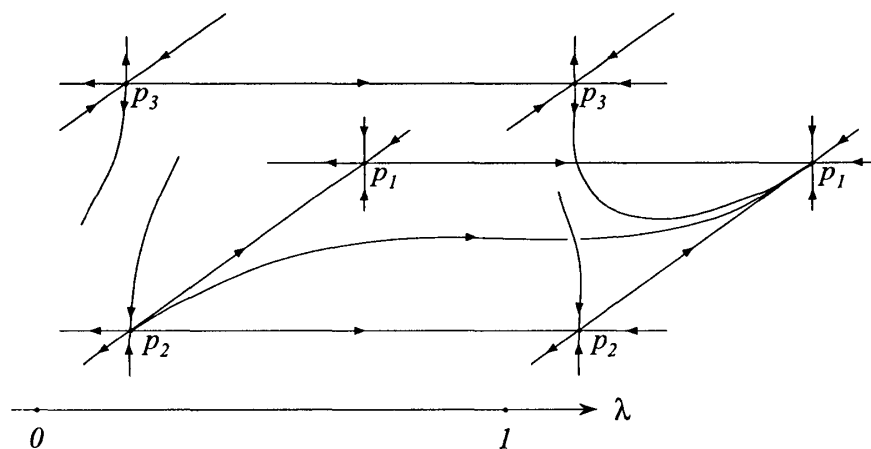


図 12: couple した系の dynamics

この時各平衡点の Conley Index は次のように与えられる.

$$CH_2(p_1, 1) = 0 \quad CH_1(p_1, 1) = 0 \quad CH_0(p_1, 1) = \mathbb{Z}_2$$

$$CH_2(p_2, 1) = 0 \quad CH_1(p_2, 1) = \mathbb{Z}_2 \quad CH_0(p_2, 1) = 0$$

$$CH_2(p_3, 1) = 0 \quad CH_1(p_3, 1) = \mathbb{Z}_2 \quad CH_0(p_3, 1) = 0$$

$$CH_2(p_1, 0) = 0 \quad CH_1(p_1, 0) = \mathbb{Z}_2 \quad CH_0(p_1, 0) = 0$$

$$CH_2(p_2, 0) = \mathbb{Z}_2 \quad CH_1(p_2, 0) = 0 \quad CH_0(p_2, 0) = 0$$

$$CH_2(p_3, 0) = \mathbb{Z}_2 \quad CH_1(p_3, 0) = 0 \quad CH_0(p_3, 0) = 0$$

$\mathcal{M}$  をこれらの平衡点とその間の heteroclinic orbit からなる不変集合とすると、前節と同様

の議論により  $\mathcal{M}$  に対する Connection Matrix は次のようになる.

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここに現れる  $(p_i, 0)$  から  $(p_i, 1)$  への heteroclinic orbit に関する行列  $T_i = (T_i(j, i))$  を Transition Matrix とよぶ.

$(p_i, 0)$  と  $(p_i, 1)$  及びその間の heteroclinic orbit についてこれまでと同様の議論により  $T_1(1, 1) = 1$  及び  $T_2(2, 2) = T_2(3, 3) = 1$  が分かる. また,  $i < j$  ならば明らかに  $(p_i, 0)$  から  $(p_j, 1)$  への heteroclinic orbit は存在しないことより  $T_*(j, i) = 0$  ( $i < j$ ) がわかる. (図 12 参照.)

更に Connection Matrix の性質 (3) より  $\Delta_1 \Delta_2 = 0$  なので  $T_2(2, 3) = 1$  が分かるが, このことは Connection Matrix の性質 (2) より  $(p_3, 0)$  から  $(p_2, 1)$  への heteroclinic orbit が存在することを意味する. (図 13 参照)

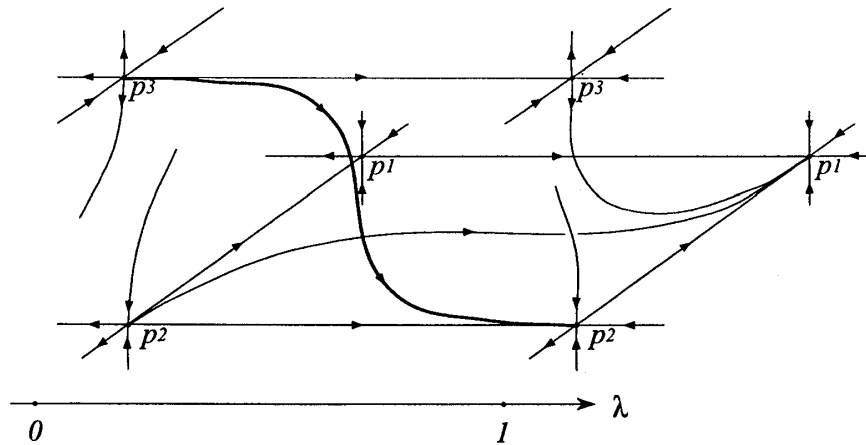


図 13:  $(p_3, 0)$  から  $(p_2, 1)$  への heteroclinic orbit

ここで  $\varepsilon \downarrow 0$  の極限を考えることによって  $(p_3, \lambda^*)$  から  $(p_2, \lambda^*)$  への heteroclinic orbit が存在する  $\lambda^* \in (0, 1)$  があることが一般論から結論される. (図 14 参照)

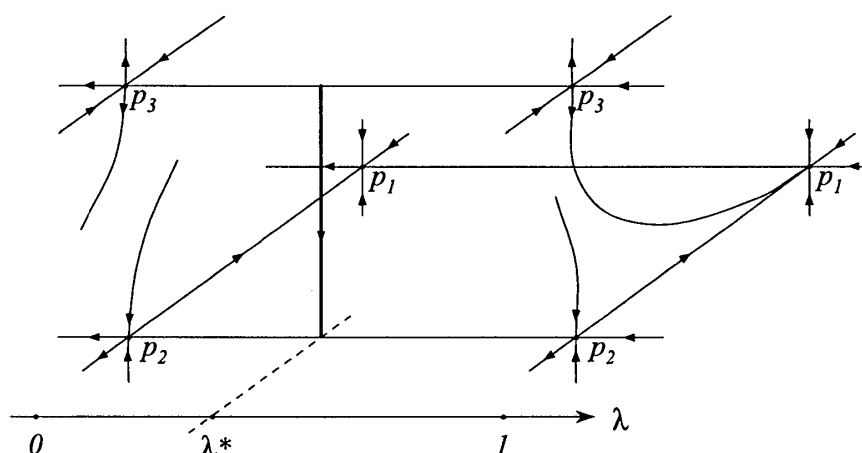


図 14:  $\lambda = \lambda^*$  での heteroclinic orbit

## 参考文献

- [1] Conley, C, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., no. 38 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976
- [2] Franzosa, R, *Index Filtrations and the Homology Index Braid for partially Ordered Morse decompositions*. Trans. AMS **298**(1986), pp. 193–213.
- [3] Franzosa, R, *Connection Matrix Theorey for Morese Decompositions*. Trans. AMS **311**(1989), pp. 561–592.
- [4] 服部晶夫, 「位相幾何学」 岩波基礎数学選書 (1991), 岩波書店.
- [5] 服部晶夫, 「いろいろな幾何学 II」 岩波講座応用数学 [基礎 10](1993), 岩波書店.
- [6] McCord, C & Mischaikow, K, *Equivalence of Topological and Singular Transition Matrices in the Conley Index Theory*. Michigan Math. J. **42**(1995), pp. 387–414.
- [7] Mischaikow, C, *Conley Index Theory*. in *Dynamical Systems*. Lecture Notes in Math **1609**(1995), Springer, pp. 119–207.
- [8] Mischaikow, C, & Mrozek, M, *Conley Index Theory*. preprint.
- [9] 長野正, 曲面の数学, 培風館.
- [10] Salamon, D, *Connected Simple Systems and the Conley Index of Isolated Invariant Set*. Trans. AMS **291**(1985), pp. 193–213.
- [11] Salamon, D, *Morse Theory, the Conley Index and Floer Homology*. Bull. London Math. Soc. **22**(1990), pp. 113–140.