

FORMAC を利用した級数の逆転

電気試験所 戸田英雄

$$y = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \quad (1)$$

の逆転

$$x = y + \sum_{k=2}^{\infty} b_k y^k \quad (2)$$

を求むる問題を例にして, FORMAC による数式処理のプログラムを述べる.

1. 算法

i) (2) と (1) に代入して未定係数法で順に b_k ($k=2, 3, \dots$)

を定めていく方法

ii) 山内の式を用いる方法, すなわち,

b_k は

$$b_k = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n (k+n-1)^{(n-1)} \sum_{p=k+n-1}^{\alpha=n} \left[\frac{a_p^m}{m!} \right] \quad (3)$$

ここで,

$$\sum_{p=k+n-1}^{\alpha=n} \left[\frac{a_p^m}{m!} \right] \text{ は } \frac{a_2^{m_2}}{m_2!} \cdot \frac{a_3^{m_3}}{m_3!} \dots \text{ の種において}$$

$$\alpha = \sum_{i=2} m_i, \quad \beta = \sum_{i=2} i \cdot m_i$$

これはあらゆる組合せの総和の意味である。

たとえば,

$$b_2 = -\frac{a_2}{1!}$$

$$b_3 = -\frac{a_3}{1!} + 4^{(1)} \frac{a_2^2}{2!}$$

$$b_4 = -\frac{a_4}{1!} + 5^{(1)} \frac{a_2 a_3}{1! 1!} - 6^{(2)} \frac{a_2^3}{3!}$$

$$b_5 = -\frac{a_5}{1!} + 6^{(1)} \left(\frac{a_2 a_4}{1! 1!} + \frac{a_3^2}{2!} \right) - 7^{(2)} \frac{a_2^2 a_3}{2! 1!} + 8^{(3)} \frac{a_2^4}{4!}$$

$$b_6 = -\frac{a_6}{1!} + 7^{(1)} \left(\frac{a_2 a_5}{1! 1!} + \frac{a_3 a_4}{1! 1!} \right) - 8^{(2)} \left(\frac{a_2^2 a_4}{2! 1!} + \frac{a_2 a_3^2}{1! 2!} \right) \\ + 9^{(3)} \frac{a_2^3 a_3}{3! 1!} - 10^{(4)} \frac{a_2^5}{5!}$$

$$b_7 = -\frac{a_7}{1!} + 8^{(1)} \left(\frac{a_2 a_6}{1! 1!} + \frac{a_3 a_5}{1! 1!} + \frac{a_4^2}{2!} \right) \\ - 9^{(2)} \left(\frac{a_2^2 a_5}{2! 1!} + \frac{a_2 a_3 a_4}{1! 1! 1!} + \frac{a_3^3}{3!} \right) \\ + 10^{(3)} \left(\frac{a_2^3 a_4}{3! 1!} + \frac{a_2^2 a_3^2}{2! 2!} \right) - 11^{(4)} \frac{a_2^4 a_3}{4! 1!} + 12^{(5)} \frac{a_2^6}{6!}$$

IBM 360/75 PL/I FORMAC で、 $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{2}$ を計算したが、 $k \geq 10$ では両方とも時間がかかる。i)の方法では数式処理的なFORMACの機能は十分に利用するが、10~20分のオーダーの時間がかかる。ii)の方法は、FORMACの機能の一部、すなわち多倍長の整数計算(2295桁まで)だけを利用しただけで5~10分のオーダーで出来る。したがって実用的にはii)の方がよい。

2. 数値例

$$(1) \quad y = e^x - 1 \doteq x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}$$

$$x = \log(1+y) \doteq y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots - \frac{y^{10}}{10}$$

$$(2) \quad y = \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{10}}{10}$$

$$x = e^y - 1 \doteq y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^{10}}{10!}$$

$$(3) \quad y = \tan^{-1} x \doteq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{x^{21}}{21}$$

$$x = \tan y \doteq y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + \dots + \frac{1\ 88884\ 6608+}{19489\ 64774\ 00625} y^{21}$$

計算時間 (1) と (2) 2.1分

(3) 3分

3. 検討

(2) の方法は, (1) に比べて 約 $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ の時間で済む. このプログラムは附録にのめるが, 本質的な部分は, 整数 α を 2 以上の整数で β 分割する procedure $\Rightarrow$ PARTIT にある.

一松氏やその他の数学者の立派なアルゴリズムもあって, 筆者のやり方が最善とは思わない.

また, (3) の場合の $\tan^{-1} x$ のように奇関数の場合には, 専用のプログラムを用いた方が時間が半分以下ですむ. ([2] を見よ.)

4. 文献

- [1] 級数の逆転の一般式とそのプログラマ, 山内二郎,
中田英雄, オ8回プログラミング・シンポジウム報告
集 (1967)
- [2] 奇関数の整多項式の逆転について, 中田英雄,
情報処理 (投稿中)

5. 附録

別紙

オフセット (印刷)

```

INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
INVS: PROCEDURE OPTIONS(MAIN) ;
      FORMAC_OPTIONS ;
      DCL FX CHAR(72) ;
      DCL KK(0:100) BIN FIXED(31,0) ;
      DCL P(0:100) BIN FIXED(31,0) ;
      DCL(L,K,N,J,MM) BIN FIXED(31,0) ;
START: ON ENDFILE(SYSIN) GO TO CLOSE ;
      PUT PAGE;
/* SET A(I)= 1/ FAC(I) */
      GET LIST(NO) ;
      DO L=1 TO NO ;
      GET LIST(FX) ;
      LET ( A("L")= "FX" );
      PRINT_OUT( A("L") ) ;
      END ;
      DO K=2 TO NO ;
      PUT SKIP(8);
      LET ( SBKN = 0 ) ;
      DO N=1 TO K-1 ;
      LET( SUM=0 ) ;
      MM= K-1+N ;
      CALL PARTIT( MM ,N ) ;
      LET( SBKN= SBKN +BKN ) ;
      END;
      LET ( B("K") = SBKN ) ;
      END;
      PUT SKIP(4) ;
      LET( B("1") = 1 ) ;
      DO K=1 TO NO ;
      PRINT_OUT( B("K") ) ;
      END ;
      GO TO START ;
PARTIT: PROCEDURE(MM,N);
      DECLARE (M,N,MM) BIN FIXED (31,0) ;
      DECLARE (I,J,S,JJ,KJ,II) BIN FIXED (31,0) ;
      M=MM;
      KK(1)=1 ;
      DO I=2 TO N ; KK(I)=2 ; END;
      J=0 ;
L51: I=J ;
      KK(I+1)=KK(I+1)+1;
      IF I=0 THEN GO TO L53;
L52: KK(I)=KK(I+1);
      I=I-1 ;
      IF I=0 THEN GO TO L53;
      GO TO L52 ;
L53: S=0 ;
      DO I=1 TO N ; S=S+KK(I); END;
      IF M=S THEN GO TO L22 ;
      IF M< S THEN GO TO L21 ;
      IF M>S THEN GO TO L23 ;
L22: DO I=1 TO 50 ; P(I)=0 ; END;
      DO JJ=1 TO N ; KJ=KK(JJ);P(KJ)=P(KJ)+1 ; END;
      CALL TERM(K,N);
L21: J=J+1;
      GO TO L56 ;
L23: J=0 ;
L56: IF J = N THEN GO TO L51;
      END PARTIT;

```

88

```
TERM: PROCEDURE(K,N);
      DECLARE (K,N,KN1)      BIN    FIXED(31,0) ;
      DECLARE (L,PL,KL)      BIN    FIXED(31,0) ;
      LET( U=1 );
      DO L=1 TO N ;
        KL =KK(L);
        LET(U =U* A("KL")) ;
      END;
      DO L=1 TO 50 ;
        PL =P(L) ;
        IF PL <= 1 THEN GO TO SKIP ;
        LET(U =U / FAC( "PL")) ;
SKIP:
      END;
      LET( SUM=SUM +U );
      KN1 = K+N-1 ;
      LET(BKN = FAC("KN1") /FAC("K") *SUM);
      IF (N/2)*2 =N THEN GO TO CONTINUE ;
      LET( BKN=-BKN) ;
CONTINUE:
      END TERM;
CLOSE: CLOSE FILE(SYSPRINT) ;
      END INVS;
```

$$(1) \quad y = e^x - 1 \quad \text{as} \quad x = \log(1+y)$$

$$A(1) = 1$$

$$A(2) = 1/2$$

$$A(3) = 1/6$$

$$A(4) = 1/24$$

$$A(5) = 1/120$$

$$A(6) = 1/720$$

$$A(7) = 1/5040$$

$$A(8) = 1/40320$$

$$A(9) = 1/362880$$

$$A(10) = 1/3628800$$

$$y = e^x - 1 \doteq x + x^2/2! + \dots + x^{10}/10! \quad \text{の係数}$$

$$B(1) = 1$$

$$B(2) = -1/2$$

$$B(3) = 1/3$$

$$B(4) = -1/4$$

$$B(5) = 1/5$$

$$B(6) = -1/6$$

$$B(7) = 1/7$$

$$B(8) = -1/8$$

$$B(9) = 1/9$$

$$B(10) = -1/10$$

$$x = \log(1+y) \doteq y - y^2/2 + \dots - y^{10}/10 \quad \text{の係数}$$

90 (2) $y = \log(1+x)$ とし $x = e^y - 1$

$$A(1) = 1$$

$$A(2) = -1/2$$

$$A(3) = 1/3$$

$$A(4) = -1/4$$

$$A(5) = 1/5$$

$$A(6) = -1/6$$

$$A(7) = 1/7$$

$$A(8) = -1/8$$

$$A(9) = 1/9$$

$$A(10) = -1/10$$

$$y = \log(1+x) \doteq x - x^2/2 + \dots - x^{10}/10 \text{ の係数}$$

$$B(1) = 1$$

$$B(2) = 1/2$$

$$B(3) = 1/6$$

$$B(4) = 1/24$$

$$B(5) = 1/120$$

$$B(6) = 1/720$$

$$B(7) = 1/5040$$

$$B(8) = 1/40320$$

$$B(9) = 1/362880$$

$$B(10) = 1/3628800$$

$$x = e^y - 1 \doteq y + y^2/2! + \dots + y^{10}/10! \text{ の係数}$$

$$(3) \quad y = \tan^{-1} x \quad \text{as} \quad x = \tan y$$

$$A(1) = 1$$

$$A(2) = 0$$

$$A(3) = -1/3$$

$$A(4) = 0$$

$$A(5) = 1/5$$

$$A(6) = 0$$

$$A(7) = -1/7$$

$$A(8) = 0$$

$$A(9) = 1/9$$

$$A(10) = 0$$

$$A(11) = -1/11$$

$$A(12) = 0$$

$$A(13) = 1/13$$

$$A(14) = 0$$

$$A(15) = -1/15$$

$$A(16) = 0$$

$$A(17) = 1/17$$

$$A(18) = 0$$

$$A(19) = -1/19$$

$$A(20) = 0$$

$$A(21) = 1/21$$

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\# \doteq x - x^3/3 + x^5/5 - \dots + x^{21}/21 \quad \text{の係数}$$

```

B(1) = 1
-----
B(2) = 0
-----
B(3) = 1/3
-----
B(4) = 0
-----
B(5) = 2/15
-----
B(6) = 0
-----
B(7) = 17/315
-----
B(8) = 0
-----
B(9) = 62/2835
-----
B(10) = 0
-----
B(11) = 1382/155925
-----
B(12) = 0
-----
B(13) = 21844/6081075
-----
B(14) = 0
-----
B(15) = 929569/638512875
-----
B(16) = 0
-----
B(17) = 6404582/10854718875
-----
B(18) = 0
-----
B(19) = 443861162/1856156927625
-----
B(20) = 0
-----
B(21) = 18888466084/194896477400625
-----

```

$$x = \tan y \doteq y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + \dots \quad \text{の係数}$$

ELAPSED TIME (HR)050