

学位申請論文

ホログラフィック QCD におけるバリオンと
その dilatation モードの研究

堀 敬一郎

京都大学大学院 理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

概要

QCD は高エネルギーで漸近的自由性により摂動論が使えるが、低エネルギーでは強結合のため非摂動的な手法が必要になる。近年、ホログラフィック QCD という超弦理論から生まれた QCD に対する新たな非摂動的な解析手法が研究されている。そこで重要な概念が AdS/CFT 対応 (ゲージ/重力対応) でゲージ理論と重力理論の等価な対応が存在するというものである。一方の強結合領域が他方の弱結合領域に対応し得るため、QCD の強結合領域における非摂動的性質を古典的な重力理論の解析によって調べることができる。このような理論的枠組はホログラフィック QCD と称される。中でも、酒井・杉本モデルと呼ばれるものはクォークのカレント質量がゼロの massless-QCD に対応しており、多くのハドロン間の結合定数や現象論的な法則を再現するのに成功している。酒井・杉本モデルにおける有効理論の導出では $1/N_c$ 、 $1/\lambda$ (N_c : カラー数、 λ : トーフット結合) の展開を用いており、leading では非自明な背景重力を持つ 1+4 次元のフレーバー空間における $U(N_f)$ のゲージ理論になる。ゲージ場を余剰次元方向に関してモード展開するとメソン場が現れるが、バリオンは陽には現れず、メソン場のソリトンとして記述される。このように酒井・杉本モデルはメソンとバリオンの両方を統一的に記述するハドロンの理論になっている。

本論文ではこの酒井・杉本モデルを用いたバリオンの数値的な解析を行う。酒井・杉本モデルは 1+4 次元という高次元の理論であり、 $U(N_f)$ (N_f : 軽いクォークのフレーバー数) の非可換なゲージ理論になっており、高次元性と非可換性から古典レベルでも解析が難しい。この困難を回避するため Witten Ansatz を用いる。これは配位が回転対称性を持つときに適用可能で、回転対称なバリオンを解析するのに適している。この Witten Ansatz を酒井・杉本モデルに適用すると、理論は 1+4 次元の非可換ゲージ理論から 1+2 次元の Abelian-Higgs 理論に還元される。この変換に伴い元の 4 次元空間のトポロジカル・オブジェクトのインスタントンは 2 次元のトポロジカル・オブジェクトのボルテックスに変化する。低次元で可換な理論でありこのボルテックスを解析することでバリオンの直接的な計算が簡単になる。基底状態のバリオンについて計算し、質量や大きさなどの物理量を求めた。Witten Ansatz により対応付けられたインスタントンとボルテックスの間にはモジュライ同士の関係性が存在し、インスタントンのサイズとボルテックスを構成するヒッグス場の零点の位置が対応している。この関係を利用してバリオンの質量のサイズに対する依存性を調べる。さらにこのバリオンサイズが時間に依存して振動するモード (dilatation mode) を考え、その励起エネルギーを数値的に評価し、577MeV という結果を得た。我々は核子に対するこの dilatation mode がローパー共鳴状態 $N^*(1440)$ であると予測し、このような励起がバリオンの各チャンネルに対して普遍的に存在すると予想した。

1 導入

量子色力学 (QCD) は強い相互作用の基礎理論であり、カラーのゲージ対称性 $SU(N_c)$ と global なカイラル対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ を持っている。漸近的自由性を示し、高エネルギーのハドロン反応では摂動的な手法で解析が可能である。しかし、低エネルギーでは強結合になり摂動論は適応できず、QCD に則したハドロンの理論的解析には格子 QCD などの非摂動的な方法が必要になる。ホログラフィック QCD は超弦理論から生まれた QCD の非摂動的側面を解析する新たな手法であり [1–3]、D brane [4] によるゲージ・重力対応 [5] を利用したものである。

弦理論は 1970 年代に Nambu, Goto, Polyakov によってつくられたハドロンを記述する理論である [6–8]。QCD 以降、弦理論はハドロンの研究手法として用いられなくなったが、超弦理論の登場により超重力理論を含む統一理論の候補として今日まで研究され続けている。Polchinski は N 枚の重なった D brane 上に $U(N)$ ゲージ対称性が存在し、 $U(N)$ ゲージ理論が現れることを発見した。 N 枚の D-brane 上で、2つの $a, b (a, b = 1, 2, \dots, N)$ でラベルされた D-brane をつなぐ開弦からゲージ場が現れる。また、D brane まわりではその質量が重力源になり超重力理論が現れる。Maldacena は large N 解析により 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $SU(N)$ Yang-Mills 理論と 5 次元の Anti-de Sitter (AdS) 超重力理論を調べ、D brane 上のゲージ理論と D brane まわりの超重力理論という D brane に関する 2 つの異なる理論は等価であると予想した [5]。この等価性は AdS / CFT 対応と呼ばれ、より一般化された概念としてゲージ・重力対応とも呼ばれる。この対応において、強結合のゲージ理論は弱結合の重力理論で記述される [1–3, 5]。

AdS / CFT 対応に関しては多くの研究がなされ、そのひとつにホログラフィック QCD という強結合の QCD を高次元の重力理論を古典的に解析することで調べるといふものがある。[1–3, 9, 10]。1998 年に Witten は S^1 コンパクト化した N_c 枚の D4 brane を用い pure Yang-Mills 理論を構成した。その際、ボソン (フェルミオン) に S^1 方向に対して (反) 周期境界条件を課すことで、超対称性を破った。2005 年には Sakai と Sugimoto は S^1 コンパクト化した D4 brane に N_f 枚の D8 brane と $\overline{D8}$ brane を加え、 N_f 個の massless chiral quark を含む 4 次元の QCD を構成した [3]。この D4/D8/ $\overline{D8}$ brane 配位には $SU(N_c)$ ゲージ対称性と $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ カイラル対称性が存在し、4-8 string と 4-4 string の massless mode からクォークとグルーオンが現れ、QCD と赤外等価になっている。

この D4/D8/ $\overline{D8}$ 系においてラージ N_c 極限を考えると N_c 枚の D4 brane は重力源として支配的になり重力場を発生させる。また、't Hooft coupling $\lambda \equiv N_c g^2$ はゲージ理論側のコントロールパラメータであり、 λ が大きい強結合の QCD は弱結合の重力理論に対応している。この対応により、D4 brane により生じる背景重力上における D8 brane によって記述される。この方法を用いれば QCD の非摂動的な側面を古典的な重力理論によって解析することができる。

$1/N_c$ 展開では、D4 brane により生まれる背景重力場の D8 brane の有効理論は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用と Chern-Simons 項により表される。また、 $1/\lambda$ 展開では DBI 作用が leading、Chern-Simons 項が next leading になっている。さらに DBI 作用は $1/\lambda$ 展開により leading order ではフレーバー空間の 5 次元 Yang-Mills 理論になり、5 次元目の空間方向に背景重力が存在している。Chern-Simons 項は QCD におけるアノマリーに対応するトポロジカル項である。ゲージ場は複数のメソン場に分解され、メソンセクターの物理は質量や結合定数、現象論的法則と成功しているが、バリオンは理論に陽には現れない。これは Skyrme model と同じ状況になっている [11]。

1980 年代に Witten により large N_c の観点から バリオンの Skymion による記述 [12] は再び注目される

ようになった。large N_c の極限において、QCD は弱く結合するメソンとグルーボールしか現れず、有効理論はそれらしか陽に含まないことがわかった [13]。解析によりバリオンの質量は $\mathcal{O}(N_c)$ で増えることから系の構成要素としては現れず、Skyrmion のようなメソンのソリトンとして現れることになる [12, 13]。

large N_c を利用して得られるホログラフィック QCD も同様に、メソン場のソリトンとして記述される。実際、ホログラフィック QCD でのバリオンは brane-induced Skyrmion として研究され [14, 15]、あるいは、instanton を用いて拡がりを持った物理的実体として定式化された [16, 17]。このようにホログラフィック QCD では空間的に拡がりを持つものとしてバリオンは現れる。

本研究では、1+4 次元の $U(N_f)$ ゲージ理論として書かれる酒井・杉本モデルというホログラフィック QCD におけるバリオンとその dilatation モードを研究した。空間回転の対称性のある系において、我々は一般化した Witten Ansatz を適用し 1+4 次元のホログラフィック QCD を 1+2 次元の Abelian Higgs 理論に還元する [18]。そこではホログラフィック・バリオンは Abrikosov ボルテックスで表される。細かい格子間隔で大きいサイズの格子を用い、D4 brane 由来の背景重力を保ったままホログラフィック QCD のバリオン解を数値計算した [19]。

さらに、Witten Ansatz から導かれる Abelian Higgs 理論における Higgs 場の零点とバリオンのサイズの関係性を用いて、様々なサイズのバリオンと単一のバリオンの dilatation モード (時間に依存するサイズの振動モード) を研究した。

サイズの振動は物理的には集団運動として考えることができ、単独粒子描像を基にしているクォーク模型では記述するのが難しい。Skyrmion の研究においてはサイズの振動モードは研究されており、その最低励起状態は Roper 共鳴状態 $N^*(1440)$ [20–24] とみなされている。

ホログラフィック QCD においてもバリオンの dilatation モードは記述することができる。実際、ホログラフィック・バリオンはソリトンとして現れ空間的に広がったものなので、dilatation モードを持ちうる。但し、ホログラフィックバリオンにおける dilatation モードは通常の 3 次元的なものではなく、余剰次元を含む空間 4 次元的な振動となる可能性がある。

本論文の構成は次の通りである。2 節において、D ブレーンとゲージ/重力対応をもとに構成されるホログラフィック QCD、特に酒井・杉本モデルの (簡単な) レビューを行う。3 節ではバリオンをメソン場によるトポロジカル・ソリトンとして解析し、その性質についての述べる。4 節では、Witten Ansatz を導入し、そこから導かれるバリオンのボルテックスによる記述を調べ、実際にバリオンの基底状態について計算する。5 節では Witten Ansatz によるインスタントンとボルテックスの関係を利用してバリオンのサイズを変える方法を提案し、そのサイズ依存性を調べる。6 節では前章の結果を利用してバリオンのサイズが時間的に振動するモードを考えその励起エネルギーを評価する。7 節はまとめと議論に充てる。本論文は論文 [19] に基づいている。

2 ホログラフィック QCD

ホログラフィック QCD とは QCD において摂動論的解析では捉えられない非摂動的性質を超弦理論の枠組みで解析する手法である。そこで重要となるのが D ブレーンを用いた AdS/CFT 対応、及びその一般化のゲージ/重力対応と呼ばれる数学的予想である。

2.1 節では D ブレーン及びゲージ/重力対応の概要を説明し、2.2 節では Witten によるホログラフィック QCD の構成を見る。2.3 節では酒井・杉本モデル導入し、5 次元のフレーバー空間に対するゲージ理論がどの

ように導かれるかを見る。3 節では、2.3 節で得られた理論を 4 次元に射影し、現実のメソンと対応させそのスペクトルを見る。

2.1 D ブレーン、ゲージ/重力対応

点粒子の軌跡は世界線 $X^\mu(\tau)$ という関数によって表されている。 μ はターゲット時空の方向を示すラベルである。弦理論においてはこれが世界線 (1 次元) から世界面 (2 次元) $X^\mu(\tau, \sigma)$ に変わり、点ではなく弦の理論になる。この弦は σ 方向に長さを持ち、この区間 $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ の境界に対して周期境界条件

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.1)$$

を課すかどうかで閉弦と開弦に分けられる。開弦には自由境界条件もしくは固定端境界条件を課すが、固定端条件を課すことに対応して D ブレーン [4] という基本弦とは異なる物理的実体が現れる。D ブレーンとはこの開弦が端点をもつ空間で定義される物体である。自由端、固定端条件はそれぞれ

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma)|_{\sigma=0, 2\pi} = 0 \quad (2.2)$$

$$X^\mu(\tau, \sigma)|_{\sigma=0, 2\pi} = c^\mu \quad (2.3)$$

と表される。 c^μ は定数である。各方向に対してどちらの境界条件を課すかで D ブレーンの次元や広がる空間は変わる。方向 $\mu = 0, 1, \dots, p$ に対して自由端、方向 $\mu = p+1, \dots, 9$ に対して固定端条件な場合、開弦の端点が存在できる空間は $p+1$ 次元の時空となり次元を明示して Dp ブレーンと呼ぶ。Dp ブレーン上に端点を持つ開弦のスペクトルは次のような massless モードであるゲージ場とスカラー場を持つ。

$$A_\mu(x^0, \dots, x^p) \quad (\mu = 0, \dots, p) \quad (2.4)$$

$$\Phi^i(x^0, \dots, x^p) \quad (i = p+1, \dots, 9) \quad (2.5)$$

このゲージ場によって Dp ブレーン上には $p+1$ 次元のゲージ理論が現れる。

ここで II 型超弦理論における D3 ブレーンを N 枚重ねた系を考え、それぞれの D3 ブレーンに $i = 1, 2, \dots, N$ とラベルを付ける [5]。D3 ブレーンは 4 次元の多様体で $x^{0,1,2,3}$ 方向とする。D3 ブレーンに端点を持つ開弦は、両端のブレーンのラベル $i, j = 1, 2, \dots, N$ により N^2 個の成分を持ち、これを行列要素とみなすと $U(N)$ 行列になり、添字 i, j は $U(N)$ の随伴表現の添字になる。この D3 ブレーン上には超対称性に加えて $U(N)$ ゲージ理論が現れ、 $\mathcal{N} = 4$ の超対称ヤンミルズ (supersymmetric Yang-Mills : SYM) 理論が形成される。弦の結合定数 g_s とゲージ理論の結合定数 $g_{\text{extrm{YM}}}$ の間には関係性があり、系の結合の強さの指標は 't Hooft coupling $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N = 4\pi g_s N$ で表される [4]。

まず、弦の結合定数 g_s について $g_s \rightarrow 0$ 、ブレーンの枚数 N 固定の状況を考えてみる。D3 ブレーンの張力 $\tau_3 \propto N g_s^{-1}$ と重力 (閉弦) の結合定数 $\kappa^2 \propto g_s^2$ より、D3 ブレーンの 10 次元時空への影響は $\tau_3 \kappa^2 \propto N g_s \rightarrow 0$ となり無視できる。弦の長さ l_s よりも低エネルギーの極限 $E \ll l_s^{-1}$ では弦の massless モードの励起のみが見え、超弦理論は 10 次元のバルクにおける閉弦の超重力理論とブレーン上の開弦の 4 次元 $U(N)$ SYM 理論に分かれる。とくにこの極限では超重力理論は相互作用が消え、 $U(N)$ のうち $U(1)$ 部分は N 枚のブレーンの重心運動を表す自由度であり、今回は無視する。よって $g_s \rightarrow 0$ 、 N 固定の場合では低エネルギー極限において超弦理論は次の 2 つの部分に分かれる。[5]

$$(\text{平坦な背景での 10 次元 超重力理論}) \times (4 \text{ 次元 } SU(N) \text{ SYM 理論, } g_{\text{YM}}^2 \sim g_s) \quad (2.6)$$

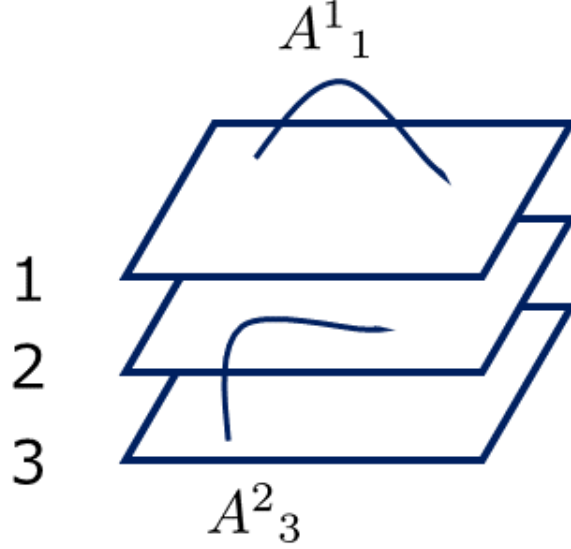


図1 $N = 3$ 枚重ねた D ブレーン。それぞれのブレーンにはラベル $i, j = 1, 2, 3$ がつけられ、そこに両端を持つ開弦の massless モード A^i_j は $U(N)$ 行列の成分とみなせる。

次に同様の系において $\lambda = g_s N$ を固定したまま $g_s \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ の状況を考える。 λ を固定しているため先の状況とは異なり D3 ブレーンの 10 次元時空への影響は無視できない。 D ブレーンは 10 次元超重力理論に対する重力源となり、低エネルギー極限では次の古典解を与える [25]。

$$ds^2 = f^{-1/2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (2.7)$$

$$f \equiv 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 \equiv 4\pi g_s N \alpha'^2 \quad (2.8)$$

$r \gg R$ で $f \rightarrow 1$ より平坦なミンコフスキー空間 $\mathbf{M}^{9,1}$ になるのに対して、 $r \ll R$ で $f^{1/2} \rightarrow R^2/r^2$ より

$$ds^2 \sim \frac{R^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}^2) + R^2 d\Omega_5^2 \quad (2.9)$$

となり、前 2 つの項は 5 次元反ド・ジッター空間 AdS_5 と呼ばれる空間を表しており、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ となる。低エネルギー極限においてはこれらの 2 つの領域が現れる。よって超弦理論は $g_s \rightarrow 0$ 、 λ 固定では低エネルギー極限において次の 2 つに分かれる。

$$(\text{平坦な背景での 10 次元 超重力理論}) \times (\text{AdS}_5 \times S^5 \text{ 上の IIB 型超弦理論, } R^4 = \lambda \alpha'^2, \kappa = g_s \alpha'^2) \quad (2.10)$$

以上より低エネルギーにおいて超弦理論は $g_s \rightarrow 0$ 、 N 固定では (2.6) になり、 $\lambda = 4\pi g_s N$ を固定、 $g_s \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ では (2.10) になる。 2 つの理論を見比べると低エネルギーにおいて 4 次元 $SU(N)$ SYM 理論と $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上の II 超弦理論が $4\pi g_s = g_{\text{YM}}^2$, $R^4/\alpha'^2 = \lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$ というパラメーターで等価になるという予想がたてられる [5]。これを AdS/CFT 対応、あるいはより一般的にゲージ/重力対応 [26] と呼ぶ。重力理論で古典解を求めるのに用いた $g_s \ll 1$, $l_s \ll R$ という極限 (弱結合領域) がゲージ理論側では $N \gg \lambda \gg 1$ という極限 (強結合領域) に対応している。

2.2 Witten によるホログラフィック QCD

この節では Witten によるホログラフィック QCD の構成を紹介する [27]。この系は D4 ブレーンを N_c 枚重ねたものであり、 $U(N_c)$ のゲージ対称性とデフォルトとして超対称性を有する。D4 ブレーンは 10 次元時空における 5 次元の多様体で、 $x_{0\sim 3}, x_4 \equiv \tau$ 方向に広がっている。D4 ブレーンに端点を持つ開弦からは massless モードとしてゲージ場の $\mathcal{A}_{\mu=0\sim 3}, \mathcal{A}_\tau$ とスカラー場 $\Phi_{i=5\sim 9}$ 、それらの超対称パートナーのフェルミオンが現れる。ここで超対称性を破るために τ 方向に次のコンパクト化をする。

$$\tau \sim \tau + 2\pi M_{\text{KK}}^{-1} \quad (2.11)$$

M_{KK} は Kaluza-Klein 質量ケールという質量次元 1 のパラメーターである。このコンパクト化した τ 方向でボゾンに対して周期境界条件、フェルミオンに対しては反周期境界条件を課す：

$$\psi(x_\mu, \tau + 2\pi M_{\text{KK}}^{-1}) = -\psi(x_\mu, \tau). \quad (2.12)$$

そして、このフェルミオンを次のようにモード展開する：

$$\psi(x_\mu, \tau) = \sum_n \psi_n(x_\mu) e^{i\tau M_{\text{KK}}(n+\frac{1}{2})} \equiv \sum_n \psi_n(x_\mu, \tau). \quad (2.13)$$

このフェルミオンは D4 ブレーン上が広がる 5 次元時空において massless になっている。しかし、4 次元時空に射影した時に質量が与えられる：

$$\begin{aligned} \partial_M^2 \psi_n(x_\mu, \tau) &= (\partial_\nu^2 + \partial_\tau^2) \psi_n(x_\mu, \tau) \\ &= \left(\partial_\nu^2 - M_{\text{KK}}^2 (n + \frac{1}{2})^2 \right) \psi_n(x_\mu, \tau). \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで大文字の添字 $M = 0, 1, 2, 3, 4$ とする。よって 4 次元上でこのフェルミオンを見ると $\mathcal{O}(M_{\text{KK}})$ の質量を持っているとみなせ、これにより超対称性は破れる。更に、1 ループの補正により $\mathcal{A}_\tau, \Psi_{i=5\sim 9}$ も $\mathcal{O}(M_{\text{KK}})$ の質量を得る。 M_{KK} を大きくすることで、これら質量を持ったモードは低エネルギーの理論から乖離する。結果として 4 次元の massless モード $\mathcal{A}_{\mu=0\sim 3}$ だけが残し、グルーオンのみを含む pure Yang-Mills 理論が形成されている。

N_c 枚重ねた D4 ブレーンの超重力理論における古典解は次のように表される [27]：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f(U) d\tau^2) + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} (f(U)^{-1} dU^2 + U^2 d\Omega_4^2) \\ e^\phi &= g_s \left(\frac{U}{R}\right)^{3/4} \\ F_4 &= dC_3 = \frac{2\pi N_c}{V_4} \epsilon_4 \\ f(U) &= 1 - \frac{U_{\text{KK}}^3}{U^3} \\ R^3 &= \pi g_s N_c l_s^3, \quad U_{\text{KK}} = \frac{4}{9} M_{\text{KK}}^2 R^3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$x^{0\sim 3}$ 方向には平坦になっている。D4 ブレーンは $x^{5\sim 9}$ 方向に広がっていないため、その空間には $SO(5)$ の回転対称性が存在する。 $U \rightarrow U_{\text{KK}}$ で $f(U) \rightarrow 0$ より U 方向の計量が発散するため、 $U \leq U_{\text{KK}}$ には時空が存

在せず事象の地平面が現れる。 C_3 は Ramond-Ramond (RR) 場の 3 形式で $V_4 = 8\pi/3$ は S^4 の体積、 ϵ_4 は S^4 の体積形式である。

$U = U_{\text{KK}}$ における特異性を除くため τ 方向のコンパクト半径 $\delta\tau$ は次のようにとる：

$$\delta\tau \equiv \frac{4\pi}{3} \frac{R^{3/2}}{U_{\text{KK}}^{1/2}}. \quad (2.16)$$

コンパクト化したことででてくる M_{KK} スケールは

$$M_{\text{KK}} = \frac{2\pi}{\delta\tau} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{KK}}^{3/2}}{R^{3/2}} \quad (2.17)$$

となる。パラメーター R, U_{KK}, g_s は $M_{\text{KK}}, g_{\text{YM}}, l_s$ で次のように表される：

$$R^3 = \frac{1}{2} \frac{g_{\text{YM}}^2 N_c l_s^2}{M_{\text{KK}}}, \quad U_{\text{KK}} = \frac{2}{9} g_{\text{YM}} N_c M_{\text{KK}} l_s^2, \quad g_s = \frac{1}{2\pi} \frac{g_{\text{YM}}}{M_{\text{KK}} l_s}. \quad (2.18)$$

弦の理論を場の理論で記述する条件や重力理論の古典解が可能になる条件は 't Hooft coupling λ を用いて

$$1 \ll \lambda (\equiv g_{\text{YM}}^2 N_c) \ll g_{\text{YM}}^4 \quad (2.19)$$

となる [28]。これは large N_c 、強結合の QCD 即ち $1/\lambda$ 展開を表しており、それ故にこの理論的枠組みにおいて強結合領域の QCD が D4 ブレーンの古典重力解として解析できる。この理論からグルーボールのスペクトルなどが調べられている [29]。 N_c 枚重ねた D4 ブレーン系で Yang-Mills 理論が現れることを見たが、現実の QCD に存在するクォークが含まれていない。クォークはフレーバーの自由度を持ち、これを導入するために Kruczenski *et al.* [28] により N_f 枚の D6 ブレーンと N_c 枚の D4 ブレーンの系が提案されている。先の系と同様に N_c 枚の D4 ブレーン上にはグルーオンが現れるが、D4 ブレーンと D6 ブレーンに端点を持つ開弦からはカラーの自由度とフレーバーの自由度を持つフェルミオンが現れる。これをクォークとみなすことで QCD を構成できる。このフェルミオンは大きな質量を持ち重いクォークのみを含んだ QCD に対応している。

次の節ではこれに対して低エネルギーの極限において massless QCD に対応するようなブレーン系を構成する方法を紹介する。

2.3 酒井・杉本モデル

前節ではゲージ/重力対応を用いて N_c 枚の D4 ブレーンから $\text{SU}(N_c)$ pure Yang-Mills 理論を構成する方法を見た。これは QCD に近いゲージ理論ではあるが軽いクォークは含まれておらず、従ってグルーボール以外の通常のハドロンや、QCD で重要なフレーバー対称性やカイラル対称性などについて議論することもできなかった。

これに対して酒井・杉本モデル [3] では IIA 型超弦理論において N_c 枚の D4 ブレーンにさらに $\text{D8-}\overline{\text{D8}}$ をそれぞれ N_f 枚を適宜配置することで低エネルギーでフレーバーが N_f の massless QCD を構成した。この節では酒井、杉本の論文 [3] に沿った形で酒井・杉本モデルの構成を紹介し、低エネルギー有効理論を導く。

酒井・杉本モデルは N_c 枚の D4 ブレーンと N_f 枚の $\text{D8-}\overline{\text{D8}}$ から構成されている。D4 ブレーンは $x^{0\sim 4}$ 方向に広がっており、 $\text{D8-}\overline{\text{D8}}$ は $x^{0\sim 3,5\sim 9}$ 方向に広がっている (表 1)。

節 2.2 での Witten の構成と同様に $x^4 (\equiv \tau)$ 方向を半径 M_{KK}^{-1} の S^1 でコンパクト化し、ボゾン場に周期境界条件、フェルミオン場に反周期境界条件を課すことで超対称性を破る。酒井・杉本モデルでは複数種類の D ブ

表 1 D4、D8- $\overline{\text{D8}}$ プレーンの配置。○ がついている方向に広がっている。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	○	○	○	○	○	-	-	-	-	-
D8- $\overline{\text{D8}}$	○	○	○	○	-	○	○	○	○	○

レーンがあるのでそれらを両端に持つ開弦も複数種類現れる。この配位における低エネルギーでの massless モードを考える (図 2)。4-4 string からは超対称性が破れているため Witten の D4 プレーンによる構成と同様に $U(N_c)$ ゲージ場が現れる。これは QCD のグルーオンに対応する。また、D4 プレーンと D8 プレーンが交差する部分には 4-8 と $4-\overline{8}$ string が存在する。弦が局在することから $l_s \rightarrow 0$ より $U(N_c)$ の基本表現の massless のフェルミオンが現れる。D4 と D8 のお互いに異なる方向に広がる次元の数は 6 になっている (4, 5, 6, 7, 8, 9)。2つのプレーン上の超対称代数が一致するのはこの数が 4 の倍数になっているときであり [30]、今は 4-8 string の超対称性は破れているため massless のボソンは現れない。フェルミオンはそれぞれ $U(N_f)_{\text{D8}}$, $U(N_f)_{\overline{\text{D8}}}$ のフレーバー対称性を持つワイル・フェルミオンになっている。8- $\overline{8}$ string からはこの $U(N_f)$ に対するゲージ場が現れるが decouple 極限においてこのモードは寄与を持たず、フェルミオンの $U(N_f)$ ゲージ対称性は大域的なものに変わる。従ってこれらはフレーバー N_f とカラー N_c をもったフェルミオンであり、これが QCD でのクォークに対応する。このプレーン配位からは massless QCD が現れる。

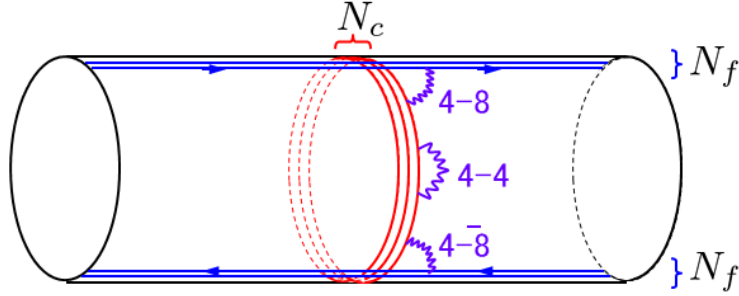


図 2 酒井・杉本モデルにおけるプレーンの配置。 N_c 枚の D4 プレーンと N_f 枚の D8 プレーンと N_f $\overline{\text{D8}}$ が表 1 のように配置されている。 [3]

次に、large N_c の場合の D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ に対してゲージ/重力対応を適用し低エネルギー有効理論を導く。ここで D8/ $\overline{\text{D8}}$ に対するプローブ近似を用いる。これは D4 プレーンに対応する重力理論の古典解というバック・グラウンド上に D8- $\overline{\text{D8}}$ プレーンをプローブとして配置し、D8 プレーンの 10 次元時空に対する重力的な寄与は無視するというものである。D プレーンの質量はそれが重なっている枚数に比例するため large N_c 、 $N_c \gg N_f$ のときに D4 プレーンのみを重力理論の古典解に置き換えることが有効である。

D4 プレーンが作る背景重力場により時空が曲がり、 $U < U_{\text{KK}}$ に時空は存在しない。そのため、プローブの D8 プレーンと $\overline{\text{D8}}$ プレーンはつながり、ひとつの D8 プレーンになる (図 3)。これにより次のように対称性は変わる：

$$U(N_f)_{\text{D8}} \times U(N_f)_{\overline{\text{D8}}} \rightarrow U(N_f). \quad (2.20)$$

式 (2.20) の対称性の破れは QCD のカイラル対称性の自発的な破れに対するホログラフィックな記述である [3]。

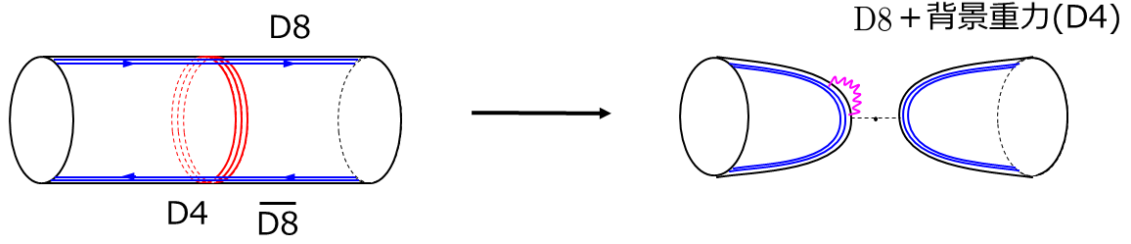


図3 酒井・杉本モデルにおけるブレーンの配位。D4 ブレーンを重力解に置き換えたことで時空が歪み、プローブの D8 ブレーンと $\overline{D8}$ がお互いつながる。これにより D8 ブレーン上に現れるゲージ場の対称性が $U(N_f)_{D8} \times U(N_f)_{\overline{D8}} \rightarrow U(N_f)$ となる。[3]

D4 ブレーンが重力理論の古典解としてバック・グラウンドに存在する時の D8 ブレーンの理論を調べる。D4 ブレーンの存在により時空は曲がっており、D8 ブレーンには次の計量が誘導される。

$$ds_{D8}^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(\left(\frac{U}{R}\right)^{3/2} f(U) + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} \frac{U'^2}{f(U)} \right) d\tau^2 + \left(\frac{R}{U}\right)^{3/2} U^2 d\Omega_4^2 \quad (2.21)$$

D8 ブレーン上の開弦に対する低エネルギー有効作用は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用で与えられる。ゲージ場を無視した DBI 作用は次のようになる。

$$S_{D8} = -T_8 \int d^9x e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{MN})} \quad (2.22)$$

ここで $T_p \equiv \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1}}$ である。これを最小にするような解 $\tau(U)$ は

$$\tau(U) = \frac{\delta\tau}{4} \quad (2.23)$$

と与えられる。次のように変数変換をする。

$$y = U_{KK} \left(\frac{U^3}{U_{KK}^3} - 1 \right)^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{\delta\tau}\tau\right), \quad w = U_{KK} \left(\frac{U^3}{U_{KK}^3} - 1 \right)^{1/2} \sin\left(\frac{2\pi}{\delta\tau}\tau\right) \quad (2.24)$$

N_c 枚重なった D4 ブレーンは重力場に置き換わったので、背景重力場中の N_f 枚重なった D8 ブレーンを考える。フレーバーに対する $U(N_f)$ のゲージ対称性が存在し、高次元のゲージ場を A と書く。 $A_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ と A_w と $A_\alpha (\alpha = 5, 6, 7, 8 : S^4$ に対する座標の添字) の 9 つが存在するが QCD と同一視するために QCD には存在しない $SO(5)$ 対称性に対しては一重項のみを考えることにし、 A_α については無視し A_μ, A_w に S^4 依

存性はないものとする。D8 ブレーン上のゲージ理論は DBI 作用から次のように計算される。

$$\begin{aligned}
S_{D8} &= -T_8 \int d^9x e^{-\phi} \text{tr} \sqrt{-\det(g_{MN} + 2\pi\alpha' F_{MN})} \\
&= -T_8 \int d^9x e^{-\phi} \text{tr} \frac{1}{2} F_{ab} F_{cd} \frac{\delta}{\delta F_{ab}} \frac{\delta}{\delta F_{cd}} \sqrt{-\det(g_{MN} + 2\pi\alpha' F_{MN})} \Big|_{F=0} + \mathcal{O}(F^4) \\
&= -T_8 \int d^9x e^{-\phi} \text{tr} \frac{1}{4} \sqrt{-\det(g_{MN})} (2\pi\alpha')^2 g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd} + \mathcal{O}(F^4) \\
&= -T_8 \int d^4x dw d\Omega_4 \left(g_s \left(\frac{U}{R} \right)^{3/4} \right)^{-1} \text{tr} \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (R^3 U_{\text{KK}})^{1/2} \left(\frac{U}{R} \right)^{11/4} (2\pi\alpha')^2 \\
&\quad \times \left[\left(\frac{U}{R} \right)^{-3} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{9}{2} \frac{R}{U_{\text{KK}}} \left(\frac{U}{R} \right) F_{\mu w} F_{\mu w} \right] + \mathcal{O}(F^4) \\
&= -\frac{2\tilde{T}_8 (2\pi\alpha')^2}{g_s} \int d^4x dw \text{tr} \left[\frac{R^3}{4U} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{9}{8} \frac{U^3}{U_{\text{KK}}} F_{\mu w} F_{\mu w} \right] + \mathcal{O}(F^4) \tag{2.25}
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{T}_8 \equiv \frac{2}{3} R^{3/2} U_{\text{KK}}^{1/2} T_8 V_4 g_s^{-1}$ 、 U は余剰次元方向 w に依存する関数である。

$$U(w) = (U_{\text{KK}}^3 + U_{\text{KK}} w^2)^{1/3} \tag{2.26}$$

ここで導いた作用は l_s に陽に依存していないことがわかる。そのため、次のように l_s をとることができる。

$$l_s^2 = \frac{9}{2} \lambda^{-1} M_{\text{KK}}^{-2} \tag{2.27}$$

すると、この理論にあるパラメーターはすべて M_{KK} を用いて

$$R^3 = \frac{9}{4} M_{\text{KK}}^{-3}, \quad U_{\text{KK}} = M_{\text{KK}}^{-1} \tag{2.28}$$

と書くことができ、すべての物理量は Kaluza-Klein mass M_{KK} というスケールで決定される。ここでは記法を簡単にするため $M_{\text{KK}} = 1$ という単位で計算を進める。最終的に得られた物理量に対してこの M_{KK} を適宜乗じることで物理的な次元を復活させることにする。

導かれた作用に $U = U(w)$ と $M_{\text{KK}} = 1$ を代入すると、最終的には次のような理論が得られる。

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM}} &= -\kappa \int d^4x dw \text{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) F_{\mu\nu}^2 + k(w) F_{\mu w}^2 \right] \\
\kappa &= \frac{\lambda N_c}{216\pi^3} \\
k(w) &= 1 + w^2, \quad h(w) = k(w)^{-1/3} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

この理論は QCD の低エネルギーにおける有効理論である。通常と異なるのは我々が住む 4 次元時空 $x^{0\sim 3}$ に加えて余剰次元 w が存在し 5 次元の理論であること、さらにその w 方向に対して $h(w), k(w)$ という非自明な重力場が各項にかかっていることである。また、QCD はカラーに対する $\text{SU}(N_c)$ のゲージ理論であるのに対し、これはフレーバーの $\text{U}(N_f)$ のゲージ理論になっていることも異なる点である。D4/D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの系においてカラーの対称性を担っていたのは N_c 枚の D4 ブレーンであったが低エネルギーの理論を導くにあたり、D4 ブレーンはプローブの D8 ブレーンに重力を与える重力源に置き換わった。そのためカラーの自由度は理論から見えなくなった。これはホログラフィック QCD において低エネルギーでカラーの自由度を積分したことに対応している。

作用 $S_{5\text{YM}}$ は $1/N_c$ 、 $1/\lambda$ 展開での leading で DBI 作用から現れるものだが、 $1/\lambda$ の sub-leading では Chern-Simons 項

$$S_{CS} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(A) \quad (2.30)$$

$$\omega(A) = \text{tr} \left(AF^2 - \frac{i}{2} A^3 F - \frac{1}{10} A^5 \right) \quad (2.31)$$

が存在する [3]。ゲージ固定とモード展開により Wess-Zumino-Witten 項と等しくなり、低エネルギーにおける QCD のカイラル・アノマリーを再現している。

以上をまとめると、ホログラフィック QCD の作用は次のようになる：

$$S_{5\text{YM}} = S_{5\text{YM}}^{\text{SU}(N_f)} + S_{5\text{YM}}^{\text{U}(1)}, \quad (2.32)$$

$$S_{5\text{YM}}^{\text{SU}(N_f)} = -\kappa \int d^4x dw \text{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + k(w) F_{\mu w} F^{\mu w} \right] - \frac{\kappa}{2} \int d^4x dw \left(\frac{1}{2} h(w) \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + k(w) \hat{F}_{\mu w} \hat{F}^{\mu w} \right), \quad (2.33)$$

$$F_{MN} \equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N], \quad (2.34)$$

$$\hat{F}_{MN} \equiv \partial_M \hat{A}_N - \partial_N \hat{A}_M, \quad (2.35)$$

$$S_{CS} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(\mathcal{A}), \quad (2.36)$$

$$\omega(\mathcal{A}) = \text{tr} \left(\mathcal{A} \mathcal{F}^2 - \frac{i}{2} \mathcal{A}^3 \mathcal{F} - \frac{1}{10} \mathcal{A}^5 \right). \quad (2.37)$$

これ以降は、 $\text{U}(2)$ ゲージ場を A のかわりに $\mathcal{A}$ で表し、 $\mathcal{A} = A + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} \hat{A}$ のように $\text{SU}(2)$ と $\text{U}(1)$ 部分に分解して表す。

3 酒井・杉本モデルにおけるメソン

この節では酒井・杉本モデルの 5 次元のフレーバー空間に対するゲージ理論から 4 次元の理論を得る方法を紹介する。5 次元のゲージ場 $A_{\mu,w}$ に対して余剰次元方向 w でのモード展開を行う。すなわち、背景重力 $h(w), k(w)$ が存在する下での w 方向に対する完全系 $\{\psi_n(w)\}, \{\phi_n(w)\}$ を用いて

$$A_\mu(x, w) = \sum_n B_\mu^{(n)}(x) \psi_n(w) \\ A_w(x, w) = \sum_n \varphi^{(n)}(x) \phi_n(w) \quad (3.1)$$

と展開する。すると field strength は次のようになる：

$$F_{\mu\nu}(x, w) = \sum_n \left(\partial_\mu B_\nu^{(n)}(x) - \partial_\nu B_\mu^{(n)}(x) \right) \psi_n(w) + i \sum_{n,m} \left[B_\mu^{(n)}(x), B_\nu^{(m)}(x) \right] \psi_n(w) \psi_m(w) \\ F_{\mu w}(x, w) = \sum_n \left(\partial_\mu \varphi^{(n)}(x) \phi_n(w) - B_\mu^{(n)}(x) \dot{\psi}_n(w) \right) + i \sum_{n,m} \left[B_\mu^{(n)}(x), \varphi^{(m)}(x) \right] \psi_n(w) \phi_m(w). \quad (3.2)$$

これを式 (2.29) に代入すると

$$S_{D8} = \kappa \int d^4x dw \sum_{n,m} \text{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) \left(\partial_\mu B_\nu^{(n)} - \partial_\nu B_\mu^{(n)} \right) \left(\partial_\mu B_\nu^{(m)} - \partial_\nu B_\mu^{(m)} \right) \psi_n(w) \psi_m(w) \right. \\ \left. + k(w) \left(\partial_\mu \varphi^{(n)}(x) \phi_n(w) - B_\mu^{(n)}(x) \dot{\psi}_n(w) \right) \left(\partial_\mu \varphi^{(m)}(x) \phi_m(w) - B_\mu^{(m)}(x) \dot{\psi}_m(w) \right) \right] \quad (3.3)$$

となる。ここでは場についての運動項と質量項のみを残している。背景重力場 $h(w), k(w)$ が存在するもとの w 方向のモード展開をするため $\psi_n(w)$ ($n \geq 1$) について次の固有値方程式を考える：

$$h(w)^{-1} \partial_w (k(w) \partial_w \psi_n(w)) = \lambda_n \psi_n(w). \quad (3.4)$$

ここで $\psi_n(w)$ は次のように規格化する：

$$\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dw h(w) \psi_n(w) \psi_m(w) = \delta_{nm}. \quad (3.5)$$

これにより

$$\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dw \partial_w \psi_n(w) \partial_w \psi_m(w) = \lambda_n \delta_{nm} \quad (3.6)$$

となる。また $\phi^{(n)}(w)$ については

$$\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dw k(w) \phi_n(w) \phi_m(w) = \delta_{nm} \quad (3.7)$$

と規格化する。これは式 (3.6) より

$$\phi_n(w) = \lambda_n^{-1/2} \partial_w \psi_n(w) \quad (3.8)$$

と取ることで満たされる。ここで固有値方程式 (3.4) にはゼロ固有値が存在し、実際に ϕ についてのゼロモードは

$$\phi_0(w) = C k(w)^{-1} \quad (3.9)$$

とすることで直交関係式

$$(\phi_0, \phi_n) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dw \partial_w \phi_n(w) = 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.10)$$

を満たしている。規格化定数 C は $(\phi_0, \phi_0) = 1$ より $C = (\pi\kappa)^{-1/2}$ と決まる。これより式 (3.2) は

$$F_{\mu w} = \partial_\mu \phi^{(0)}(x) \varphi_0(w) + \sum_{n \geq 1} \left(\lambda_n^{-1/2} \partial_\mu \varphi^{(n)}(x) - B_\mu^{(n)}(x) \right) \dot{\psi}_n(w) \quad (3.11)$$

となる。 $\partial_\mu \phi^{(n)}$ については $B_\mu^{(n)}$ を次のゲージ変換をすることで吸収できる：

$$B_\mu^{(n)} \rightarrow B_\mu^{(n)} + \lambda_n^{-1/2} \partial_\mu \varphi^{(n)}. \quad (3.12)$$

以上より式 (3.3) は

$$S_{D8} = \int d^4x \text{tr} \left[\partial_\mu \varphi^{(0)} \partial^\mu \varphi^{(0)} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{\mu\nu(n)} + m_n^2 B_\mu^{(n)} B^{\mu(n)} \right) \right] \quad (3.13)$$

とまとまる。ここで $m_n^2 = \lambda_n$ と定義した。これは massive なベクトル場 $B_\mu^{(n)}$ の質量になっている。よって固有値を求めることで M_{KK} を単位とした質量を求めることができる。

ここで式 (3.13) に出てきたボソンを現実のメソンに対応させるために、それぞれの場のパリティと荷電共役変換に対する変換性を見る。まずパリティ変換であるが、今は空間が余剰次元 w を含めた 4 次元になっているため

$$P : (x^1, x^2, x^3, w) \rightarrow (-x^1, -x^2, -x^3, -w) \quad (3.14)$$

となる。これよりゲージ場の変換性

$$P : A_0 \rightarrow A_0, A_i \rightarrow -A_i, A_w \rightarrow -A_w \quad (3.15)$$

と合わせると式 (3.13) に現れたボソンの変換性は

$$P : \varphi^{(0)} \rightarrow -\varphi^{(0)}, B_0^{(n)} \rightarrow (-1)^{n+1} B_0^{(n)}, B_i^{(n)} \rightarrow (-1)^n B_i^{(n)} \quad (3.16)$$

となる。 $B^{(n)}$ は $\psi_n(w)$ の偶奇性によりそれぞれの n についてパリティは変わる。次に荷電共役変換についてであるが $A \rightarrow -A^T$ のもとでは DBI 作用は不変になっているが次の S_{CS} 項は不変になっていない：

$$S_{\text{CS}} \sim \int \omega_5(A) \rightarrow \int \omega_5(-A^T) = - \int \omega_5(A) \quad (3.17)$$

$$\omega_5(A) \equiv \text{tr} \left(AF^2 - \frac{1}{2} A^3 F + \frac{1}{10} A^5 \right). \quad (3.18)$$

しかし、 $A \rightarrow -A^T$ に加えて $w \rightarrow -w$ を考えることで CS 項も不変になる。4 次元においては荷電共役変換になっているのでこれよりゲージ場の変換性は

$$C : A_\mu \rightarrow -A_\mu^T, A_w \rightarrow A_w^T \quad (3.19)$$

となるので $\varphi^{(0)}, B_\mu^{(n)}$ については

$$C : \varphi^{(0)} \rightarrow \varphi^{(0)T}, B_\mu^{(n)} \rightarrow (-1)^{n+1} B_\mu^{(n)T} \quad (3.20)$$

となる。まとめると J^{CP} 表記で次のようになる：

$$\varphi^{(0)} : 0^{-+}, B_\mu^{(n)} = 1^{--}, 1^{++} (n : \text{odd, even}). \quad (3.21)$$

ここで massless の擬スカラー場 $\varphi^{(0)}$ はカイラル対称性が自発的に破れたことにより出現する南部ゴールドストン・ボソンのパイオンとみなすことができる。今、massless QCD を考えているためパイオンは massless になっている。 $B_\mu^{(n)}$ は $n : \text{odd, even}$ に対してそれぞれベクトル・メソン、軸性ベクトル・メソンに対応しており、具体的には $n = 1, 2, 3$ に対して $\rho, a_1(1260), \rho(1450)$ になっている。

酒井・杉本モデルについてパイオンのみの有効作用を計算するとスキルム模型 [12] が得られ、Chern-Simons 項を入れると Wess-Zumino-Witten 項 [31, 32] も導かれる。メソンの相互作用を計算すると Vector-Meson-Dominance (VMD) [33] や Kawarabayashi-Suzuki-Riazuddin-Fayyazuddin (KSRF) 関係といった現象論的な法則を導ける [34, 35]。また、軸性 $U(1)_A$ 対称性のアノマリーを計算することで、 η' メソンの質量を求めることができる。この結果は Witten-Veneziano 公式 [36, 37] と一致する。

4 ホログラフィック QCD におけるバリオン / Vortex Description

$1/N_c, 1/\lambda$ でのホログラフィック QCD として酒井・杉本モデルにおける作用は以下のように表される：

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}} \\
 S_{\text{YM}} &= -\kappa \int d^4x dw \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(w) \mathcal{F}_{\mu w}^2 \right] \\
 S_{\text{CS}} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(\mathcal{A}) \\
 \omega_5(\mathcal{A}) &\equiv \operatorname{tr} \left[\mathcal{A} \mathcal{F}^2 - \frac{i}{2} \mathcal{A}^3 \mathcal{F} - \frac{1}{10} \mathcal{A}^5 \right].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

S_{YM} は $1/N_c, 1/\lambda$ の leading であり、 S_{CS} は $1/N_c$ の leading, $1/\lambda$ の subleading である。この理論の構成要素はフレーバー空間のゲージ場として記述されるメソン場のみであり、核子などのバリオンは含まれていない。これは 't Hooft による large N_c の解析で、QCD はメソンとグルーボールの系となり、直接的な自由度としてバリオンは現れないことと符合する [38, 39]。ではバリオンはどのようにして記述されるかという large N_c の QCD ではメソン場の形成するソリトンとして記述されるのである [13]。

ホログラフィック QCD ではこの手法は大別すると 2 種類に分けられ、ゲージ場をモード展開して得られるメソン場の理論に対して、パイオンを中心としたカイラル・ソリトンを構成しバリオンとみなす方法 [14, 15] と、ゲージ場のインスタントン配位をバリオンとみなす方法 [17, 40] がある。ここでは 2 つ目の方法を考える。Witten は S^4 に巻き付く N_c 枚の D4 ブレーンがバリオンを表すという baryon vertex を提唱した [41]。ここでの S^4 は $x^5 \sim x^9$ 上の球面である。この方法では N_c 個のクォークがこの D4 ブレーンに結合しつくられる束縛状態をバリオンとみなすが、この D4 ブレーンは D8 ブレーン上のインスタントンで表すことができる [42]。これと同様に、酒井・杉本モデルでは空間 3 次元 x, y, z と余剰次元 w の 5 次元目を合わせた 4 次元空間上に形成されるインスタントンがバリオンに対応する。即ち、インスタントン数 N の場がバリオン数 N の場になるのだが、この理論においてこの配位を計算するのは難しい。後述するように Yang-Mills 項のみではサイズがゼロの配位が解となり、有限なサイズを持つ解を構成するためには Chern-Simons 項を含めて計算しなければならない [17, 40]。しかし、Yang-Mills 項と Chern-Simons 項は非自明な重力場が存在し Non-Abelian で高次元な理論であるため、数値的にも計算が困難である。

そこで、Witten Ansatz を用い配位にある対称性に関して不変な形に制限することで理論の次元を下げ、解の計算を容易にする。そこでは 4 次元のインスタントンは 2 次元のボルテックスに対応しバリオンに対する 2 次元上の直接的な計算が可能になる。

この章では酒井・杉本モデルを使ったバリオンの解析を行う。4.1 節では先行研究 [17] でのインスタントンとしてバリオンを解析的に計算する方法を見る。節 5.1 ではバリオンの解析に利用する Witten Ansatz を紹介する。節 5.2 では前節で見た Witten Ansatz を酒井・杉本モデルでバリオンを解析するための拡張を行い、そこから導かれる理論を見る。

4.1 バリオンのインスタントンによる記述

この節では先行研究 [17] にあるインスタントンとしてバリオンを解析する手法を紹介する。

$N_f = 2$ の場合を考える。まず、 $U(2)$ ゲージ場の $\mathcal{A}$ を $SU(2)$ ゲージ場の $\hat{A}$ と $U(1)$ ゲージ場の A の部分

に分解する：

$$\mathcal{A}_M = A_M + \frac{1}{2}\hat{A}_M \quad (4.2)$$

$$\mathcal{A}_M \in \mathfrak{u}(2), \quad A_M \in \mathfrak{su}(2), \quad \hat{A}_M \in \mathfrak{u}(1). \quad (4.3)$$

これにより作用は次のように書かれる。

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x dw \left[\frac{1}{2}h(w)F_{\mu\nu}^2 + k(w)F_{\mu w}^2 \right] + \frac{\kappa}{2} \int d^4x dw \left[\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}^2 + k(w)\hat{F}_{\mu w}^2 \right] \quad (4.4)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \left[\omega_5(A) + \frac{3}{2}\hat{A}\text{tr}F^2 + \frac{1}{8}\hat{A}\hat{F}^2 + \frac{1}{2}d \left(\hat{A}\text{tr} \left(2FA - \frac{i}{2}A^3 \right) \right) \right] \quad (4.5)$$

SU(2) ゲージ場 A について 5 次元の Chern-Simons 形式はゼロになる：

$$\omega_5(A) = 0. \quad (4.6)$$

これにより次のように書き直される：

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int \left[\frac{3}{2}\hat{A}\text{tr}F^2 + \frac{1}{4}\hat{A}\hat{F}^2 + (\text{total derivatives}) \right] \\ &= \frac{N_c}{24\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int d^4x dw \left[\frac{3}{8}\hat{A}_0\text{tr}F_{MN}F_{PQ} - \frac{3}{2}\hat{A}_M\text{tr}(\partial_0 A_N F_{PQ}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}\hat{F}_{MN}\text{tr}(A_0 F_{PQ}) + \frac{1}{16}\hat{A}_0\hat{F}_{MN}\hat{F}_{PQ} - \frac{1}{4}\hat{A}_M\hat{F}_{0N}\hat{F}_{PQ} + (\text{total derivatives}) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで大文字の添字は空間部分を表し $M, N, P, Q = 1, 2, 3, w$ とする。また $\epsilon_{123w} = 1$ とした。

4.1.1 節では $1/\lambda$ 展開の leading の Yang-Mills 項においてバリオンに対応する解を調べて、4.1.2 節では next leading の Chern-Simons 項の寄与を考える。

4.1.1 Yang-Mills 項の近似解

まずは、 $1/\lambda$ 展開の leading order を考える。今考えている 2 つの項は

$$S_{\text{YM}} \sim \mathcal{O}(\lambda^1), \quad S_{\text{CS}} \sim \mathcal{O}(\lambda^0) \quad (4.8)$$

という order をもっている。leading order を考えるということは Yang-Mills 項のみを考えるということになる。この 5 次元の理論に現れるソリトン解は 4 次元のインスタントンであり、空間部分 $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ の上に見られる。このときのインスタントン数はバリオン数とみなせ

$$\begin{aligned} N_B &= \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x dw \text{tr} \left(\tilde{F}_{MN} F_{MN} \right) \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^3x dw \epsilon_{MNPQ} \text{tr} (F_{MN} F_{PQ}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

$h(w) = k(w) = 1$ の時、つまり背景重力がない場合には、理論のスケール不変性、並進不変性よりインスタントン数 1 の解は任意のサイズ、任意の位置において解になっている。しかし、非自明な $h(w), k(w)$ の存在によりエネルギーが最小になるような解はサイズがゼロで $w = 0$ の位置にあるインスタントンのみになる。これを見るために変分的に平坦時空のインスタントン配位を代入してエネルギーを調べる。平坦時空の場合のイ

ンスタントン数 1 の解は次の BPST インスタントンで表される：

$$\begin{aligned}
A_M(x)^{\text{BPST}} &= -if(\xi)g(x)\partial_M g^{-1}(x) \\
f(\xi) &= \frac{\xi^2}{\xi^2 + a^2} \\
g(x) &= \frac{(w - W) - i(\vec{x} - \vec{X}) \cdot \vec{\tau}}{\xi} \\
\xi &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{X})^2 + (w - W)^2}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ はフレーバー空間に作用するパウリ行列である。 a はインスタントンのサイズであり、 $(\vec{X}, W)$ はインスタントンの位置である。この配位での field strength は

$$F_{ij}^{\text{BPST}} = \frac{2a^2}{(\xi^2 + a^2)^2} \epsilon_{ija} \tau^a, \quad F_{wi}^{\text{BPST}} = \frac{2a^2}{(\xi^2 + a^2)^2} \tau_i \tag{4.11}$$

平坦時空での 4 次元ユークリッド $SU(2)$ Yang-Mills 理論においてはこのゲージ場は任意の $\{a, (\vec{X}, W)\}$ で解になっており、 $\{a, (\vec{X}, W)\}$ を 1 インスタントンのモジュライという。

次に背景重力場 $h(w), k(w)$ が存在する場合を考える。 $\vec{X} = W = 0$ とするとエネルギーは次のようになり

$$\begin{aligned}
E &= \kappa \int d^3x dw \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) F_{ij}^2 + k(w) F_{iw}^2 \right] \\
&= 3\pi^2 \kappa a^4 \int dw (w^2 + a^2)^{-5/2} (h(w) + k(w)).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

この E は a に関して単調増加関数になっている。つまりエネルギーが最小になるのは $a = 0$ のときに限られる。

また、次の不等式からもサイズが 0 になることが示される：

$$\begin{aligned}
E &= \kappa \int d^3x dw \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(w) F_{ij}^2 + k(w) F_{iw}^2 \right] \\
&\geq \frac{\kappa}{2} \left| \int d^3x dw \operatorname{tr} \sqrt{h(w)k(w)} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a F_{iw}^a \right| \\
&\geq 8\pi^2 \kappa |N_B|.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$i, j = 1, 2, 3$ である。2 目の不等号は $h(w)k(w) = (1 + w^2)^{2/3} \geq 1$ と式 (4.9) より従う。この等号が成立するのはインスタントンが原点に存在してサイズがゼロ ($a = 0$) の時である。この時、トポロジカル・チャージは原点におけるデルタ関数になり $h(0) = k(0) = 1$ で背景重力は無視できるので、ここでの変分的考察が exact になる。なお、下限の $8\pi^2 \kappa$ は S^4 に巻き付いた D4 ブレーンの質量と一致している [3]。

まとめると、 $1/\lambda$ 展開の leading order である Yang-Mills 項のみではバリオンに対応するインスタントンはサイズが 0 になる [17]。

4.1.2 Yang-Mills+Chern-Simons 項による解析

leading ではサイズが 0 になるため、有限なサイズを得るために $1/\lambda$ の next leading order の Chern-Simons 項を考える [17]。

Chern-Simons 項は式 (4.7) のようになっていた。これらの項の中でもインスタントンのサイズに関して重要なのは次の項である。

$$\epsilon_{MNPQ} \int d^4x dw \hat{A}_0 \operatorname{tr}(F_{MN} F_{PQ}) \tag{4.14}$$

$\epsilon_{MNPQ}\text{tr}(F_{MN}F_{PQ})$ はトポロジカル・チャージの密度を表している。これが $\hat{A}_0$ と結合しているということはトポロジカル・チャージが $\hat{A}_0$ に関する U(1) チャージをもっていることを示している。これによりトポロジカル・チャージ間には $\hat{A}_0$ を介した斥力がはたらくので、有限のサイズを得ることになる。

これを確かめるため、実際に $1/\lambda$ による展開を用いて解を求めている。まず、次のようにリスケールを行う：

$$\tilde{x}^M = \lambda^{1/2} x^M, \quad \tilde{x}^0 = x^0. \quad (4.15)$$

これにより U(2) ゲージ場とその field strength は次のように変換される：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_0(t, \tilde{x}) &= \mathcal{A}_0(t, x), \quad \tilde{\mathcal{A}}_M(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{A}_M(t, x) \\ \tilde{\mathcal{F}}_{MN}(t, \tilde{x}) &= \lambda^{-1} \mathcal{F}_{MN}(t, x), \quad \tilde{\mathcal{F}}_{0M}(t, \tilde{x}) = \lambda^{-1/2} \mathcal{F}_{0M}(t, x). \end{aligned} \quad (4.16)$$

以後、簡単のため tilde を省略する。このようなリスケールにより作用は次のようになる：

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= \int d^4x dw \text{tr} \left[\frac{\lambda}{2} F_{MN}^2 + \left(-\frac{w^2}{6} F_{ij}^2 + w^2 F_{iw}^2 - F_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right] \\ &\quad - \frac{a_c N_c}{2} \int d^4x dw \left[\frac{\lambda}{2} \hat{F}_{0M}^2 + \left(-\frac{w^2}{6} \hat{F}_{ij}^2 + w^2 \hat{F}_{iw}^2 - \hat{F}_{0M}^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

ここで a_c は $\kappa \equiv a_c \lambda N_c$ で定義される定数である。Chern-Simons 項はこのリスケーリングで不変になっている。ここから λ の leading order に注目して運動方程式を書き下すと、SU(2) 部分からは

$$D_M F_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a_c} \epsilon_{MNPQ} \hat{F}_{MN} F_{PQ} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.18)$$

$$D_N F_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.19)$$

という方程式が得られる。同様に U(1) 部分は

$$\partial_M \hat{F}_{0M} + \frac{1}{64\pi^2 a_c} \epsilon_{MNPQ} \left\{ \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) + \frac{1}{2} \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} \right\} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.20)$$

$$\partial_N \hat{F}_{MN} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) = 0 \quad (4.21)$$

という式になる。今、Chern-Simons 項を考慮しているので、注目すべき order は $\mathcal{O}(\lambda^1)$ と $\mathcal{O}(\lambda^0)$ の部分である。それより低い order の部分は無視して計算を進める。式 (4.19) は通常の Yang-Mills 理論の運動方程式になっており、バリオンに相当する解を探しているため BPST(Belavin, Polyakov, Schwarz, Tyupkin) インスタントン解を用いる。ここでは空間 4 次元 (x, y, z, w) 上のインスタントンである。

$$F_{MN} = F_{MN}^{\text{BPST}} \quad (4.22)$$

次に式 (4.21) より $\hat{F}_{MN}$ は定数になるが、エネルギーの有限性を要請すると

$$\hat{F}_{MN} = 0 \quad (4.23)$$

となる。これに対して適当なゲージを選び

$$\hat{A}_M = 0 \quad (4.24)$$

とする。これらより式 (4.20) は

$$D_M^2 A_0 = 0 \quad (4.25)$$

となり A_0 という解を与える。式 (4.20) は次のように与えられる：

$$\partial_M^2 \hat{A}_0 + \frac{3}{\pi^2} \frac{a^4}{(\xi^2 + a^2)^4} = 0. \quad (4.26)$$

この解は無限遠での条件から

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{8\pi^2 a_c} \frac{a^4}{(\xi^2 + a^2)^2} \quad (4.27)$$

と定まる。BPST インスタントンは通常の Yang-Mills 理論においては任意の $(\vec{X}, W)$, a で解になっていた。しかし、非自明な重力場 $h(w), k(w)$ の存在、Chern-Simons 項の考慮によりそれらは解の自由度にはなっていない。今の $\mathcal{O}(\lambda^1), \mathcal{O}(\lambda^0)$ の計算においてどのような値がエネルギー最低の状態を与えるかは質量を見て決める。 $S = -\int dt M$ より

$$\begin{aligned} M &= 8\pi^2 \kappa + \kappa \lambda^{-1} \int d^3 x dw \left[-\frac{w^2}{6} \text{tr}(F_{ij})^2 + w^2 \text{tr}(F_{iw})^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa \lambda^{-1} \int d^3 x dw \left[(\partial_M \hat{A}_0)^2 + \frac{1}{32\pi^2 a_c} \hat{A}_0 \epsilon_{MNPQ} \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) \right] + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\ &= 8\pi^2 \kappa \left[1 + \lambda^{-1} \left(\frac{a^2}{6} + \frac{1}{320\pi^4 a_c^2} \frac{1}{a^2} + \frac{W^2}{3} \right) \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる。これにより質量が最小になるのは

$$a^2 = \frac{1}{8\pi^2 a_c} \sqrt{\frac{6}{5}}, \quad W = 0 \quad (4.29)$$

であることがわかる。式 (4.15) より $a \sim \mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ である。 $a \rightarrow 0$ で発散する項は $\hat{A}_0 \epsilon_{MNPQ} \text{tr}(F_{MN} F_{PQ})$ から来ている。前述の通りこの項がトポロジカル・チャージ間にクーロン斥力をはたらかせている。以上の考察より最小エネルギーのバリオンの質量は次のようになる：

$$M = 8\pi^2 \kappa + \sqrt{\frac{2}{15}} N_c. \quad (4.30)$$

これは $\mathcal{O}(N_c)$ になっており、large N_c QCD の計算と一致している。

ここで今見たリスケールの手法について、実は問題がある。 $1/\lambda$ の展開において $\mathcal{O}(\lambda^1)$ と $\mathcal{O}(\lambda^0)$ に注目し、それ以下の項を無視していた。それは $\mathcal{O}(\mathcal{F}^4)$ などの高階微分を含む項になっている。DBI アクションの形を見るとわかるように、 $\mathcal{F}$ は $2\pi\alpha' \mathcal{F}$ の組み合わせで現れる。式 (2.27) より $\alpha' \sim \mathcal{O}(\lambda^{-1})$ であるため、リスケールをすると以下ようになる：

$$\begin{aligned} \lambda d^4 x dw \alpha'^n \mathcal{F}^{n+2} &\sim \mathcal{O}(\lambda^{-n+1}) \\ \rightarrow \lambda d^4 \tilde{x} d\tilde{w} \alpha'^n \tilde{\mathcal{F}}^{n+2} &\sim \mathcal{O}(\lambda^1). \end{aligned}$$

このように高階微分の項は全て leading の Yang-Mills 項と同じ $\mathcal{O}(\lambda^1)$ になり、 $1/\lambda$ 展開において無視できないものとなる。つまり、背景重力場で平坦時空での解である BPST インスタントンをそのまま用いるの用いた解析は問題である。そこで Witten Ansatz を用いた計算を行う。この方法では高次元の Non-Abelian な理論は低次元の Abelian な理論に変わり計算が簡単になる。

5 バリオンのボルテックスによる記述

この節では、ホログラフィック QCD に適用する前に、Witten がインスタントン解を求めるために使った Witten Ansatz 及び、それによる解析 [43] を紹介する。

5.1 Witten Ansatz

通常の 4 次元ユークリッド SU(2) ゲージ理論を考える。ゲージ場に対して 3 次元回転とそれに対応するゲージ変換のもとで不変な形に制限するとその一般形は次のような形になる：

$$A_i^a(x, y, z, t) = \frac{\phi_2(r, t) + 1}{r} \epsilon_{iak} \hat{x}_k + \frac{\phi_1(r, t)}{r} \hat{\delta}_{ia} + a_r(r, t) \hat{x}_i \hat{x}_a, \quad (5.1)$$

$$A_t^a(x, y, z, t) = a_t(r, t) \hat{x}^a \quad (5.2)$$

$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2 \in \mathbf{C}, \quad (5.3)$$

$$a_\mu \equiv (a_0, a_1), \quad (5.4)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ia_\mu, \quad (5.5)$$

$$f_{01} \equiv \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0. \quad (5.6)$$

ここで r は 3 次元極座標の同径方向、 $\hat{x}_i \equiv x_i/r$ 、 $\hat{\delta}_{ij} \equiv \delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j$ であり、 ϕ_1, ϕ_2, a_0, a_1 はいずれも (t, r) の実関数である。実際に実関数 $F(t, r)$ で

$$U(t, r) = \exp(ix_a \sigma_a F(t, r)), \quad A_\mu \rightarrow U(t, r) (A_\mu - i\partial_\mu) U^\dagger(t, r)$$

とゲージ変換をすると ϕ_1, ϕ_2, a_0, a_1 は

$$\phi_2 \rightarrow \cos F \cdot \phi_2 - \sin F \cdot \phi_1$$

$$\phi_1 \rightarrow \sin F \cdot \phi_2 + \cos F \cdot \phi_1$$

$$a_0 \rightarrow a_0 - \partial_t F$$

$$a_1 \rightarrow a_1 - \partial_r F$$

と変換される ($\partial_0 \equiv \partial/\partial t$, $\partial_1 \equiv \partial/\partial r$)。これは SU(2) ゲージ群の可換な部分群となっており、後に説明するように U(1) ゲージ理論の場を構成している。これより field strength は

$$F_{0i}^a(t, r) = (\partial_0 \phi_2 - a_0 \phi_1) \frac{\epsilon_{iak} \hat{x}_k}{r} + (\partial_0 \phi_1 + a_0 \phi_2) \frac{\hat{\delta}_{ai}}{r} + (\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) \hat{x}_a \hat{x}_i$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = -(\partial_1 \phi_1 + a_1 \phi_2) \frac{\epsilon_{iak} \hat{x}_k}{r} + (\partial_1 \phi_2 - a_1 \phi_1) \frac{\hat{\delta}_{ai}}{r} + \frac{1}{r^2} (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) \hat{x}_a \hat{x}_i$$

となり、作用は

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} (F_{0i}^a)^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a)^2 \right]$$

$$= 8\pi \int dt dr \left[\frac{1}{2} (D_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{8} r^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4r^2} (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)^2 \right]$$

$$= 8\pi \int dt dr \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_i D_\nu \phi_j + \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)^2 \right]$$

となる。ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $g^{\mu\nu} = r^2 \delta^{\mu\nu}$ である。いくつかの細部を除き、Abelian-Higgs 理論になっている。最終的な表式をみるとわかるように曲がった 2 次元時空上の理論になっている。

インスタントン解を求めるために自己双対条件を考える：

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} \left(\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ \Leftrightarrow F_{0i}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a.$$

これに先の Ansatz を代入すると次の方程式を得られる：

$$\begin{aligned} \partial_0 \phi_1 + a_0 \phi_1 &= \partial_1 \phi_2 - a_1 \phi_1 \\ \partial_1 \phi_1 + a_1 \phi_2 &= -(\partial_0 \phi_2 - a_0 \phi_1) \\ r^2(\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) &= 1 - \phi_1^2 - \phi_2^2. \end{aligned}$$

ここで、Landau ゲージ $\partial_\mu a_\mu$ をとるとゲージ場は ψ を用いて

$$a_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi$$

と表される。これにより上 2 つの方程式は

$$\begin{aligned} [\partial_0 - (\partial_0 \psi)] \phi_1 &= [\partial_1 - (\partial_1 \psi)] \phi_2 \\ [\partial_1 - (\partial_1 \psi)] \phi_1 &= -[\partial_0 - (\partial_0 \psi)] \phi_2 \end{aligned}$$

となる。Higgs 場を $\phi_1 = e^\psi \chi_1$, $\phi_2 = e^\psi \chi_2$ と書くと

$$\begin{aligned} \partial_0 \chi_1 &= \partial_1 \chi_2 \\ \partial_1 \chi_1 &= -\partial_0 \chi_2 \end{aligned}$$

これはコーシー・リーマン方程式である。つまり、自己双対条件は $f = \chi_1 - i\chi_2$, $z = r + it$ に対する正則条件 $\partial_{\bar{z}} f$ になっている。これより残りの方程式は

$$-r^2 \nabla^2 \psi = 1 - f^* f e^{2\psi}$$

となる。これを解くために ψ を

$$\psi = \ln r - \frac{1}{2} \ln(f^* f) + \rho$$

として ρ のみの方程式に変形する：

$$\nabla^2 \rho = e^{2\rho}.$$

リウヴィル方程式になっている。まずは次の特解から始める：

$$\rho_1(z) = -\ln \left[\frac{1}{2} (1 - |z|^2) \right]. \quad (5.7)$$

これを解析関数 $w(z)$ で変数変換すると

$$\nabla_w^2 \rho_1(w) = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 e^{2\rho_1(w)} \quad (5.8)$$

となる。よって $\nabla^2 \ln \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = 0$ より解析関数 $g(z)$ に対して

$$\rho(z) = -\ln \left[\frac{1}{2}(1 - |g|^2) \right] + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \quad (5.9)$$

がリウヴィル方程式の解となる。ヒッグス場、つまり ψ が特異性を持たないように $(\frac{dg}{dz})/f$ に対して零点や曲を持たないように要請すると一般系は次のようになる：

$$\psi = -\ln \left(\frac{1 - |g|^2}{2r} \right), \quad f = \frac{dg}{dz}. \quad (5.10)$$

半平面上 $r \geq 0$ での特異性をなくすために次の条件を $g(z)$ に課すと

$$\begin{aligned} |g| &= 1 \quad (r = 0) \\ |g| &< 1 \quad (r > 0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$g(z)$ の一般的な形は

$$g(z) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i - z}{z_i^* + z} \right) \quad (5.12)$$

となる。ここで a_i は $\text{Re}[a_i] > 0$ を満たす複素数である。2次元面上の f の零点の位置がゲージ不変な量でボルテックスのモジュライ (解の自由度) になっている。 $k-1$ が元のインスタントン解のインスタントン数であり、 $k=1$ は真空解、 $k=2$ はBPST インスタントン解に対応している。インスタントンはQCDの並進不変性から4次元空間上の位置を自由度として持っているが、今は3次元回転に対して不変なものを求めているため、インスタントン数1のBPST インスタントン解は次のように表される：

$$A_\mu^a(r, t) = -\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{x^\nu - \delta^{\nu 4} T}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \quad (5.13)$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \equiv \eta_{\mu\nu}^{(\pm)a} \sigma_a \quad (5.14)$$

$$\equiv \{ \epsilon_{a\mu\nu 4} \pm \delta_{\mu 4} \delta_{\nu a} \mp \delta_{\nu 4} \delta_{\mu a} \} \sigma_a. \quad (5.15)$$

回転不変よりインスタントンは空間方向では原点、時間方向には $t = T$ に位置している。 a はインスタントンのサイズである。2次元 Abelian-Higgs 理論の field との対応を見てみる。式変形をすると

$$A_i^a = -2(\epsilon_{aiv 4} + \delta_{\nu 4} \delta_{ia}) \frac{x^\nu - \delta^{\nu 4} T}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \quad (5.16)$$

$$= \frac{2r}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \epsilon_{iaj} \hat{x}^j + \frac{-2(t - T)}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \hat{\delta}_{ia} + \frac{-2(t - T)}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \hat{x}_i \hat{x}_a \quad (5.17)$$

$$A_4^a = \frac{2r}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \hat{x}^a \quad (5.18)$$

となり

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{-2r(t - T)}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \\ \phi_2 &= -1 + \frac{2r^2}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \\ a_1 &= \frac{-2(t - T)}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \\ a_2 &= \frac{2r}{r^2 + (t - T)^2 + a^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

というボルテックス解に対応する。Higgs 場 ϕ の零点の位置は実部と虚部がそれぞれインスタントンのモジュライのサイズ a と時間方向の位置 T に対応していることがわかる。4 次元のインスタントン数と 2 次元のボルテックス数、それぞれの次元におけるトポロジカルチャージが一致していることを見る。Pontryagin 指数に Witten Ansatz を代入すると

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \text{tr} [\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left[\epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{ij} D_\mu \phi_i D_\nu \phi_j + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (1 - \phi^2) \right] \quad (5.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left[\partial_\mu (\epsilon_{ij} \epsilon_{\mu\nu} \phi_i D_\nu \phi_j) + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \quad (5.22)$$

2 項目の全微分は境界における $D_\mu \phi_i = 0$ より落ちる。 $F_{\mu\nu}$ に先に求めたインスタントン解を代入すると

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln(f e^\psi) \quad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f + \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d\psi}{ds} \quad (5.24)$$

2 項目は ψ の一価性より消え、 $Q = (f \text{ の零点の数})$ になり確かに一致する。つまり、Witten Ansatz のもとで 4 次元ユークリッド Yang-Mills 理論におけるインスタントンは変形した 2 次元 Abelian-Higgs 理論におけるボルテックスで表すことができる。

5.2 Witten Ansatz の酒井・杉本モデルへの応用

この節では酒井・杉本モデルにおけるバリオンを Witten Ansatz を用いて解析する手法を導入する。この方法は先行研究 [44, 45] において用いられた方法と同じになり、BPST インスタントンによる近似に対する評価やバリオンの物理量が定量的に調べられた。この論文でも同様の手法を用いてバリオンを解析する。最初に $1/\lambda$ 展開の leading order である Yang-Mills 項に対する計算を行う。そこでは $U(2)$ のうち、バリオンに関係する $SU(2)$ 部分を考える。次に酒井・杉本モデルにおける $1/\lambda$ 展開の next leading order である Chern-Simons 項 S_{CS} を入れて計算する。この項は $SU(2)$ 部分と $U(1)$ 部分が couple する項を含むため $U(1)$ についても計算をする。節 4.1 ではリスケールすることで計算したが、この方法では背景重力 $h(w), k(w)$ の効果は見えず、order の問題も発生する。Witten Ansatz を適用する方法では低次元化することで直接の計算が可能になり背景重力が正しく取り込むことができる。

5.2.1 Witten Ansatz の酒井・杉本モデルへの応用：YM 項に対する解析

Witten Ansatz はもともと 4 次元ユークリッド Yang-Mills 理論におけるインスタントン解を構成するために設定した配位である [43]。これは 4 次元ユークリッド空間 (t, x, y, z) のうち 3 次元空間 (x, y, z) についての回転対称性を課して 2 次元空間 (t, r) 上の理論に変換しそこでのボルテックスを計算した。今、対象にしている酒井・杉本モデルは 5 次元の Yang-Mills 理論である。そこに現れるバリオンはやはり空間 3 次元 (x, y, z) に対して回転対称性を持っていることが望ましい。そのため Witten Ansatz を 5 次元時空の中の 3 次元空間に対する回転対称性を考えて拡張し当てはめることで、同様に低い次元の理論が導かれると予想される。そこでのトポロジカル・オブジェクトを計算することでバリオンに対応する解の計算を可能にする。

まず、SU(2) ゲージ場 A_M^a は Witten Ansatz を 5 次元に拡張して 3 次元空間 (x, y, z) に対して回転対称性を考えて次のようにする。

$$\begin{aligned} A_0^a(t, r, w) &= a_0(t, r, w)\hat{x}^a \\ A_i^a(t, r, w) &= \frac{(\phi_2(t, r, w) + 1)}{r}\epsilon_{iaj}\hat{x}^j + \frac{\phi_1(t, r, w)}{r}\hat{\delta}_{ia} + a_r(t, r, w)\hat{x}_i\hat{x}_a \\ A_w^a(t, r, w) &= a_w(t, r, w)\hat{x}^a \end{aligned} \quad (5.25)$$

もとの Witten Ansatz にさらに余剰次元方向のゲージ場 A_w が加わっている。ここで ϕ_1, ϕ_2, a_0, a_1 は (t, r, w) に依存した実関数である。なお、これら配位はスキーム模型におけるカイラル場や ρ メソン場に対する次の hedgehog Ansatz [12] や Wu-Yang-'tHooft-Polyakov Ansatz [46, 47] と同じ形をしている。

$$U(\mathbf{x}) = \exp(iF(r)\hat{x}_i\tau^i) \quad (5.26)$$

$$\rho_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \rho_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}G(r)\tau^j\hat{x}^k \quad (5.27)$$

これらは 3 次元空間の回転とそれに対応したアイソスピン変換に対して不変な形になっており、ちょうど今考えている回転対称性で不変なものを要請するのと同じ仕組みになっている。

Witten Ansatz を利用すると field strength F_{MN} は次のようになる：

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &= (\partial_0\phi_2 - a_0\phi_1)\frac{\epsilon_{iak}\hat{x}^k}{r} + \frac{\partial_0\phi_1 + a_0\phi_2}{r}\hat{\delta}_{ai} + (\partial_0a_r - \partial_ra_0)\hat{x}_0\hat{x}_i \\ \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}^a &= -(\partial_r\phi_1 + a_r\phi_2)\frac{\epsilon_{ial}\hat{x}^l}{r} + \frac{\partial_r\phi_2 - a_r\phi_1}{r}\hat{\delta}_{ai} + \frac{1}{r^2}(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)\hat{x}_a\hat{x}_i \\ F_{iw}^a &= (\partial_0\phi_2 - a_0\phi_1)\frac{\epsilon_{iak}\hat{x}^k}{r} + \frac{\partial_0\phi_1 + a_0\phi_2}{r}\hat{\delta}_{ai} + (\partial_0a_r - \partial_ra_0)\hat{x}_0\hat{x}_i \\ F_{0w}^a &= (\partial_0a_w - \partial_wa_0)\hat{x}_a. \end{aligned} \quad (5.28)$$

これらを Yang-Mills 項の SU(2) 部分に代入すると最終的には

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}}^{SU(2)} &= \kappa \int d^4x dw \text{tr} \left[-\frac{h(w)}{2} F_{\mu\nu}^2 + k(w) F_{\mu w}^2 \right] \\ &= \kappa \int d^4x dw \left[\frac{h(w)}{2} (F_{0i}^a)^2 + \frac{h(w)}{2} \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}^a \right)^2 + \frac{k(w)}{2} (F_{0i}^a)^2 + \frac{k(w)}{2} (F_{iw}^a)^2 \right] \\ &= 4\pi\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[h(w)|D_0\phi|^2 - h(w)|D_1\phi|^2 - k(w)|D_2\phi|^2 - \frac{h(w)}{2r^2}(1 - |\phi|^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{h(w)r^2}{2}f_{01}^2 + \frac{k(w)r^2}{2}f_{02}^2 - \frac{k(w)r^2}{2}f_{12}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ia_\mu \quad (5.30)$$

となる。3 次元空間 (x, y, z) の角度依存性が消え r に依存するものになったため理論の次元が 2 次元分落ちている。これを見ると 1+4 次元の Yang-Mills 理論が細部の違いを除き 1+2 次元の Abelian-Higgs 理論に変わったことがわかる。 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ は Higgs 場、 $a_i (i = 0, 1, 2)$ は Higgs 場と couple する U(1) ゲージ場である。もとの酒井・杉本モデルにおける余剰次元方向の非自明な背景重力 $h(w), k(w)$ や低次元に下げたことで現れる r^2 が各項に係っている。この理論におけるパラメーターはもとの理論と同様に全体にかかる κ と、今は 1 に設定している Karuza-Klein 質量 M_{KK} の 2 つである。

Yang-Mill 項には SU(2) 部分に加えて、U(1) 部分が存在している。しかし、これらは $\mathcal{O}(\lambda)$ の leading order を見ている場合には完全に独立しているため、今は考えていない。U(1) 部分の Yang-Mills 項は次節で next leading の Chern-Simons 項を見る時に一緒に考える。

ここで $a_0 = 0$ ゲージをとり、場が時間に非依存であるとする $SU(2)$ 部分のエネルギー $E_{\text{YM}}^{\text{SU}(2)}$ は

$$E_{\text{YM}}^{\text{SU}(2)} = 4\pi\kappa \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[h(w)|D_1\phi|^2 + k(w)|D_2\phi|^2 + \frac{h(w)}{2r^2}(1-|\phi|^2)^2 + \frac{k(w)r^2}{2}f_{12}^2 \right] \quad (5.31)$$

と書かれる。

これは Ginzburg-Landau 理論における自由エネルギーの形に似ており、2次元のトポロジカルオブジェクトのボルテックスが解として存在する。節 5.1 における Witten Ansatz での解析で見たようにこのボルテックスがもとの 4次元 Yang-Mills 理論のインスタントンに対応している。つまり、酒井・杉本モデルにおける 4次元空間 (x, y, z, w) 上に現れる 3次元回転対称なインスタントンと式 (5.31) における 2次元半平面 (r, w) 上に現れるボルテックスを同一視される。よって、このボルテックス解を求めることでバリオンを得ることができる。さらにモジュライの対応からインスタントンのサイズ a と w 方向の位置は、それぞれボルテックスの零点 z_0 の r 方向の位置と w 方向の位置に対応している。

5.2.2 Witten Ansatz の酒井・杉本モデルへの応用：CS 項に対する解析

前節では $1/\lambda$ 展開の leading order である Yang-Mills 項を考えた。4.1.1 節で示されたように Yang-Mills 項 S_{YM} のみだと背景重力の影響でエネルギーが最小となる解はサイズが 0 のインスタントンになっている。これはバリオンの大きさが 0 であることに対応し、奇妙である。しかし、next leading order の Chern-Simons 項を考えることでインスタントンは有限のサイズを持つようになり、この問題は解消した [17]。この 2つの項を考えることは $1/N_c$ 展開の leading order、 $1/\lambda$ 展開の next leading order までを考えることになる：

$$S_{\text{YM}} \sim \mathcal{O}(\lambda^1), \quad S_{\text{CS}} \sim \mathcal{O}(\lambda^0). \quad (5.32)$$

この節でも同様に Chern-Simons 項を考えるが、この項には $SU(2)$ ゲージ場と $U(1)$ ゲージ場が結合する項が含まれている。そのためバリオンに対応するインスタントンを形成する $SU(2)$ ゲージ場に加えて、 $U(1)$ ゲージ場も考慮する必要がある。そこで $U(1)$ ゲージ場に対しても Witten Ansatz を適用する。

3次元回転対称性をもつような $U(1)$ ゲージ場 $\hat{A}_M$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \hat{A}_0(t, r, w) &= \hat{a}_0(t, r, w) \\ \hat{A}_i(t, r, w) &= \hat{a}_r(t, r, w)\hat{x}_i \\ \hat{A}_w(t, r, w) &= \hat{a}_w(t, r, w) \end{aligned} \quad (5.33)$$

これを用いると field strength $\hat{F}_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} \hat{F}_{0i} &= (\partial_0\hat{a}_r - \partial_r\hat{a}_0)\hat{x}_i \\ \hat{F}_{ij} &= 0 \\ \hat{F}_{iw} &= (\partial_r\hat{a}_w - \partial_w\hat{a}_r)\hat{x}_i \\ \hat{F}_{0w} &= \partial_0\hat{a}_w - \partial_w\hat{a}_0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

となる。今、 $\hat{F}_{ij} = 0$ より $\hat{a}_r = 0$ のゲージをとることができる。これにより $\hat{A}_i = 0$ となり、これは式 (4.24) と consistent である。Yang-Mills 項の $U(1)$ 部分は

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}}^{U(1)} &= \frac{\kappa}{2} \int d^4x dw [h(w)\hat{f}_{0r}^2 + k(w)\hat{f}_{0w}^2 - k(w)\hat{f}_{rw}^2] \\ &= 2\pi\kappa \int_{-\infty}^\infty dt \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw r^2 [h(w)(\partial_r\hat{a}_0)^2 + k(w)(\partial_w\hat{a}_0)^2 - k(w)(\partial_r\hat{a}_w)^2] \end{aligned} \quad (5.35)$$

となる。ここで $\hat{a}_w$ は時間に依存しないものとした。Yang-Mills 項のみだけを考えている場合は SU(2) 部分と U(1) 部分は分離しており、U(1) 部分はインスタントン解に寄与しない。しかし、Chern-Simons 項を加えると 2 つは couple しインスタントンはその影響を受ける。

Chern-Simons 項は次のような形になっている：

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int \omega_5(\mathcal{A}) \quad (5.36)$$

$$= \frac{N_c}{24\pi^2} \int [\omega_5(A) + \frac{3}{\sqrt{2N_f}} \hat{A} \text{tr} F^2 + \frac{1}{2\sqrt{2N_f}} \hat{A} \hat{F}^2 + \frac{1}{\sqrt{2N_f}} d\{\hat{A} \text{tr}(2FA - \frac{1}{2}A^3)\}]. \quad (5.37)$$

$N_f = 2$ のとき $\omega_5(A) = 0$ であり、次のように書ける：

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int \left[\frac{3}{8} \hat{A}_0 \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) - \frac{3}{2} \hat{A}_M \text{tr}(\partial_0 A_N F_{PQ}) + \frac{3}{4} \hat{F}_{MN} \text{tr}(A_0 F_{PQ}) + \frac{1}{16} \hat{A}_0 \hat{F}_{MN} \hat{F}_{PQ} - \frac{1}{4} \hat{A}_M \hat{F}_{0N} \hat{F}_{PQ} \right] + (\text{total derivative}). \quad (5.38)$$

ここで $M, N = x, y, z, w$ である。 A_M が時間に依存せず、 $A_0 = 0$ のゲージをとると第 2, 3 項目は落ちる。今、 $\hat{A}_i = 0, F_{ij} = 0$ なので第 4, 5 項目も消える。最終的に次のような形になる：

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{64\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \int d^4x dw \hat{A}_0 \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}) \\ = \frac{N_c}{2} \int d^4x dw \hat{A}_0 \rho \quad (5.39)$$

$$\rho \equiv \frac{1}{16\pi^2} \text{tr}(\hat{F}_{MN} F_{MN}) \\ = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \text{tr}(F_{MN} F_{PQ}). \quad (5.40)$$

ρ は SU(2) ゲージ場による 4 次元のトポロジカル・チャージ密度である。これは U(1) ゲージ場とトポロジカル・チャージが couple していることを表す。これによりトポロジカル・チャージは U(1) チャージをもち、2 つのトポロジカル・チャージの間にはクーロン斥力が発生する。Yang-Mills 項のみを考えた場合に一点に潰れたインスタントンは、この斥力を受けてつぶれずに有限のサイズを持つようになる。実際に $\hat{A}_0$ の部分を解きトポロジカル・チャージに与えるクーロン斥力を計算する。

U(1) ゲージ場が関係するところを抜き出すと

$$S^{U(1)} = 4\pi\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dw r^2 \left[\frac{\kappa h(w)}{2} (\partial_r \hat{A}_0)^2 + \frac{\kappa k(w)}{2\kappa} (\partial_w \hat{A}_0)^2 - \frac{\kappa k(w)}{2} (\partial_r \hat{A}_w)^2 + \frac{N_c}{2\kappa} \hat{A}_0 \rho \right] \quad (5.41)$$

となる。 $\partial_r^2 \hat{A}_w = 0$ として、 $\hat{A}_0$ の部分について部分積分をすると

$$S^{U(1)} = 4\pi\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[\frac{1}{2} \hat{A}_0 \hat{K} \hat{A}_0 + \frac{N_c}{2\kappa} \hat{\rho} \right] \quad (5.42)$$

またエネルギーは

$$E^{U(1)}[\rho_B(r, w), \hat{A}_0(r, w)] = -4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[\frac{1}{2} \hat{A}_0(r, w) K \hat{A}_0(r, w) + \frac{N_c}{2} \rho_B(r, w) \hat{A}_0(r, w) \right] \\ = - \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[\frac{1}{2} \hat{A}_0(r, w) \hat{K} \hat{A}_0(r, w) + 2\pi N_c \tilde{\rho}_B(r, w) \hat{A}_0(r, w) \right]$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dw \mathcal{E}^{\text{U}(1)}(r, w), \quad (5.43)$$

と書ける。ここで

$$\tilde{K} \equiv 4\pi r^2 K = -4\pi\kappa\{h(w)\partial_r r^2 \partial_r + r^2 \partial_w k(w)\partial_w\}, \quad (5.44)$$

$$\hat{\rho} = r^2 \rho, \quad (5.45)$$

として 2 次元平面上の微分作用素、トポロジカル・チャージを定義した。さらに変形すると

$$\begin{aligned} S^{U(1)} &= 4\pi\kappa \int_{-\infty}^\infty dt \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[\frac{1}{2} \left(\hat{A}_0 + \frac{N_c}{2} \hat{\rho} \hat{K}^{-1} \right) \hat{K} \left(\hat{A}_0 + \frac{N_c}{2} \hat{K}^{-1} \hat{\rho} \right) + \frac{N_c^2}{8\kappa} \hat{\rho} \hat{K}^{-1} \hat{\rho} \right] \\ &= -\frac{N_c^2 \pi}{2\kappa} \int_{-\infty}^\infty dt \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \hat{\rho} \hat{K}^{-1} \hat{\rho} \end{aligned} \quad (5.46)$$

となる。ここでは $\hat{A}_0$ についての運動方程式

$$\hat{K} \hat{A}_0 + \frac{N_c}{2} \hat{\rho} = 0 \quad (5.47)$$

を使った。これにより Chern-Simon 項のエネルギーへの寄与は

$$\begin{aligned} E_{\text{CS}} &= \frac{N_c^2 \pi}{2\kappa} \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \hat{\rho} \hat{K}^{-1} \hat{\rho} \\ &= \frac{N_c^2 \pi}{2\kappa} \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dw' \hat{\rho}(r, w) \hat{K}^{-1}(r, w, r', w') \hat{\rho}(r', w') \end{aligned} \quad (5.48)$$

となる。これは確かにトポロジカル・チャージ間にクーロン力が働いていることを表している。拡張した Witten Ansatz(5.25) を適用したトポロジカル・チャージは次のような形になる：

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= r^2 \frac{1}{16\pi^2} \text{tr} \tilde{F}_{MN} F_{MN} \\ &= r^2 \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{MNPQ} \text{tr} F_{MN} F_{PQ} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} [-i\epsilon_{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* D_\nu \phi + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu a_\nu (1 - |\phi|^2)] \\ &= \frac{1}{8\pi^2} [2\text{Im} [(D_1 \phi)^* D_2 \phi] + f_{12} (1 - |\phi|^2)]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

もともとの理論は $1 + 4$ 次元の Non-Abelian な理論であるため、古典的にも計算は難しかった。Witten Ansatz を適用するとこれは $1 + 2$ 次元の Abelian なゲージ理論に変わり、古典的な計算が簡単になった。本章ではこの簡単化した理論を用い、実際に数値的な計算を行う。

まとめると、全エネルギー E は 2 つの部分に分かれ

$$\begin{aligned} &E[\phi(r, w), \vec{a}(r, w), \hat{A}_0(r, w)] \\ &= E_{5\text{YM}}^{\text{SU}(2)_f}[\phi, \vec{a}] + E^{\text{U}(1)}[\rho_B, \hat{A}_0], \end{aligned} \quad (5.50)$$

全エネルギー密度は $\mathcal{E}(r, w)$ は

$$\mathcal{E}(r, w) = \mathcal{E}^{\text{SU}(2)_f}(r, w) + \mathcal{E}^{\text{U}(1)}(r, w), \quad (5.51)$$

と書かれる。互いに作用し合う $\text{SU}(2)_f$ セクターと $\text{U}(1)$ セクターを扱い、数値計算を行う。

5.3 計算結果

この章では一般化した Witten Ansatz を用いてホログラフィック QCD にバリオンの vortex 描像を導入する。空間の (x, y, z) において回転対称な単一バリオンにおいては、Witten Ansatz を適用し理論を曲がった空間上の 1+2 次元の Abelian Higgs 理論に還元した。その理論では、ホログラフィックバリオンは Abrikosov vortex という 2 次元のトポロジカルオブジェクトとして表される。我々は格子計算により単一の基底状態のバリオンとしてホログラフィック QCD の $B = 1$ の解を数値計算で求めた [19]。

5.4 Witten Ansatz におけるホログラフィック・バリオン

QCD は large N_c において、顕な自由度はメソンとグルーボールのみであり、バリオンはメソン場のソリトンとして現れる [13]。Large N_c を基にしているホログラフィック QCD も同様にメソンの有効理論になり、その枠組みにおいて、バリオンはメソン場で構成されるカイラル・ソリトンとして現れる [3, 14]。ホログラフィック QCD は 4 次元空間 (x, y, z, w) を持ち、インスタントンが重要なトポロジカル・オブジェクトとして自然に現れる。このトポロジカル・オブジェクトは物理的にはバリオンとみなされ、ホログラフィック・バリオンとも呼ばれる [17]。

驚くべきことに、Witten Ansatz により一般にトポロジカルな記述は 4 次元のインスタントンから 2 次元のボルテックスに変わる [43]。さらに、ホログラフィック QCD においてボルテックス数は Witten Ansatz によりバリオン数と解釈される [18]。

実際。バリオン数 B もしくは (r, w) 平面での周回積分により計算されるポントリャーギン指数は

$$\begin{aligned}
 B &= \int d^3x dw \rho_B \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \epsilon_{ij} \partial_i \{a_j(1 - |\phi|^2) + \partial_j \theta \cdot |\phi|^2\} \\
 &= \oint_{r \geq 0} ds \cdot \{\mathbf{a}(1 - |\phi|^2) + \nabla \theta \cdot |\phi|^2\} \\
 &= \oint_{r \geq 0} ds \cdot \nabla \theta,
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

となる。ここで $\oint_{r \geq 0}$ は (r, w) , $(r \geq 0)$ 半平面全体に対する周回積分を表す。エネルギー (5.31) を有限に保つため、 (r, w) 半平面に対して次の境界条件を課した：

$$|\phi(r = 0, {}^\forall w)| = 1, \tag{5.53}$$

$$|\phi({}^\forall r, w = \pm\infty)| = |\phi(r = \infty, {}^\forall w)| = 1. \tag{5.54}$$

したがって、この形式においてバリオン数 B はボルテックス数に変換される [18]。

5.5 ホログラフィック QCD におけるバリオンの Abrikosov ボルテックス解

この節では 1+2 次元の Abelian Higgs theory における Abrikosov ボルテックスによる記述を通してホログラフィック QCD のバリオンの基底状態を数値的に計算する [18]。

$B = 1$ の条件を課しながら、式 (5.50) の全エネルギー $E[\phi, \vec{a}, \hat{A}_0]$ を数値的に最小化する。これは基底状態の単一バリオンに対するホログラフィック QCD の運動方程式を解くことに相当する。

ホログラフィック QCD の 2つのパラメータ M_{KK} と κ に対して、 $f_\pi \simeq 92.4 \text{ MeV}$ と $m_\rho \simeq 776 \text{ MeV}$ を再現するような $M_{\text{KK}} \simeq 948 \text{ MeV}$ 、 $\kappa = 7.46 \times 10^{-3}$ をとっている [3, 14]。本研究では $M_{\text{KK}} = 1$ という Kaluza-Klein unit を使っている。

(r, w) 平面での数値計算に対して、格子間隔とシステムサイズはそれぞれ

$$0.2 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.04 \text{ fm} \quad (5.55)$$

$$0 \leq r \leq 250, -125 \leq w \leq 125 \quad (5.56)$$

をとる。これは物理的には $(50 M_{\text{KK}}^{-1})^2 \simeq (10 \text{ fm})^2$ の系になっている。物理量に対して格子の詳細によらないように格子間隔、系のサイズは十分に細かく大きいものを用いている [19]。

この格子上で、 $B = 1$ のトポロジカルな配位である 't Hooft 解からはじめ、全エネルギー $E[\phi, \vec{a}, \hat{A}_0]$ を最小にするように数値計算を行う。これは ローカルな場の変数 ϕ 、 $\vec{a}$ 、 $\hat{A}_0$ についてエネルギーが少なくなるように変える操作を繰り返し行うことにより計算する。 $B = 1$ により Higgs 場は常に 1つ零点をもち、数値計算中の更新の間、一般にその零点は基底状態を実現するために動く。このようにして得られた場 $\phi(r, w)$ 、 $\vec{a}(r, w)$ 、 $\hat{A}_0(r, w)$ は基底状態のバリオンを表すホログラフィック QCD の運動方程式の真の解になっている。

数値計算の確認として、Appendix B にあるような別の計算方法を考える。この方法では U(1) ゲージ場 $\hat{A}_0$ は積分され、場 $\phi(r, w)$ と $\vec{a}(r, w)$ を更新するのみにになっている。両方の方法でホログラフィック・バリオンに対して同じ計算結果を得られたことを確認した。

Abrikosov ボルテックスを構成するゲージ場と Higgs 場を視覚化するために U(1) ゲージ自由度に対して Landau ゲージをとる、 $\partial_i a_i(r, w) = 0$ 。当然、全エネルギーを含めた主な計算結果はゲージ不変であり、ゲージの選択には依らない。

バリオンでは、場の配位 $\phi(r, w)$ 、 $\vec{a}(r, w)$ は図 4 のようになり、U(1) ゲージ場 $\hat{A}_0(r, w)$ は図 5 のようになった。Higgs 場 $\phi(r, w)$ は明らかに Abrikosov ボルテックスを特徴づけるトポロジカルな構造を示している。これは Witten Ansatz によりインスタントンに写され [43]、物理的にはホログラフィック QCD におけるバリオンを表している [18, 44]。式 (5.42) から分かるように $\hat{A}_0$ は図 6 でのトポロジカル密度 ρ_B が値を持っている領域に集中していることが分かる。

定量的には始めの 't Hooft 解とは異なり、図 4 はホログラフィック QCD の基底状態のバリオン解として r 方向と w 方向の対称性は示していない。基底状態のバリオンは ϕ と $\vec{a}$ は両方とも 4 次元の球対称な 't Hooft と比較すると w 方向にやや収縮しており、これは先の研究 [18, 44, 45] においてもわかっている。

5.6 ホログラフィック QCD の基底状態のバリオンの性質

ここでは、ホログラフィック QCD における基底状態のバリオンの性質を見る。図 6 は 1+2 次元 Abelian Higgs 理論の Abrikosov vortex 解に対する (r, w) 平面上でのトポロジカル密度 $\rho_B(r, w)$ と全エネルギー密度 $\mathcal{E}(r, w)$ である。両密度は $(r, w) = (0, 0)$ 周辺にピークを持ち、 r, w 方向に広がっている。図 7 はそれらの密度に積分因子の r^2 をかけたもの $4\pi r^2 \rho_B(r, w)$ 、 $4\pi r^2 \mathcal{E}(r, w)$ である。とくに $\tilde{\rho}_B(r, w) \equiv r^2 \rho_B(r, w)$ は式 (5.43) で示したように計算において重要な量である。バリオンのサイズがゼロにならないのは Chern-Simons 項による斥力のためである [17]。

一般にトポロジカル密度を積分するとバリオン数 B になり、バリオンの質量 M_B は全エネルギー密度 $\mathcal{E}(r, w)$ を積分すると得られる：

$$B = \int d^3x dw \rho_B(r, w)$$

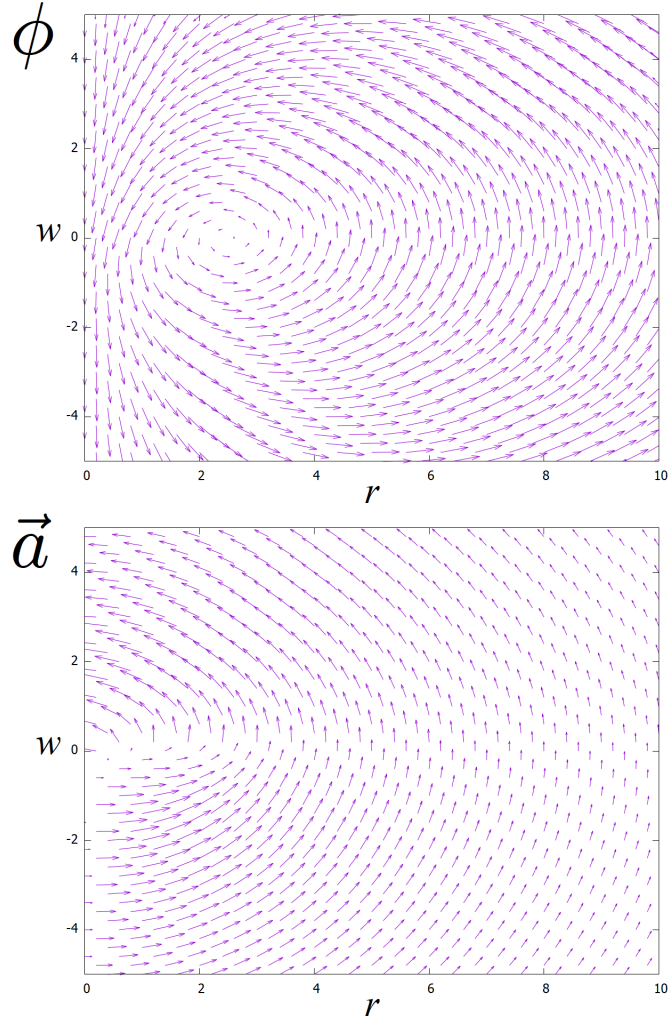


図4 基底状態バリオンに対するボルテックスによる記述：ヒッグス場 $\phi(r, w) = (\text{Re}[\phi], \text{Im}[\phi])$ (上図) とゲージ場 $a(r, w) = (a_1, a_2)$ (下図)、ランダウ・ゲージをとった。ヒッグス場は $(r, w) \simeq (2.4, 0)$ に零点をもっており、零点周りの winding number がバリオン数 $B = 1$ となる。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。([19] より引用)

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dw \rho_B(r, w), \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} M_B &= \int d^3x dw \mathcal{E}(r, w) \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dw \mathcal{E}(r, w). \end{aligned} \quad (5.58)$$

余剰次元の w 方向で積分を行えば通常の3次元空間の密度が得られ、バリオン数密度 $\rho_B(r)$, エネルギー密度

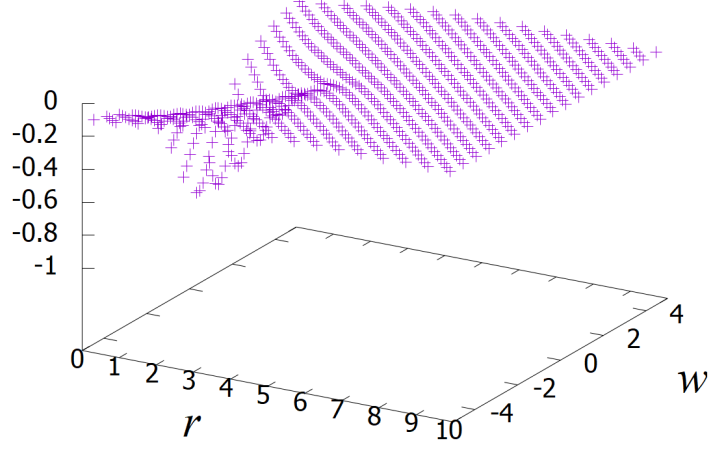


図 5 基底状態のホログラフィック・バリオンにおける U(1) ゲージ場の時間成分 $\hat{A}_0(r, w)$ 。このゲージ場は直接、トポロジカル密度 ρ_B と相互作用し、QED のクーロン力のようにその間に斥力を生む。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。([19] より引用)

$\epsilon(r)$ はそれぞれ

$$\rho_B(r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dw \rho_B(r, w), \quad (5.59)$$

$$\mathcal{E}(r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dw \mathcal{E}(r, w). \quad (5.60)$$

と与えられる。基底状態のバリオンに対する質量 M_B とサイズは

$$M_B = E_{5\text{YM}}^{\text{SU}(2)_f} + E^{\text{U}(1)} = \int d^3x \mathcal{E}(r) \simeq 1.25 M_{\text{KK}} \simeq 1.19 \text{ GeV}, \quad (5.61)$$

バリオンのサイズは平均 2 乗半径で見積もると $\rho_B(r)$ を重みとする場合は

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\rho_B} \equiv \sqrt{\frac{\int d^3x \rho_B(r) r^2}{\int d^3x \rho_B(r)}} \simeq 2.58 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.54 \text{ fm}, \quad (5.62)$$

であり、 $\epsilon(r)$ を重みとする場合は、

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\mathcal{E}} \equiv \sqrt{\frac{\int d^3x \mathcal{E}(r) r^2}{\int d^3x \mathcal{E}(r)}} \simeq 2.93 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.61 \text{ fm} \quad (5.63)$$

と評価される。

ここで 1 つ注意点を挙げる。Appendix 付録 C で示すように Ref. [17] のように 自己双対な BPS 飽和な 't Hooft 解 [48, 49] を使用すると、ホログラフィック・バリオンは質量に対して $M_B^{\text{BPS}} \simeq 1.35 M_{\text{KK}} \simeq 1.28 \text{ GeV}$ と大きく評価し、 $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\rho_B}^{\text{BPS}} \simeq 2.2 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.46 \text{ fm}$ とサイズに関しては小さくなってしまふ。

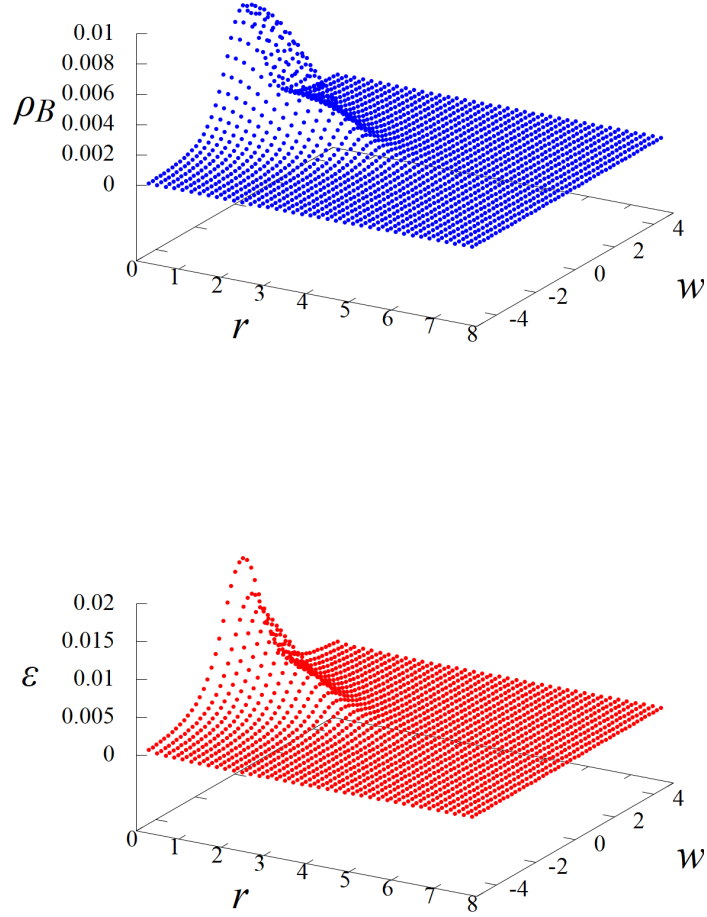


図6 基底状態のバリオン解に対するトポロジカル密度 $\rho_B(r, w)$ (上図) とエネルギー密度 $\mathcal{E}(r, w)$ (下図)。両方とも $(r, w) = (0, 0)$ 付近にピークをもつ。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。([19] より引用)

次に、ホログラフィック QCD における基底状態のバリオンに対するバリオン数密度とエネルギー密度の空間的な分布を調べる。図8はバリオン数密度 $\rho_B(r)$ (トポロジカル密度) とエネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ および、 r^2 をかけたもの、 $4\pi r^2 \rho_B(r)$ と $4\pi r^2 \mathcal{E}(r)$ である。 $\rho_B(r)$ と $\mathcal{E}(r)$ は r が小さい領域では異なる形状していることがわかる。

次に、エネルギー分布について $\text{SU}(2)_f$ 部分と $\text{U}(1)$ 部分をそれぞれ調べる。基底状態のホログラフィックバリオンの質量 (全エネルギー) $M_B = E_{5\text{YM}}^{\text{SU}(2)_f} + E^{\text{U}(1)}$ に対して、

$$E_{5\text{YM}}^{\text{SU}(2)_f} \simeq 1.00 M_{\text{KK}} \simeq 0.95 \text{ GeV}, \quad (5.64)$$

$$E^{\text{U}(1)} \simeq 0.25 M_{\text{KK}} \simeq 0.24 \text{ GeV}, \quad (5.65)$$

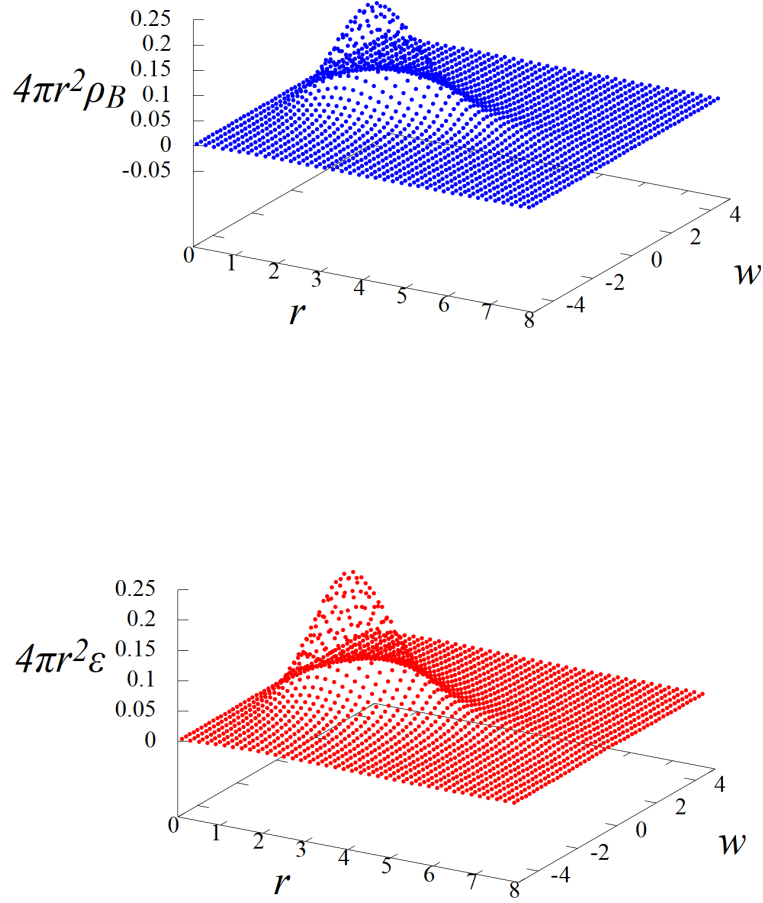


図7 積分因子の r^2 を乗じた場合の基底状態のバリオン解に対するトポロジカル密度 $4\pi r^2 \rho_B(r, w)$ (上図) とエネルギー密度 $4\pi r^2 \mathcal{E}(r, w)$ (下図)。両方とも vortex の中心付近 $(r, w) \simeq (2, 0)$ にピークがある。 $M_{KK} = 1$ 単位系を用いた。([19] より引用)

となり、 $SU(2)_f$ 部分 ($1/\lambda$ 展開の leading order) の寄与は定量的には支配的であるとわかる。

空間的な分布について $SU(2)_f$ 、 $U(1)$ のエネルギー密度は次のように表現される：

$$r^2 \mathcal{E}^{SU(2)_f}(r) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[h(w) |D_1 \phi|^2 + k(w) |D_2 \phi|^2 + \frac{h(w)}{2r^2} \{1 - |\phi|^2\}^2 + \frac{r^2}{2} k(w) f_{12}^2 \right], \quad (5.66)$$

$$\mathcal{E}^{U(1)}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[\frac{1}{2} \hat{A}_0(r, w) K \hat{A}_0(r, w) + \frac{N_c}{2} \rho_B(r, w) \hat{A}_0(r, w) \right]. \quad (5.67)$$

図9 は基底状態のバリオンの $SU(2)_f$ エネルギー密度 $\mathcal{E}^{SU(2)_f}(r)$ と $U(1)$ エネルギー密度 $\mathcal{E}^{U(1)}(r)$ であり、全エネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ とバリオン数密度 $\rho_B(r)$ も載せている。

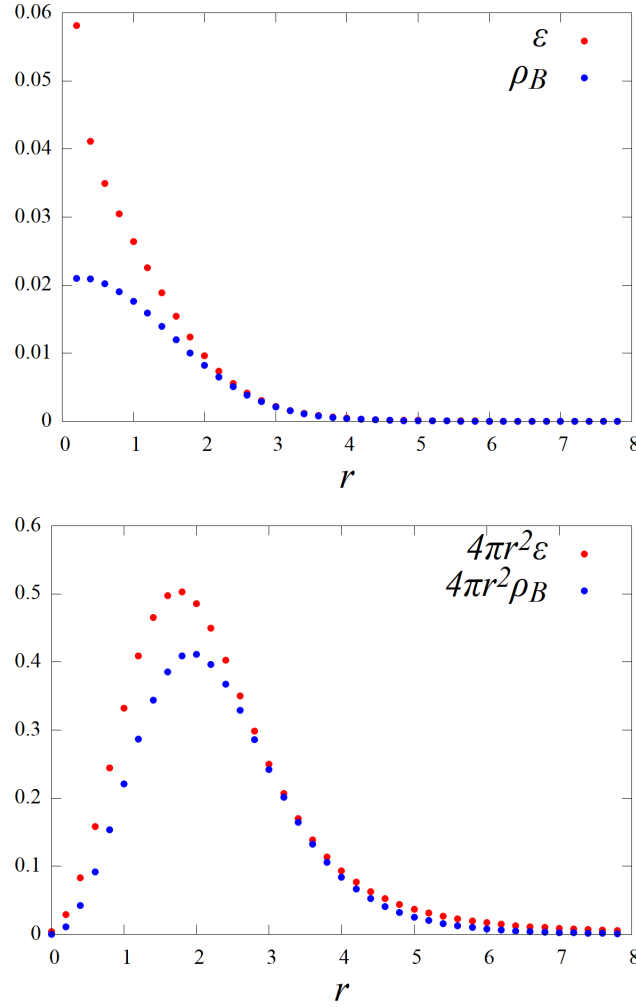


図8 上図：基底状態のバリオンに対するバリオン密度 $\rho_B(r)$ と全エネルギー密度 $\epsilon(r)$ 。下図：積分因子 r^2 を含むもの $4\pi r^2 \rho_B(r)$ と $4\pi r^2 \epsilon(r)$ 。 $\rho_B(r)$ と $\epsilon(r)$ は原点付近で大きく異なっているが、その違いは r^2 の因子により見えなくなっている。([19] より引用)

主要な寄与は $SU(2)_f$ 部分のもので、全エネルギー $\epsilon(r)$ はだいたい $SU(2)_f$ のエネルギーで近似でき、 $1/\lambda$ 展開の予想とも一致する。特に $\epsilon^{SU(2)_f}(r)$ と $\epsilon(r)$ は原点において同じ傾きを持ち、 r が小さい領域で大きくなっているが下の図では r^2 の因子によりそれは見えなくなっている。 $\epsilon^{U(1)}(r)$ は $\rho_B(r)$ と似たような形をしており、CS 項における直接的な結合 (5.40) を反映している。

最後に、ホログラフィック・バリオンについて自己双対性の破れについて調べる。トポロジカル密度とエネルギー密度の異なる形状は背景重力 $h(w)$, $k(w)$ と CS 項の存在することにより生じている。 $h(w) = k(w) = 1$ であり CS 項がない場合、インスタント解は自己双対性 ($F_{MN} = \tilde{F}_{MN}$) を持ち、 $\rho_B(r, w) \propto \epsilon(r, w)$ となる。したがって $\rho_B(r)$ と $\epsilon(r)$ は同じ関数形になる。実際、 $\rho_B(r)$ と $\epsilon(r)$ の形が似ていれば自己双対な傾向を示し、異なっていれば自己双対性は破れていると言える。

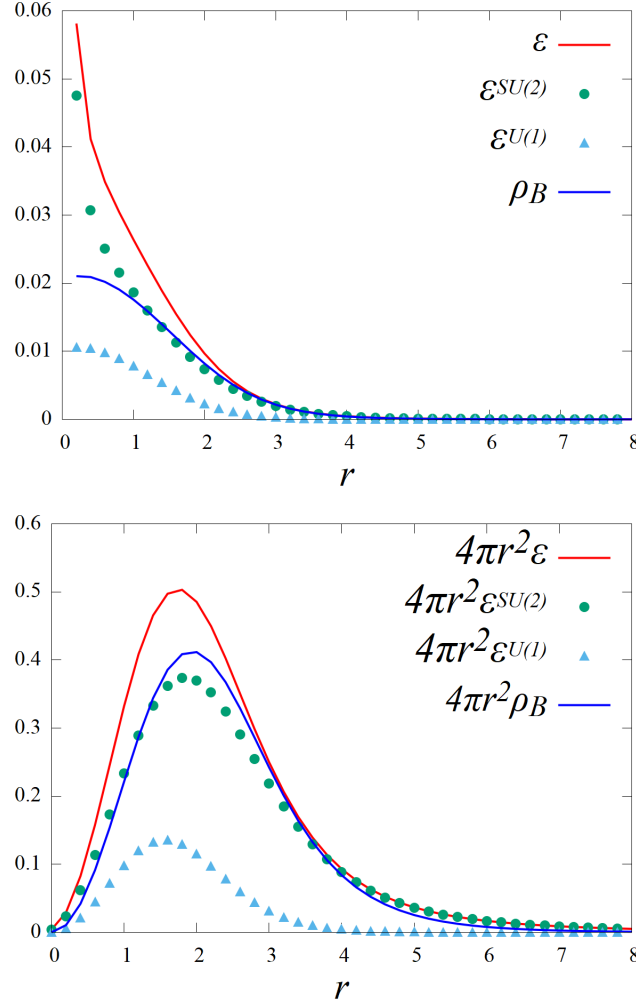


図9 上図は基底状態のバリオンに対する $SU(2)_f$ エネルギー密度 $\mathcal{E}^{SU(2)_f}(r)$ と $U(1)$ エネルギー密度 $\mathcal{E}^{U(1)}(r)$ 、全エネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ とバリオン数密度 $\rho_B(r)$ 。下図は積分因子の r^2 をかけたもの、 $4\pi r^2 \mathcal{E}(r)$ 、 $4\pi r^2 \mathcal{E}^{SU(2)_f}(r)$ 、 $4\pi r^2 \mathcal{E}^{U(1)}(r)$ 、 $4\pi r^2 \rho_B(r)$ 。 ([19] より引用)

バリオン ($B = 1$) の場合、自己双対性の破れを測るパラメータは次のように例えば次のように定義できる：

$$\begin{aligned} \Delta_{DB} &\equiv \frac{\int d^3x dw \operatorname{tr}(F_{MN} F_{MN} - F_{MN} \tilde{F}_{MN})}{\int d^3x dw \operatorname{tr}(F_{MN} \tilde{F}_{MN})} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^3x dw \operatorname{tr}(F_{MN} - \tilde{F}_{MN})^2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

ここではトポロジカルチャージで規格化した。これは非負であり、厳密に self-dual な場合のみ 0 になる。基底状態のバリオンの self-duality の破れは $\Delta_{DB} \simeq 0.17$ であった。これは 0 ではないが大きな値ではなく厳密なホログラフィック QCD の配位がある程度は自己双対に近いことを示している。それゆえに、近似的にはホログラフィック QCD におけるバリオンは自己双対である 't Hooft 解のインスタントンで表せ得る。

6 ホログラフィックバリオンのサイズ依存性

上述したように、Witten Ansatz により 1+4 次元のホログラフィック QCD は 1+2 次元の Abelian Higgs 理論に還元される。さらに、バリオンのトポロジカルな記述はインスタントンからボルテックスに変わる。前章において、ホログラフィック QCD の基底状態のバリオン解を数値計算し、全エネルギーを最小化するようにバリオンのサイズは自動的に決定されることを見た。

ここで、様々なサイズのホログラフィックバリオンを考えてみる。サイズは元々、平坦な時空でのインスタントンのモジュライの一つであり異なるサイズのバリオンはホログラフィック QCD において $h(w) = k(w) = 1$ で CS 項を無視すれば縮退してしまう。実際のホログラフィック QCD では背景重力と CS 項によりサイズはもはやモジュライではなくなる。にもかかわらずホログラフィック・バリオンにおいてはサイズは準モジュライになり、その結果として低エネルギーの励起としてソフトな振動モードで物理的に現れるかもしれない。そこでこの章ではホログラフィック QCD の解として様々なサイズのバリオンを考え、そのエネルギーのサイズ依存性を調べる。

まず、通常の Yang-Mills 理論を考え Witten による最初の Witten Ansatz でのインスタントンとボルテックスのモジュライの関係 [43] を見る。

次に、ホログラフィック・バリオンに移りホログラフィック QCD の解としてどのように任意のサイズのバリオンが得られるかを考え、そのバリオン質量のサイズ依存性を調べる。

6.1 Yang-Mills 理論におけるインスタントンとボルテックスの対応

4 次元のユークリディアンな Yang-Mills 理論においては、トポロジカルな解としてインスタントンが存在する。そこではユークリディアン時間が必要となる。トポロジカル・チャージが 1 のインスタントン解 (BPST-'t Hooft 解 [48, 49]) は次のように書かれる：

$$A_\mu(x) = -\eta_{\mu\nu}^a \tau^a \frac{x^\nu}{(x-X)^2 + R^2}. \quad (6.1)$$

ここでインスタントンの中心位置は $x^\mu = X^\mu$ であり、 R はインスタントン・サイズを表している。カラー自由度に対する回転、位置 X^μ とサイズ R はモジュライであり、これらはこのトポロジカルな解の自由度になっている。つまり、これらの値は Yang-Mills 作用に影響を与えない。 $\eta_{\mu\nu}^a$ は 't Hooft シンボル [49] であり、次のように定義される。

$$\eta_{\mu\nu}^a = -\eta_{\nu\mu}^a = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ -\delta_{a\nu} & \text{for } \mu = 4 \\ \delta_{a\mu} & \text{for } \nu = 4. \end{cases} \quad (6.2)$$

中心位置を $X^\mu = (\vec{0}, T)$ にとると空間 (x, y, z) に対する $SO(3)$ 回転対称性があり、Witten Ansatz が適用できる。その Witten Ansatz により 4 次元の Yang-Mills 理論は 2 次元の Abelian Higgs 理論になり、このインスタントンはボルテックスになる。

インスタントンとボルテックスの間関係を見るために、Witten Ansatz での 't Hooft 解を解析する。こ

これはシングル・インスタントンであり、このように書かれる：

$$A_i^a = \frac{2r}{r^2 + (t-T)^2 + R^2} \epsilon_{iaj} \hat{x}_j - \frac{2(t-T)}{r^2 + (t-T)^2 + R^2} (\delta_{ia} + \hat{x}_i \hat{x}_a), \quad (6.3)$$

$$A_t^a = \frac{2r}{r^2 + (t-T)^2 + R^2} \hat{x}_a. \quad (6.4)$$

式 (5.1) と (5.2) の関数形を比較すると、SU(2) ゲージ場は Abelian Higgs 理論の場に変換されそれらの形は次のようになる：

$$(\phi_1, \phi_2 + 1) = \frac{2r}{r^2 + (t-T)^2 + R^2} (-(t-T), r), \left(\frac{-2r(t-l)}{r^2 + (t-l)^2 + a^2}, -1 + \frac{2r^2}{r^2 + (t-l)^2 + a^2} \right) \quad (6.5)$$

$$a_1 = \frac{-2(t-T)}{r^2 + (t-T)^2 + R^2}, \quad a_2 = \frac{2r}{r^2 + (t-T)^2 + R^2}. \quad (6.6)$$

複素 Higgs 場 $\phi = (\text{Re}\phi, \text{Im}\phi) = (\phi_1, \phi_2)$ は $(r, t) = (R, T) \equiv \zeta$ に零点を持ち、ボルテックス数は (r, t) 平面における Higgs 場 ϕ の零点の数で数えられる。ここでは零点は ζ に存在し、シングルボルテックスを表している。

驚くべきことに Higgs 場の零点 ζ はインスタントンのパラメータと次のような関係がある [43]：

$$\zeta = (\zeta_r, \zeta_t) = (R, T). \quad (6.7)$$

実際、インスタントンのサイズ R とユークリッド化した 4 つの目の中心位置の座標 T は Higgs 場 ϕ の零点 ζ に対応している。この配位ではトポロジカル密度は

$$\rho_B = \frac{6}{\pi^2} \frac{R^4}{[r^2 + (t-T)^2 + R^2]^4}. \quad (6.8)$$

と書かれる。トポロジカル密度は $(r, t) = (0, T)$ に集中しており、その拡がりはいだいたいインスタントンのサイズを反映した R である。

6.2 ホログラフィック QCD におけるさまざまなサイズのバリオンの質量

この節では上記の Witten Ansatz における Higgs 場の零点 ζ とインスタントンのサイズ R の対応 (6.7) によりホログラフィック QCD における Higgs 場 ϕ の零点の位置 ζ を変えることでバリオンのサイズをコントロールしてみる。この新しい観点によってホログラフィック QCD の様々なサイズのバリオンを得られ、そのバリオンのエネルギーのサイズ依存性を調べることができる。

まず、上記の議論により 1+4 次元のホログラフィック QCD を再定式化する上で、通常の Yang-Mills 理論との違いを確認する。1 つに、ホログラフィック QCD には 4 つのユークリッド化された空間 (x, y, z, w) が始めから存在し、ユークリッド化の操作なしに自然にインスタントンを導入することができる。

さらに、背景重力 $h(w)$ と $k(w)$ があり CS 項が存在し、それがホログラフィック QCD のバリオン密度 ρ_B に斥力を生む。これらの効果により、't Hooft 解はもはやホログラフィック QCD の厳密な解ではなく近似的な解となる。

したがって、 $B = 1$ の最初の配位として 't Hooft 解を使い、5 節と同様にトポロジカルな性質を保ったまま数値的な方法でホログラフィック QCD の解を探す。

1+4 次元のホログラフィック QCD においては、最初のトポロジカルな配位として $A_0 = 0$ ゲージのもとで 't Hooft 解 (6.1) を使う。ここでは (x, y, z) -空間回転の対称性と w 方向の反射対称性をリスペクトするよ

うに 4 次元空間におけるインスタントンの中心を原点 $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ におく。初期配位を次のようにする：

$$A_0 = 0, \quad (6.9)$$

$$A_M = -\eta_{MN} \frac{x^N}{x^2 + R^2}. \quad (6.10)$$

これは次のように書き直される：

$$A_i^a = \frac{2r}{r^2 + w^2 + R^2} \epsilon_{iaj} \hat{x}_j - \frac{2w}{r^2 + w^2 + R^2} (\hat{\delta}_{ia} + \hat{x}_i \hat{x}_a), \quad (6.11)$$

$$A_w^a = \frac{2r}{r^2 + w^2 + R^2} \hat{x}_a. \quad (6.12)$$

(x, y, z) 空間の回転対称性が存在する系では Witten Ansatz により、non-Abelian ゲージ場は Higgs 場 ϕ と Abelian ゲージ場 $\vec{a}$ に変換され、次のような形になる：

$$(\phi_1, \phi_2 + 1) = \frac{2r}{r^2 + w^2 + R^2} (-w, r), \quad (6.13)$$

$$a_1 = \frac{-2w}{r^2 + w^2 + R^2}, \quad a_2 = \frac{2r}{r^2 + w^2 + R^2}. \quad (6.14)$$

式 (6.13) では Higgs 場 ϕ の零点 ζ は $\zeta = (\zeta_r, \zeta_w) = (R, 0)$ に置かれており、この ζ_r は初期配位のホログラフィック・バリオンのサイズを決定している。

この初期配位から 5 節と同様に Higgs 場の零点の位置を固定しながら全エネルギー $E[\phi, \vec{a}, \hat{A}_0]$ を最小化することで、ホログラフィック QCD におけるバリオンの解を数値的に計算する。

$$\zeta = (\zeta_r, \zeta_w) = (R, 0). \quad (6.15)$$

ここでは 1 つ目の R はインスタントン/バリオンのサイズに対応する。実際に、様々なサイズのバリオンを考える際にはこのインスタントン/バリオンのサイズと Abrikosov ボルテックス [43] を構成する Higgs 場 ϕ の零点 ζ の関係を用いる。エネルギーの有限性のために Higgs 場は必ず Abrikosov ボルテックスの中心でゼロになり、したがってホログラフィック QCD の $B = 1$ に対応するボルテックスは常に 1 つ零点を持つ。ここでは、零点の位置 $\zeta_r = R$ を変えることはバリオンサイズを変えることに対応する。

まとめると、様々なサイズのバリオン解を得るためにまず境界条件として Higgs 場の零点の位置 $\zeta = (\zeta_r, \zeta_w) = (R, 0)$ を固定し、数値的に全エネルギーを最小にする。全エネルギー $E[\phi, \vec{a}, \hat{A}_0]$ を最小化するような場は境界条件のもとでホログラフィック QCD の運動方程式を満たすようになっている。

(r, w) 平面上での数値計算において、5 節で使ったものと同様の細かく大きい格子を使う。即ち格子間隔は $0.2 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.04 \text{ fm}$ 、格子サイズは $(0 \leq r \leq 250, -125 \leq w \leq 125)$ の物理サイズ $(50 M_{\text{KK}}^{-1})^2 \simeq (10 \text{ fm})^2$ の格子を用いる。

Higgs 場の零点に対する制限下で系のエネルギーが小さくなるように場を反復的に更新し、最終的にバリオンのサイズ R に対応する Higgs 場と Abelian ゲージ場を得る：

$$\phi(r, w; R), \quad \vec{a}(r, w; R), \quad \hat{A}_0(r, w; R). \quad (6.16)$$

ここで零点の存在により $B = 1$ の配位であることが保証されている。なお場は局所的にエネルギー最小になっており、ホログラフィック QCD の運動方程式を満たしている。

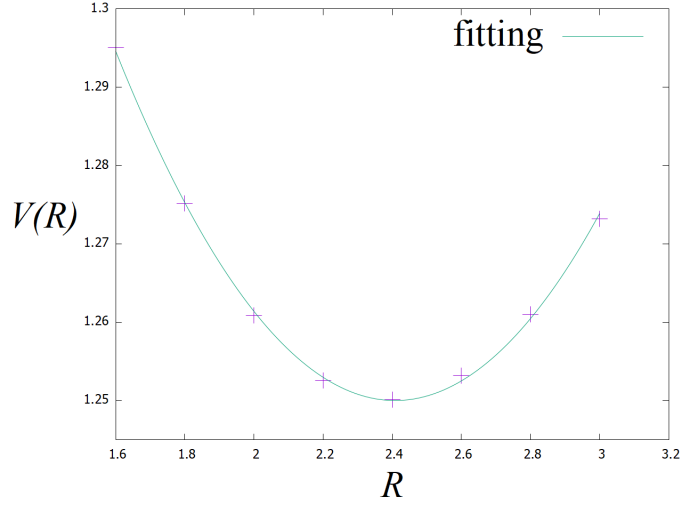


図 10 様々なサイズ R のバリオンの静的なエネルギー $V(R)$ 。シンボルは異なるサイズのバリオンの数値データであり、実線は 2 次曲線によるフィットの計算結果である。 $(M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた) ([19] から引用)

図 10 は様々なサイズのバリオンの静的エネルギー $V(R)$ の計算結果である。ポテンシャルの最小は基底状態に対応している。データは 2 次関数でよく再現できており、図の全ての点がサイズを固定するという制限 (境界条件) の下でのホログラフィック QCD の解になっている。

最適の 2 次関数は

$$V(R) \simeq A(R - R_0)^2 + M_0, \quad (6.17)$$

$$A \simeq 0.063, \quad R_0 \simeq 2.4, \quad M_0 \simeq 1.25,$$

となった ($M_{\text{KK}} = 1$ 単位系)。ポテンシャルの最小値 M_0 の値は前の基底状態のバリオンの質量に対する計算結果である式 (5.61) の $M_B \simeq 1.25 M_{\text{KK}}$ と一致している。

バリオンの静的エネルギー $V(R)$ を最小化するサイズパラメータ $R = R_0$ は $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系で $R_0 \simeq 2.4$ である。この結果は図 4 で見られた Higgs 場の零点 ζ_r が $R = R_0$ のあたりに存在している結果と一致している。もし非自明な重力 $(h(w), k(w))$ と CS 項がなければ、インスタントンサイズは元々モジュライであり (これは Yang-Mills 理論の古典的なスケール不変性を反映している) このサイズ依存性は消えポテンシャル $V(R)$ は平坦になる。実際、このホログラフィック・バリオンの質量のサイズ依存性はそれらの重力の効果と CS 項から発生している。

6.3 ホログラフィックバリオンのサイズの解析

この節では、インスタントンのサイズに対応するサイズパラメータ R による前節で得られた実際のホログラフィックバリオンのサイズ依存性を調べる。

計算の過程でサイズ R を固定する制限によってトポロジカル密度 ρ_B はすでに数値的に得られている：

$$\rho_B = \rho_B(r, w; R). \quad (6.18)$$

このゲージ不変な局所量を利用して r -方向と w -方向に対するホログラフィック・バリオンのサイズを調べる。ここで ρ_B で重み付けした (x, y, z) -回転対称な量 $O(r, w)$ の平均を

$$\langle O \rangle_{\rho_B(R)} \equiv \frac{\int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dw \rho_B(r, w; R) O(r, w)}{\int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dw \rho_B(r, w; R)}, \quad (6.19)$$

と定義する。

通常の 4 次元のユークリッド化した Yang-Mills 理論において、サイズパラメータが R で中心を原点においたインスタントンのポントリャーギン密度 ρ は次のようになる：

$$\rho = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr} \left(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right) = \frac{6}{\pi^2} \frac{R^4}{(x_\mu^2 + R^2)^4}. \quad (6.20)$$

そして ρ で重み付けられた平均自乗半径は

$$\langle r^2 \rangle_\rho = \frac{3}{2} R^2, \quad \langle t^2 \rangle_\rho = \frac{1}{2} R^2 \quad (\text{YM instanton}), \quad (6.21)$$

と計算される。もしくは

$$\sqrt{\frac{2}{3} \langle r^2 \rangle_\rho} = \sqrt{2 \langle t^2 \rangle_\rho} = R \quad (\text{YM instanton}), \quad (6.22)$$

となる。

ホログラフィック・バリオンは Higgs 場の零点の固定により、 r -方向と w -方向のサイズ変化を同時に表すことができ、様々なサイズのバリオンが得られる。上の関係に基づいて r -方向と w -方向のそれぞれに対してホログラフィック・バリオンのサイズパラメータを考える。5 節での式 (5.62) と同様の方法で、トポロジカル密度 ρ_B で重み付けられた半径を r 方向と w 方向に対してそれぞれ

$$d_r(R) \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \langle r^2 \rangle_{\rho_B(R)}}, \quad d_w(R) \equiv \sqrt{2 \langle w^2 \rangle_{\rho_B(R)}}, \quad (6.23)$$

と定義する。インスタントンのサイズパラメータ R と比べると式 (6.22) により $2/3$ と 2 という因子が入ってくる。実際、通常の self-dual な Yang-Mills のインスタントンは $d_r(R) = d_w(R) = R$ を満たす。

図 11 は R の関数としてトポロジカル密度 ρ_B で重みづけられた半径 $d_r(R)$ と $d_w(R)$ を示している。

実線は $d = R$ を表しており、それは通常の 4 次元 YM 理論で $h(w) = k(w) = 1$ かつ CS 項がないときに実現される。つまり、't Hooft 解でホログラフィック・バリオンが記述されるとき、 $d_r(R) = d_w(R) = R$ となる。

図 11 より d_r と d_w は R に対して単調に増加している。この単調増加は Higg 場の零点の変化によりホログラフィック・バリオン (インスタントン) のサイズが変化していることを反映している。

基底状態まわりで $d_r(R)$ の値は $d_w(R)$ より大きく ($d_r(R) > d_w(R)$)、これはホログラフィックバリオンが扁円な形のインスタントンであることを示している [45]。

$d_r(R)$ の傾きは $d_w(R)$ より大きく、 $d_w(R)$ はほとんど R に対して平坦になっている。したがってホログラフィック・バリオンのサイズ変化は 4 次元的なものというよりむしろ近似的に 3 次元的なものとしてみなせる [19]。

CS 項 (5.40) は r 方向、 w 方向に対して等しく作用し、 (x, y, z, w) 空間の $O(4)$ 対称性を壊さないため、これらのそれぞれの方向に対する振る舞いの違いは非自明な重力場 $h(w)$ と $k(w)$ から来ている。実際。もし

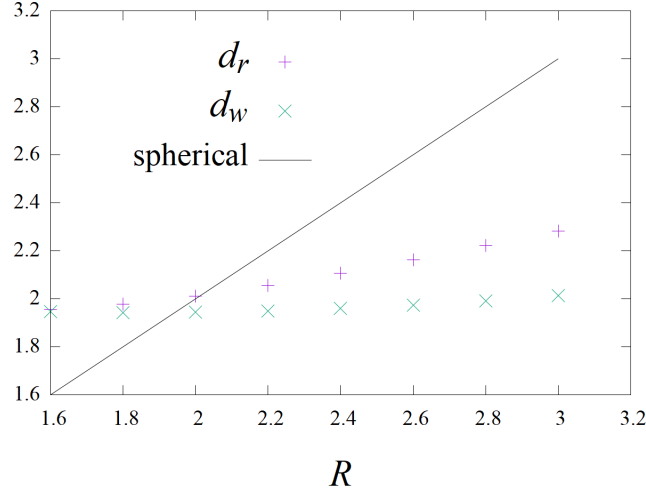


図 11 ρ_B で重み付けをしたサイズパラメータ R に対するホログラフィック・バリオンの半径 $d_r(R)$ 、 $d_w(R)$ 。それぞれ r 方向と w 方向に対応している。実践は $d = R$ で、通常の平坦 ($h(w) = k(w) = 1$) かつ CS 項のない YM 理論ではこのようになる。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。([19] より引用)

$h(w) = k(w) = 1$ であれば $O(4)$ 対称性があり (r, w) の非対称性は現れない。したがって、 $h(w)$ と $k(w)$ は (r, w) 非対称性の起源といえる。

R に対して $d_w(R)$ が平坦であることは重力場 $h(w)$ と $k(w)$ が w 方向の揺れを抑制していることを示している。近似的には、 $d_r(R) \sim d_w(R)$ で $d_r(R)$ は $d_w(R)$ とその緩やかな R 依存性に従っているよう見える。これは球状の形からのズレがエネルギー的に好まれず、その結果 $d_w(R)$ に引きずられる形で $d_r(R)$ の傾きも小さくなっていると考えられる。

元々の Yang-Mills 理論において (反) インスタントンは (反) 自己双対な解として現れる。ホログラフィック QCD においては重力場 ($h(w)$ と $k(w)$) と CS 項の存在により解の自己双対性は顕に破れる。

5 節の基底状態のバリオンと同様に、様々なサイズのホログラフィック・バリオンに対する自己双対性の破れを調べる。図 12 はサイズパラメータ R の関数として式 (5.68) の自己双対性の破れのパラメータ Δ_{DB} を示している。この量 Δ_{DB} は非負であり、厳密に自己双対な場合においてのみゼロになる。

自己双対の破れのパラメータは $R \simeq 2.2$ で最小値 $\Delta_{\text{DB}} \simeq 0.17$ をとり、基底状態のバリオンのサイズ $R_0 \simeq 2.4$ に近い値になっている。この値 $\Delta_{\text{DB}} \simeq 0.17$ は比較的小さいように思われ、自己双対な解の使用が悪くないことを示しているかもしれない。

しかし、ホログラフィック QCD においてこの Δ_{DB} はゼロになることはなく、この事実は次に述べるようにバリオン-バリオン間の相互作用において物理的に重要な意味をもっているかもしれない。

元々の 4 次元 Yang-Mills 理論においてエネルギーは古典的に BPS bound で下限を持ち、配位が自己双対な場合にのみその最小値をとる。しかし、ホログラフィック QCD は非自明な重力と CS 項を持ち自己双対性は歪められる。もし複数のインスタントンが BPS 飽和状態にあれば、その作用はトポロジカル電荷にのみ決定され、インスタントン間には相互作用がなくなる。したがって、ホログラフィック QCD の自己双対性の破れはバリオン-バリオン間相互作用または核力 [50] と関連していると予想される。

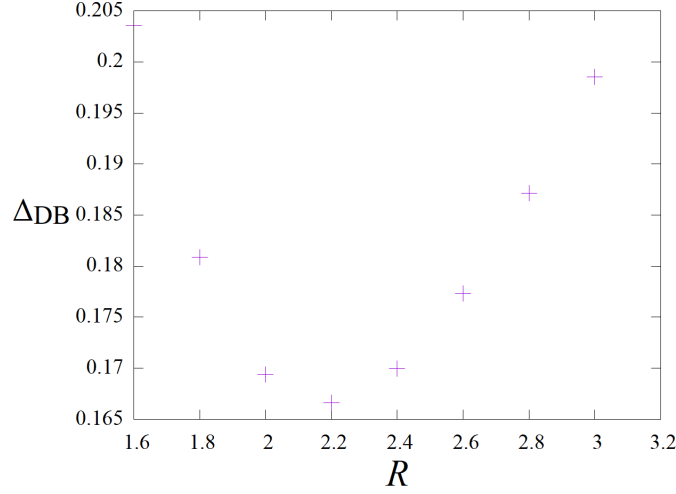


図 12 様々なサイズ R のバリオンに対する自己双対性の破れのパラメータ Δ_{DB} ($M_{\text{KK}}=1$ 単位系)。
 $\Delta_{\text{DB}}(R)$ の関数形は 2 次関数的であり、 $R \simeq 2.2$ で最小値をとっている。([19] より引用)

7 バリオンの dilatation モード

前節ではホログラフィック・バリオンの静的エネルギー $V(R)$ のサイズ依存性を調べ、 R に対して 2 次関数的であることを見た。この章ではこの結果を利用して、ホログラフィック QCD におけるバリオンの時間に依存したサイズの振動モード (dilatation モード) を数値的に調べる

具体的にはホログラフィック QCD においてインスタントンのサイズ R はバリオンのサイズを決定する重要なパラメータであるので、時間に依存したサイズ $R(t)$ を導入することでホログラフィック・バリオンのサイズ振動を調べる：

$$R \rightarrow R(t) = R_0 + \delta R(t). \quad (7.1)$$

ここでは R_0 は基底状態のバリオンのサイズを表し、サイズ $R(t)$ は R_0 まわりを振動していると考えられる。

インスタントンのサイズは元々モジュライであり、Yang-Mills 項のみで平坦な時空 $h(w) = k(w) = 1$ ならばその値はエネルギーに影響を与えず dilatation モードはゼロモードとして現れることになる。実際には、重力の効果 ($h(w)$, $k(w)$) と CS 項がサイズのモジュライ的性質を破る。しかし dilatation モードは基底状態のソフトモードとしてホログラフィック・バリオンに継承され、バリオンのスペクトルに低エネルギーの励起として現れると期待する。

ホログラフィック QCD は余剰次元 w を持ちその方向にもバリオンは広がっているため、この dilatation は通常の (x, y, z) 空間でのサイズの振動とは異なる。この余剰次元方向の dilatation はホログラフィック QCD に特徴的なものである。

サイズ $R(t)$ という変数に対するラグランジアンは調和近似の範囲内で

$$\begin{aligned} L[R] &= \frac{1}{2} m_R \dot{R}^2 - V(R) \\ &\simeq \frac{1}{2} m_R \dot{R}^2 - \frac{1}{2} m_R \omega^2 (R - R_0)^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

と書かれる。すでにポテンシャル項 $V(R)$ は計算しており、前節でだいたい2次関数になっていることを用いた。

ホログラフィック・バリオンの dilatation モードをサイズ $R(t)$ の集団運動として計算する。dilatation モードの振動数 ω を評価するためには質量パラメータ m_R を計算すれば良い。なお m_R はバリオン質量 M_B とは異なるので注意されたい。ここでは場の時間依存性はサイズ $R(t)$ を通してのみであるという断熱近似を用いる。

7.1 数値計算

この節ではバリオンの dilatation モードを考え、背景重力 $h(w)$ と $k(w)$ を保ったままその励起エネルギーを調べる。サイズの振動モードを断熱的に扱う、つまり場の運動はサイズの振動に比べ早いものとする。この断熱近似により場 ϕ 、 a_i の時間依存性はバリオンサイズ $R(t)$ を通してのみ依存する。したがって、場は次のように象徴的に書くことができる：

$$\phi = \phi(r, w; R(t)), \quad a_i = a_i(r, w; R(t)). \quad (7.3)$$

$\hat{A}_0$ の時間微分が存在しないため、サイズ変数 $R(t)$ の運動項の計算において $\hat{A}_0$ の寄与はない。

断熱近似に基づいて、時間微分は R に関する微分に変わる：

$$\frac{d}{dt}O[R(t)] = \dot{R} \frac{d}{dR}O[R]. \quad (7.4)$$

この記述において任意の R に対して $O[R]$ は数値的に計算が可能であり、 R 微分は容易に数値的に得られる：

$$\frac{d}{dR}O[R] \simeq \frac{O[R + \delta R] - O[R]}{\delta R}. \quad (7.5)$$

すでに任意の R に対する場の配位 $\phi(R(t))$ を得ているので $R(t)$ の運動項は

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= 4\pi\kappa \int dt \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[h|\partial_0\phi|^2 + h\frac{r^2}{2}(\partial_0 a_1)^2 + k\frac{r^2}{2}(\partial_0 a_2)^2 \right] \\ &= 4\pi\kappa \int dt \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[h\dot{R}^2|\partial_R\phi|^2 + h\frac{r^2}{2}\dot{R}^2(\partial_R a_1)^2 + k\frac{r^2}{2}\dot{R}^2(\partial_R a_2)^2 \right] \\ &= \int dt \frac{1}{2}m_R\dot{R}^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

と表される。サイズ変数 m_R に対する質量パラメータ m_R は

$$m_R \equiv 8\pi\kappa \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[h|\partial_R\phi|^2 + h\frac{r^2}{2}(\partial_R a_1)^2 + k\frac{r^2}{2}(\partial_R a_2)^2 \right] \quad (7.7)$$

と与えられる。

注意点として、CS 項も時間依存を含むが、1 次のものであるため dilatation モードの運動項に対する寄与はない。数値計算による結果は

$$m_R \simeq 0.34 M_{\text{KK}} \simeq 322 \text{ MeV}. \quad (7.8)$$

となった。この数値計算において重要な点は重力因子 $h(w)$ 、 $k(w)$ を厳密に取り込んでいる点である。

質量 m_R パラメータのこの値とポテンシャル $V(R)$ に対する式 (6.17) のフィットデータをもとに、ホログラフィック・バリオンの dilatation の励起エネルギーは

$$\omega = \sqrt{\frac{2A}{m_R}} \simeq 0.61 M_{\text{KK}} \simeq 577 \text{ MeV} \quad (7.9)$$

という評価を得た。

$1/N_c$ 展開の観点では質量パラメータ $m_R \propto \kappa$ は式 (7.9) より $O(N_c)$ であり、ポテンシャル $V(R)$ も $O(N_c)$ であるため、 $A = O(N_c)$ となる。したがって、dilatation 励起エネルギー $\omega = \sqrt{2A/m_R}$ は $O(N_c^0) = O(1)$ の量であると言える。

Appendix 付録 D において、't Hooft 解のインスタントンを用いた dilatation モードに対するラフな解析的評価を行っている。これによると dilatation による励起エネルギーは 771 MeV と大きく見積もられた。これは $0.816 M_{\text{KK}} \simeq 774 \text{ MeV}$ という先行研究におけるインスタントンサイズに関するモードの値と一致している。

7.2 議論

前節では重力効果 $h(w)$ と $k(w)$ を保ったまま数値的に dilatation 励起エネルギーを計算した。この背景重力はカラーに対する Yang-Mills 理論を表す N_c 枚の D4 ブレーンからもたらされたものであり、物理的に重要なものである。したがってこの効果 ($h(w)$ と $k(w)$) を無視することはできない。これら背景重力の効果を取り込んで評価した結果、最終的に得られたホログラフィック・バリオンの dilatation 励起のエネルギーは 577 MeV となった。

この回転対象な dilatation はフレーバーや回転に関する量子数を変えないため、dilatation モードは基底状態と同じ量子数をもって励起状態として現れる。

スキルミオンと同様に、 N や Δ といった定まったスピン・アイソスピンの状態の記述のために、断熱的な回転による半古典的な量子化がよく行われる [17]。このスピン・アイソスピンについての量子化の過程によりバリオンの質量 $O(N_c)$ に対して $O(1/N_c)$ 補正が加わる [17]。

$1/N_c$ 展開の観点から、dilatation の励起エネルギーは前述のように $O(N_c^0)$ であり、 $O(1/N_c)$ の回転効果に比べより重要であるため、今回は回転効果による補正は無視している。

図 13 は $1/N_c$ 展開のオーダーごとのバリオンの質量の分岐の図である。リーディングオーダー $O(N_c)$ ではすべてのホログラフィック・バリオンは縮退している。 $O(N_c^0)$ まででは dilatation モードによる質量の分岐が現れる。 $O(N_c^{-1})$ まででは回転の効果により N - Δ の質量の分岐が起きる。結果として、 $1/N_c$ 展開において低励起のバリオンの質量はオーダーとして $N < \Delta < N^* < \Delta^*$ となる。この予測は、実際の実験データと符合している。

ホログラフィック QCD において dilatation 励起は基底状態のバリオンの第一励起として現れると思われ、正パリティといった同じ量子数を持つ。定性的な性質に加えて dilatation 励起エネルギーは 577 MeV と評価された。これらの量子数と励起エネルギーの結果より、核子 $N(940)$ に対するこの dilatation モードは正パリティで $N(940)$ の第一励起状態であるローパー共鳴状態 $N^*(1440)$ と同定される。 $\Delta(1232)$ に関しても、 $\Delta(1600)$ がその dilatation 励起に対応すると思われる。

興味深い可能性として、拡がりをもったソリトンは一般にこのような dilatation モードを持つため、同様の dilatation 励起は全てのバリオンに対して普遍的に現れる現象として存在する。

ストレンジバリオンの質量はやや大きく、ストレンジクォークの質量を反映しているが、 $SU(3)_f$ のフレー

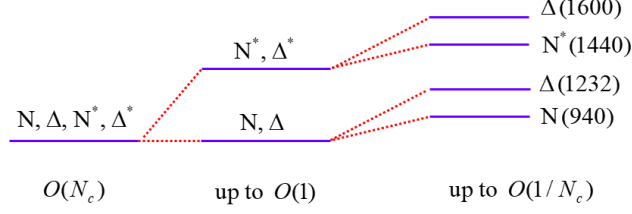


図 13 $1/N_c$ 展開におけるホログラフィック・バリオンの質量が分岐する様子を描いた図。シンボル * は励起モードを表す。ホログラフィックバリオンは dilatation と回転の効果で、それぞれ $O(N_c^0)$ と $O(N_c^{-1})$ の質量の分裂が現れる。したがって低励起のバリオン質量は $1/N_c$ 展開の元では $N < \Delta < N^* < \Delta^*$ という順番になると思われる。

バー対称性は近似的に保ちうる。ここでは、 $SU(3)_f$ 対称性とその破れに対する通常のハドロン物理における扱いのように [51]、ストレンジクォークの質量がホログラフィック・バリオンに加算されると仮定する。すると、ストレンジバリオンにおいても dilatation モードは現れ、その励起エネルギーは上の結果、577 MeV と同様の値になると予想される。

表 2 は N、 Δ 、 Λ 、 Σ 、 Σ^* といった様々なバリオンチャンネルの dilatation 励起の候補を示している。

baryon	excited baryon	excitation energy	theory
N(940)	N*(1440)	500 MeV	ω
	N*(1710)	770 MeV	2ω
$\Delta(1232)$	$\Delta(1600)$	368 MeV	ω
	$\Delta(1920)$	688 MeV	2ω
$\Lambda(1116)$	$\Lambda(1600)$	484 MeV	ω
$\Sigma(1193)$	$\Sigma(1660)$	467 MeV	ω
$\Sigma^*(1385)$	$\Sigma^*(1780)$	395 MeV	ω

表 2 様々なバリオンに対する dilatation 励起のモードの実験的な候補 [52]。各基底状態のバリオンは同じ量子数の励起を持っている。主に N*(1440) や $\Delta(1600)$ などの第一励起状態についてあげている。各チャンネルで励起エネルギーは理論的な値 $\omega \simeq 577$ MeV と同じような値をとっている。N*(1710) と $\Delta(1920)$ は第二励起状態に対応すると思われる。([19] から引用)

同じ量子数の各チャンネルに対して、第一励起状態の励起エネルギーは理論的に得られた dilatation モードの値、 $\omega \simeq 577$ MeV、と似たような値をとっているように見える。

Ξ 、 Ξ^* 、 Ω などのマルチストレンジバリオンについてもおよそ 577 MeV の励起エネルギーを持った dilatation モードを予測する。しかし、それらに対応する dilatation モード $\Xi(1320)$ 、 $\Xi^*(1530)$ 、 $\Omega(1673)$ はスピン・アイソスピンの情報が未確認のため実験的には観測されていない。バリオンの dilatation モードという励起のためにさらなる実験的な解析が望まれる。

8 まとめ・結論

この論文ではホログラフィック QCD におけるバリオンの dilatation モードを超弦理論における N_c 枚の D4 ブレーンと N_f 枚の D8/ $\bar{D}8$ ブレーンで構成された酒井・杉本モデルを用いて研究した。回転対称な系に対し Witten Ansatz を適用し、系を 1+4 次元の非可換ゲージ理論から曲がった空間上での 1+2 次元の Abelian Higgs 理論に還元した。この形式においてバリオンに対応する 4 次元のトポロジカル・オブジェクトであるインスタントンは 2 次元のボルテックスに変わる。我々は、細かく大きな格子 (格子間隔: 0.04 fm, サイズ: 10 fm) を用いホログラフィック QCD のバリオン解を数値的に計算した。

Witten Ansatz により 2 つのトポロジカルオブジェクト間の関係が得られる。この関係を用いホログラフィック・バリオンのサイズを理論的に変え、エネルギーや自己双対性といった特性をサイズパラメータの関数として調べた。各配位は Higgs 場の零点を固定するという境界条件のもとでのホログラフィック QCD の運動方程式の解となっている。

時間に依存したモードとしてバリオンのサイズ振動モード (dilatation モード) を調べ、その励起エネルギーが 577 MeV であることがわかった。dilatation により量子数は変化しないため、核子 N(940) に対するこのモードは $N^*(1440)$ と同定した。さらにどのバリオンにおいても同様の dilatation 励起が普遍的に存在し、同じような励起エネルギーを持つと予想した。

この研究を深める次の段階としてはバリオンのスペクトルに対する理解を得るためにスキルミオンの半古典的な解析においてよく使われている [53] ようなヘッジホッグ配位に回転の効果を取り入れるというものがある。量子化することでスピン、アイソスピンの定まった状態に射影され核子に対する物理量を調べることができる [17]。この効果のオーダーは dilatation 励起に対して相対的に $1/N_c$ であり、今回は高次のものとして無視した。しかし、 $N - \Delta$ スプリットिंगにとって必要なものであるためさらなる解析として高次の補正も望まれる。

他にもストレンジ物理は J-PARC など近年実験的にも精力的に研究されており、ストレンジネスを含んだバリオンの研究は興味深い。我々はカイラル極限での $N_f = 2$ のホログラフィック QCD に基づいて研究を行った。 $N_f = 3$ の場合 [54] のように、ストレンジネスを含めたさらなる拡張はハドロン物理において興味深い対象である。ハイペロンの定量的な議論にはより進んだ理論的な発展が必要である。

今回の研究ではバリオンの dilatation モードの励起エネルギーを示したが、このモード特有の性質が見つかっていない。そのため他の励起から dilatation モードを実験的に見分ける方法を示す理論的な発展が望まれる。実験的にも各バリオンにおける dilatation モードの観点からのさらなる解析がバリオンの励起に対して望まれ、特に、 $\Xi(1320)$ と $\Xi^*(1530)$ 、 $\Omega(1673)$ に関してはその励起状態に対するスピン・パリティの情報未確認のため、dilatation 励起に対応するバリオンの実験的な観測がまだない。どんな物理量を見ればこのような dilatation モードをとらえることができるのか、それに対する理論方面から提案は今後の課題であり、そのようなものが見つかればバリオン・スペクトルに対するより深い理解につながるだろう。

謝辞

私の指導教員である菅沼秀夫准教授に深く感謝します。先生とは学部生の頃から付き合いがあり、多くのことを教授していただき、議論し、共同研究をさせていただきました。多忙な状況でもしっかり時間をとって私との研究に付き合ってくださいました、ありがとうございます。

また、基研を含む京都大学の核理論グループのメンバーに対しても感謝します。研究に対する議論・助言等、非常にありがたいものでした。

最後に私生活の面からも私を支えてくれた家族に感謝します。

付録 A ホログラフィック QCD の格子上での定式化

付録 A では、小さい格子間隔 a の有限格子を用いてホログラフィック QCD の Witten Ansatz を定式化する。まず Witten Ansatz における Yang-Mills 項の静的エネルギー E_{YM} から始める。説明のために式 Eq. (5.31) を繰り返す：

$$E_{\text{YM}} = 4\pi\kappa \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \left[h(w)|D_1\phi|^2 + k(w)|D_2\phi|^2 + \frac{h(w)}{2r^2} \{1 - |\phi|^2\}^2 + \frac{r^2}{2} k(w) f_{12}^2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

ここで場の変数 ϕ 、 a_μ は 2 次元空間座標 (r, w) に依っている。

U(1) ゲージ場の変数 a_μ ($\mu = r, w$) を記述するために、2 次元格子上 $s = (s_r, s_w)$ でのリンク変数

$$U_\mu(s) \equiv \exp\{ia_\mu(s + \frac{\hat{\mu}}{2})\} \in \text{U}(1) \quad (\text{A.2})$$

を定義する。ここで $\hat{\mu}$ は長さ a の μ 方向ベクトルを表す。

小さい格子間隔 a の格子では U(1) の共変微分 $D_\mu\phi$ は

$$\begin{aligned} & -\{\phi^\dagger(s)U_\mu(s)\phi(s+\hat{\mu}) + \phi^\dagger(s+\hat{\mu})U_\mu(s)^\dagger\phi(s)\} + |\phi(s)|^2 + |\phi(s+\hat{\mu})|^2 \\ & = -(\phi - \frac{a}{2}\partial_\mu\phi)^\dagger(1 + iaa_\mu - \frac{1}{2}a^2a_\mu^2)(\phi + \frac{a}{2}\partial_\mu\phi) - (\phi + \frac{a}{2}\partial_\mu\phi)^\dagger(1 - iaa_\mu - \frac{1}{2}a^2a_\mu^2)(\phi - \frac{a}{2}\partial_\mu\phi) \\ & + 2|\phi|^2 + \frac{a^2}{2}|\partial_\mu\phi|^2 + \mathcal{O}(a^3) \\ & = a^2\phi^\dagger(\overleftarrow{\partial}_\mu - ia_\mu)(\partial_\mu + ia_\mu)\phi + \mathcal{O}(a^3) \\ & = a^2|D_\mu\phi|^2 + \mathcal{O}(a^3), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで省略された引数は全て $s + \hat{\mu}/2$ である。field strength f_{12} は U(1) プラケットで

$$\square_{12}(s) \equiv U_1(s)U_2(s+\hat{1})U_1^*(s+\hat{2})U_2^*(s) \in \text{U}(1) \quad (\text{A.4})$$

$$f_{12}^2(s) = \frac{1}{a^2}[1 - \text{Re}\{\square_{12}(s)\}]. \quad (\text{A.5})$$

と表される。

式 (5.43) のもともとの U(1) エネルギー $E^{\text{U}(1)}$ は U(1) ゲージ場 $\hat{A}_0$ とトポロジカル密度 ρ_B の結合で表している。ここでゲージ場の時間成分 $\hat{A}_0(r, w)$ は (r, w) 格子上のサイト変数として扱っている。格子状ではトポロジカル密度 (バリオン数密度) は

$$\begin{aligned} \rho_B & = \frac{1}{8\pi^2 r^2} [-i\epsilon_{ij}(D_i\phi)^* D_j\phi + \epsilon_{ij}\partial_i a_j (1 - |\phi|^2)] \\ & = \frac{1}{8\pi^2 r^2} [2\text{Im}\{(D_1\phi)^* D_2\phi\} + f_{12}(1 - |\phi|^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

であり

$$f_{12}(1 - |\phi|^2) = \frac{1}{a^2} \text{Im } \square_{12} \times (1 - |\phi|^2) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} (D_1\phi)^* D_2\phi &= \frac{1}{4a^2} \{U_1^*(s)\phi^*(s+\hat{1}) - U_1(s-\hat{1})\phi^*(s-\hat{1})\} \times \{U_2(s)\phi(s+\hat{2}) - U_2^*(s-\hat{2})\phi(s-\hat{2})\} \\ &= \frac{1}{4a^2} \{ \phi^*(s+\hat{1})U_1^*(s)U_2(s)\phi(s+\hat{2}) - \phi^*(s-\hat{1})U_1(s-\hat{1})U_2(s)\phi(s+\hat{2}) \\ &\quad - \phi^*(s+\hat{1})U_1^*(s)U_2^*(s-\hat{2})\phi(s-\hat{2}) + \phi^*(s-\hat{1})U_1(s-\hat{1})U_2^*(s-\hat{2})\phi(s-\hat{2}) \} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と格子状で定式化できる。離散化誤差を減らすために上のような $(D_1\phi)^* D_2\phi$ を使っており、格子による定式化では象徴的に

$$4a^2(D_1\phi)^* D_2\phi = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (\text{A.9})$$

と表される。水平方向、垂直方向の矢印はそれぞれ U_1 と U_2 を表しておりドットは ϕ を表す。したがってトポロジカル密度 $\rho_B(r, w)$ が定義され、式 (5.43) の $U(1)$ エネルギー $E^{U(1)}[\rho_B(r, w), \hat{A}_0(r, w)]$ は (r, w) 格子上で書かれる。

このようにしてホログラフィック QCD の全エネルギー E は $E[\phi(s), \vec{U}(s), \hat{A}_0(s)]$ 、つまり空間サイト $s = (s_r, s_w)$ の関数 $\phi(s) = \phi_1(s) + i\phi_2(s) \in \mathbf{C}$, $\vec{U}(s) \equiv (U_1(s), U_2(s))$, $\hat{A}_0(s)$ で表される。ホログラフィック QCD の解を見つけるために $\phi(s)$, $\vec{U}(s)$, $\hat{A}_0(s)$ を次のように繰り返し更新し全エネルギー E を最小化する。ある 1 つのサイト s_0 に対して 1 つの変数 $\phi(s_0)$ のみを考え他の変数は固定する。 $\phi(s_0)$ の変分をとり、そこでの全エネルギー E を最小化する。これを $\vec{U}(s_0)$, $\hat{A}_0(s_0)$ に対してもそれぞれ行い、全エネルギー E を最小化する。格子状の各サイトにおいて上のプロセスを行い $\phi(s)$, $\vec{U}(s)$, $\hat{A}_0(s)$ を全てアップデートする。このスイープ操作を何回も繰り返すことで全エネルギーは全体において最小化され、ホログラフィック QCD の解を得られる。

付録 B $U(1)$ 部分のエネルギーの別の表現

$U(1)$ セクターでは $E^{U(1)}$ の数値計算のために主に式 (5.43) を用いた。しかし、 $\hat{A}_0$ を用いない $U(1)$ セクターのエネルギーの表現も存在し、付録 B ではこの形式を取り上げる。

式 (5.42) を使って $\hat{A}_0$ を解くと $U(1)$ 部分のエネルギーは

$$\begin{aligned} E^{U(1)} &= \frac{N_c^2}{8} \int d^3x dw \rho_B K^{-1} \rho_B \\ &= \frac{N_c^2}{8} \int d^3x dw \int d^3x' dw' \rho_B(\vec{x}, w) K^{-1}(\vec{x}, w; \vec{x}', w') \rho_B(\vec{x}', w') \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

となる。

カーネル K とトポロジカル密度 ρ_B は $SO(3)$ の回転対称性があり、エネルギー $E^{U(1)}$ は (r, w) 座標のみで表される：

$$E^{U(1)} = 2\pi^2 N_c^2 \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dw \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dw' \tilde{\rho}_B(r, w) \tilde{K}^{-1}(r, w; r', w') \tilde{\rho}_B(r', w'). \quad (\text{B.2})$$

ここでは $\tilde{\rho}_B(r, w) \equiv r^2 \rho_B(r, w)$ とし、 (r, w) 空間のエルミートのカーネル $\tilde{K} \equiv 4\pi r^2 K$ を使っている。

格子状で式 (5.44) のカーネル $\tilde{K}$ は異なる形式になり行列 $\tilde{K}_L(r, w; r', w')$ で表される。そこでカーネルの逆 $\tilde{K}_L^{-1}(r, w; r', w')$ はカーネル $\tilde{K}_L(r, w; r', w')$ の逆行列として数値的に得られる。技術的な問題としてカーネル $\tilde{K}_L(r, w; r', w')$ は並進に対するゼロモードを持つ。この並進のゼロモードはエネルギーに寄与しないため、ゼロモードを除いた空間において逆を取らなければならない。実際には直行列 O を使いカーネル $\tilde{K}_L$ は

$$\tilde{K}_L = O \operatorname{diag}(0, \lambda_1, \lambda_2, \dots) O^T \quad (\text{B.3})$$

と対角化される。逆行列 $\tilde{K}_L^{-1}$ を

$$\tilde{K}_L^{-1} = O \operatorname{diag}(0, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots) O^T, \quad (\text{B.4})$$

と定義する。これは並進のゼロモードを取り除くことに対応している。この逆カーネル $\tilde{K}_L^{-1}$ とバリオン数密度 ρ_B を用い CS 項のエネルギー $E^{U(1)}$ は格子状で $\rho_B \tilde{K}_L^{-1} \rho_B$ と計算される。

したがって、 $E_{U(1)}$ の数値計算において 2 つの異なる方法が存在する。一方は、式 (5.43) により格子状の場合 $\phi(r, w)$ 、 $\vec{a}(r, w)$ 、 $\hat{A}_0(r, w)$ をアップデートするもので、他方は式 (B.2) に従い $\phi(r, w)$ と $\vec{a}(r, w)$ をアップデートする方法である。我々はホログラフィック・バリオンにおいて両方の方法で同じ結果を与えることを数値計算により確認した。

付録 C 自己双対な BPS インスタントンを用いたホログラフィック・バリオン

付録 C では式 (6.10) の自己双対な BPS インスタントンを用いたときのホログラフィック・バリオンを調べる。自己双対な BPS インスタントンは通常の Yang-Mills 理論の 't Hooft 解であり、厳密には平坦な時空 $h(w) = k(w) = 1$ で CS 項を無視した場合のみに正当化される。サイズ R の BPS インスタントンを CS 項と背景重力 $h(w), k(w)$ を含めた式 (5.50) の全エネルギーに代入すると、インスタントンサイズ R の関数として静的エネルギー $E(R) = V^{\text{BPS}}(R)$ を得られる。その最小値が近似的なホログラフィック・バリオンの基底状態を与え、 $M_B^{\text{BPS}} \simeq 1.35 M_{\text{KK}} \simeq 1.28 \text{ GeV}$ 、 $\sqrt{\langle r^2 \rangle_{\rho_B}^{\text{BPS}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} R_0^{\text{BPS}} \simeq 2.2 M_{\text{KK}}^{-1} \simeq 0.46 \text{ fm}$ となる (図 17)。したがって自己双対な BPS インスタントンを使うと基底状態のホログラフィック・バリオンの質量は 5 章で得られた実際の数値解よりも大きくなりサイズは小さくなる [17]。

近似的なホログラフィック・バリオンの基底状態では、対応する Higgs 場 ϕ とゲージ場 $\vec{a}$ は図 14 のようになる。これらの場合はトポロジカル密度 ρ_B を与え、それを含んだ運動方程式 (5.42) を解くことで $\hat{A}_0$ を得られる (図 15)。図 16 は r^2 をかけたトポロジカル密度とエネルギー密度である。

BPS 配位の静的エネルギー $V^{\text{BPS}}(R)$ は図 17 のようになり、近似的に 2 次関数で表される：

$$V^{\text{BPS}}(R) \simeq A^{\text{BPS}}(R - R_0^{\text{BPS}})^2 + M^{\text{BPS}}, \quad (\text{C.1})$$

$$A^{\text{BPS}} \simeq 0.39, R_0^{\text{BPS}} \simeq 1.8, M_0^{\text{BPS}} \simeq 1.4. \quad (\text{C.2})$$

ここでは $M_{\text{KK}} = 1$ 単位を使っている。

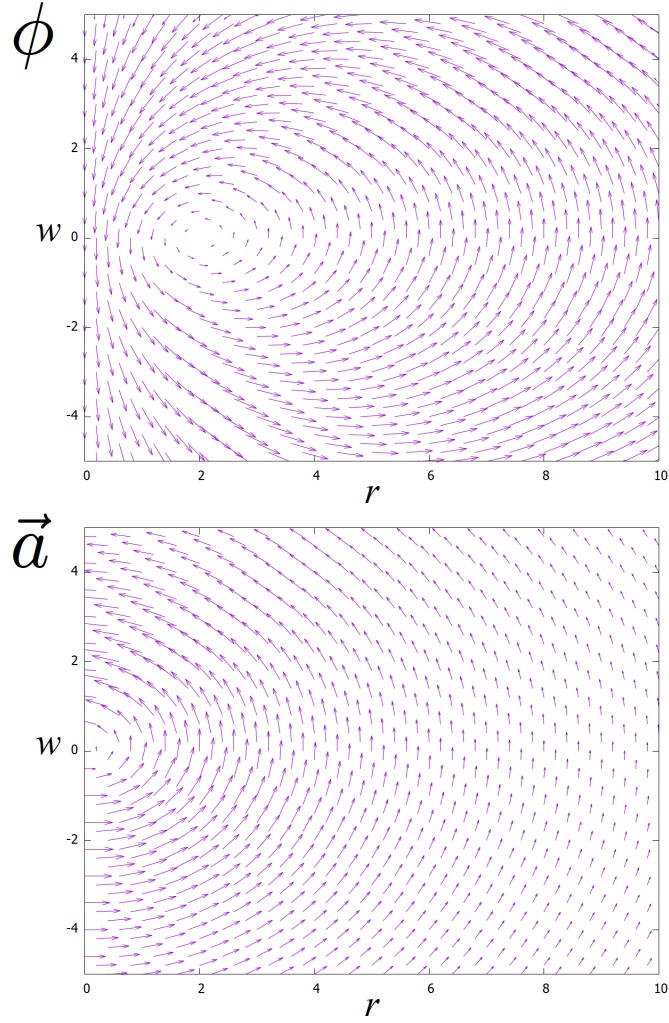


図 14 BPS インスタントンの場合のランダウ・ゲージでの Higgs 場 $\phi(r, w)$ (上) とアーベリアン・ゲージ場 $a(r, w) = (a_1, a_2)$ (下)。5 章などでの数値計算ではこの配位を初期配位として計算する。([19] より引用)

付録 D 自己双対な BPS インスタントンを使った dilatation モードの大まかな解析的な評価

付録 D では自己双対な 't Hooft の BPS インスタントンを用いた dilatation モードの大まかな解析的な評価を考える。

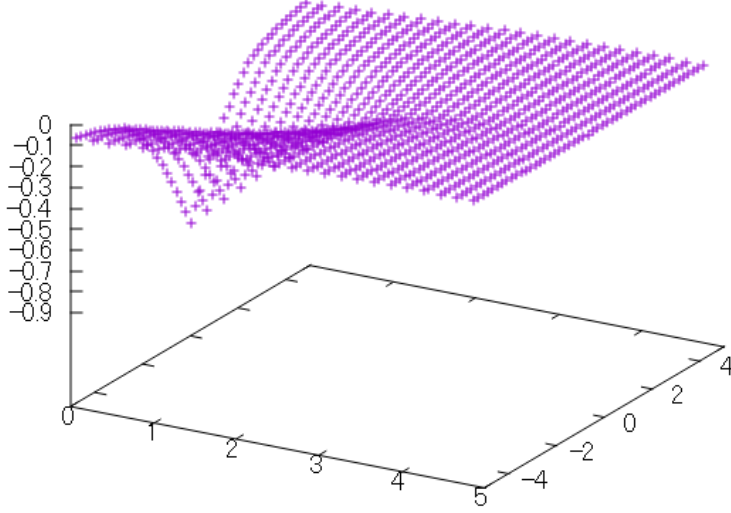


図 15 BPS インスタントンの場合の U(1) ゲージ場 $\hat{A}_0$ 。これは自己双対な 't Hooft インスタントンから式 (5.42) を解いて得られる。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。([19] から引用)

この場合は平坦な空間 $h(w) = k(w) = 1$ の近似をすると、サイズ変数 $R(t)$ に対する運動項 T は解析的に

$$\begin{aligned} T &\simeq \kappa \int d^3x dw \text{tr} [F_{0M}^2] \simeq \kappa \int d^3x dw \frac{24x^2}{(x^2 + R_0^2)^4} R_0^2 \dot{R}^2 \\ &= 48\pi^2 \kappa \int dr \frac{r^5}{(r^2 + R_0^2)^4} R_0^2 \dot{R}^2 = 8\pi^2 \kappa \dot{R}^2 = \frac{1}{2} m_R \dot{R}^2, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

と表される。 $\dot{R}$ は $\partial_t R$ を表し、1 行目で $h(w) = k(w) = 1$ の近似を用いた。計算の途中で現れるインスタントンサイズ R_0 は結果に影響しない。このようにサイズ変数に対する質量パラメータ m_R は評価され

$$m_R = 16\pi^2 \kappa \simeq 1.18, \quad (\text{D.2})$$

という値になる。

この質量パラメータ m_R と式 (C.1) のポテンシャル $V^{\text{BPS}}(R)$ から、dilatation モードの励起エネルギーの大まかな評価ができ

$$\omega = \sqrt{\frac{2A^{\text{BPS}}}{m_R}} = 0.81 M_{\text{KK}} \simeq 771 \text{ MeV}, \quad (\text{D.3})$$

となる。これは 7 章の数値計算による結果と比べると大きな値のように思われる。この評価は解析的に行われるが BPS インスタントンを使用しており、運動項とポテンシャル項の両方に背景重力 $h(w)$ と $k(w)$ の効果が十分に入っていない。そのため定量的にはこれらの効果を正しく取り込み 7 節のように数値的な計算を行った。

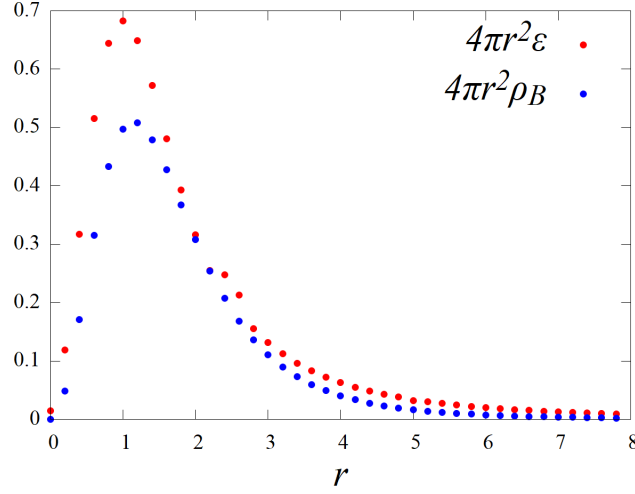


図 16 BPS インスタントンの場合の r^2 をかけたトポロジカル密度 $4\pi r^2 \rho_B(r)$ とエネルギー密度 $4\pi r^2 \mathcal{E}(r)$ 。 $M_{\text{KK}} = 1$ 単位系を用いた。 ([19] から引用)

References

- [1] E. Witten, Anti-de Sitter space and holography, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253–291 (1998); Anti-de Sitter space, thermal phase transition and confinement in gauge theories, *ibid.* **2**, 505–532 (1998).
- [2] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, and D. J. Winters, Towards a holographic dual of large- N_c QCD, *JHEP* **05**, 041 (2004).
- [3] T. Sakai and S. Sugimoto, Low energy hadron physics in holographic QCD, *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843–882 (2005); More on a holographic dual of QCD, *ibid.* **114**, 1083–1118 (2005).
- [4] J. Polchinski, Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724–4727 (1995); *String Theory* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1998).
- [5] J. M. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231–252 (1998).
- [6] Y. Nambu, *Duality and hadrodynamics* (Notes prepared for the Copenhagen High Energy Symposium, 1970).
- [7] T. Goto, Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1560 (1971).
- [8] A. M. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, *Phys. Lett.* **B103**, 207 (1981).
- [9] A. Karch and E. Katz, Adding flavor to AdS/CFT, *JHEP* **06**, 2002 (043).
- [10] J. Erlich, E. Katz, D. Son, and M. Stephanov, QCD and a Holographic Model of Hadrons, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 261602 (2005).
- [11] I. Zahed and G. Brown, The Skyrme model, *Phys. Rept.* **142**, 1 (1996).

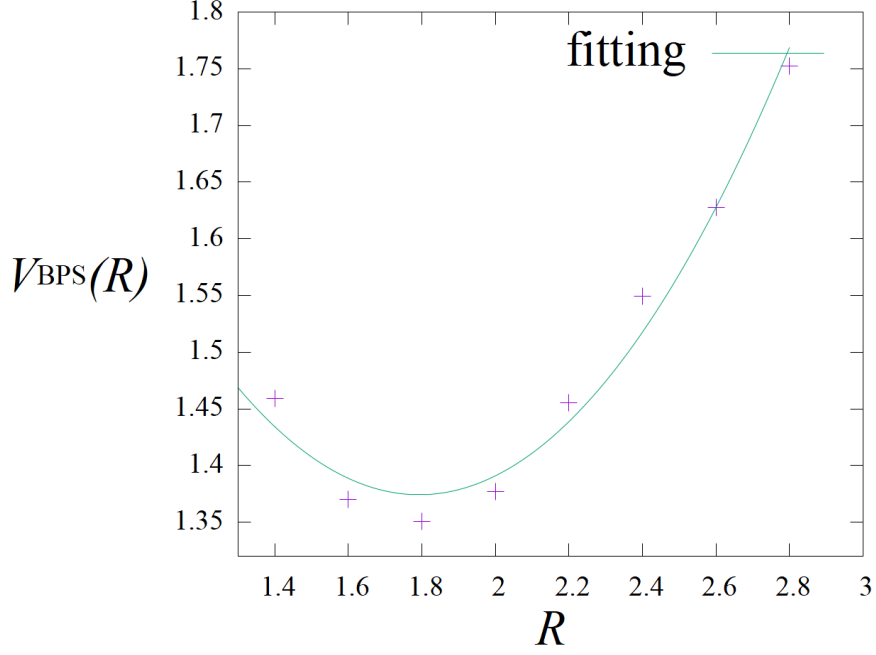


図 17 式 (6.10) の BPS 配位を用いた静的なバリオンエネルギー $V^{\text{BPS}}(R)$ 。実線は 2 次関数による最適フィット曲線である。([19] から引用)

- [12] T. Skyrme, A nonlinear field theory, Proc. Roy. Soc. A **260**, 127–138 (1961); A unified field theory of mesons and baryons, Nucl. Phys. **31**, 556–569 (1962).
- [13] E. Witten, Baryons in the $1/N$ expansion, Nucl. Phys. B **160**, 57–115 (1979).
- [14] K. Nawa, H. Suganuma, and T. Kojo, Baryons in holographic QCD, Phys. Rev. D **75**, 086003 (2007).
- [15] K. Nawa, H. Suganuma, and T. Kojo, Brane-induced Skyrmion on S^3 : Baryonic matter in holographic QCD, Phys. Rev. D **79**, 026005 (2009).
- [16] E. Witten, Baryons and branes in anti-de Sitter space, JHEP **07**, 006 (1998).
- [17] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto, and S. Yamato, Baryons from instantons in holographic QCD, Prog. Theor. Phys. **117**, 1157–1180 (2007).
- [18] H. Suganuma and K. Hori, Topological objects in holographic QCD, Phys. Scr. **95**, 074014 (2020).
- [19] K. Hori, H. Suganuma, and H. Kanda, Numerical analysis of a baryon and its dilatation modes in holographic QCD, Phys. Rev. D **109**, 014030 (2024).
- [20] C. Hajduk and B. Schwesinger, The breathing mode of nucleons and Δ -isobars in the Skyrme model, Phys. Lett. B **140**, 172–174 (1984).
- [21] A. Hayashi and G. Holzwarth, Excited nucleon states in the Skyrme model, Phys. Lett. B **140**, 175–180 (1984).
- [22] I. Zahed, U. G. Meissner, and U. Kaulfuss, Low-lying resonances in the Skyrme model using the semi-classical approximation, Nucl. Phys. A **426**, 524–541 (1984).

- [23] H. Walliser and G. Eckart, Baryon resonance as fluctuations of the skyrme soliton, Nucl. Phys. A **429**, 514–526 (1984).
- [24] J. Breit and C. Nappi, Phase Shifts of the Skyrmion Breathing Mode, Phys. Rev. Lett. **53**, 889–891 (1984).
- [25] G. Horowitz and A. Strominger, Black strings and P-branes, Nucl. Phys. B **360**, 197 (1991).
- [26] O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, Large N field theories, string theory and gravity, Phys. Rep. **323**, 183 (2000).
- [27] E. Witten, Anti de Sitter space and holography, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253–291 (1998); Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories, ibid. **2**, 505–532 (1998).
- [28] R. M. M. Kruczenski D. Mateos and D. Winters, Towards a holographic dual of large- N_c QCD, JHEP **05**, 041 (2004).
- [29] R. C. Brower, S. D. Mathur, and C. I. Tan, Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality, Nucl. Phys. B **587**, 58–249 (2000).
- [30] J. Polchinski, *String theory* (Cambridge, 1998).
- [31] J. Wess and B. Zumino, Consequences of anomalous ward identities, Phys. Lett. B **37**, 95–97 (1971).
- [32] E. Witten, Global aspects of current algebra, Nucl. Phys. **223**, 422 (1983).
- [33] J. J. Sakurai, Vector-Meson Dominance and High-Energy Electron-Proton Inelastic Scattering, Phys. Rev. Lett. **22**, 981 (1969).
- [34] K. Kawarabayashi and M. Suzuki, Partially Conserved Axial-Vector Current and the Decays of Vector Mesons, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).
- [35] Riazuddin and Fayyazuddin, Algebra of Current Components and Decay Widths of ρ and K^* Mesons, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).
- [36] E. Witten, Current algebra theorems for the U(1) “Goldstone boson”, Nucl. Phys. B **156**, 269–283 (1979).
- [37] G. Veneziano, U(1) without instantons, Nucl. Phys. B **159**, 213–224 (1979).
- [38] G. ’t Hooft, A planar diagram theory for strong interactions, Nucl. Phys. B **72**, 461–473 (1974).
- [39] G. ’t Hooft, A Two-Dimensional Model for Mesons, Nucl. Phys. B **75**, 461–470 (1974).
- [40] D. K. Hong, M. Rho, H. U. Yee, and P. Yi, Chiral dynamics of baryons from string theory, Phys. Rev. D **76**, 061901 (2007); Dynamics of baryons from string theory and vector dominance, JHEP **09**, 063 (2007).
- [41] E. Witten, Baryons and branes in anti de Sitter space, JHEP **07**, 006 (1998).
- [42] M. R. Douglas, Branes within branes, NATO Sci. Ser. C **520**, 267–275 (1999).
- [43] E. Witten, Some exact multi-instanton solutions of classical Yang-Mills theory, Phys. Rev. Lett. **38**, 121–124 (1977).
- [44] S. Bolognesi and P. Sutcliffe, The Sakai-Sugimoto soliton, JHEP **01**, 078 (2014).
- [45] M. Rozali, J. B. Stang, and M. van Raamsdonk, Holographic baryons from oblate instantons, JHEP **02**, 044 (2014).

- [46] Y. Igarashi, M. Johmura, A. Kobayashi, H. Otsu, T. Sato, and S. Sawada, Stabilization of Skyrmions via ρ Mesons, Nucl. Phys. B **259**, 721–729 (1985).
- [47] T. Fujiwara, Y. Igarashi, A. Kobayashi, H. Otsu, T. Sato, and S. Sawada, An Effective Lagrangian for Pions, ρ Mesons and Skyrmions, Prog. Theor. Phys. **74**, 128–132 (1985).
- [48] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Y. Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett. B **59**, 85–87 (1975).
- [49] G. 't Hooft, Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
- [50] K. Hashimoto, T. Sakai, and S. Sugimoto, Nuclear Force from String Theory, Prog. Theor. Phys. **122**, 427–476 (2009).
- [51] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$, Phys. Rev. **175**, 2195–2199 (1968).
- [52] R. L. Workman *et al.* (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
- [53] G. Adkins, C. Nappi, and E. Witten, Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model, Nucl. Phys. B **228**, 552–566 (1983).
- [54] K. Matsumoto and H. Suganuma, A Study of the H-dibaryon in Holographic QCD, JPS Conf. Proc. **13**, 020014 (2017); Holographic QCD for H-dibaryon (uuddss), EPJ Web Conf. **137**, 13018 (2017).