

H^p 族の境界値について

京産大 志賀 啓成

R を種数 g の compact bordered Riemann 面で、境界 ∂R は n 個の解析的な Jordan 閉曲線とする。 $L^p(\partial R)$ で ∂R 上の調和測度に関する p 乗可積分な函数空間を表すものとする。 $1 < p < \infty$ のとき、 $L^p(\partial R) \subset H^p(R) = \{f; R \text{ で analytic で、} |f|^p \text{ が調和優函数をもつ}\}$ の境界値との関連については、単位円の結果を拡張する形で与えられている ([1], [2], [3])。ここではそれらの結果の別証明を与え、それらを用いて、 $L^p(\partial R)$ の Cauchy 積分の境界挙動について考察する。

よく知られているように、 $H^p(R)$ は ∂R 上 a. e. に non-tangential limit を持ち、しかも $L^p(\partial R)$ になる。この意味で、 $H^p(R) \subset L^p(\partial R)$ 。また、 $\mathcal{H}^p(R) = \{u; R \text{ で harmonic で、} |u|^p \text{ が調和優函数をもつ}\}$ とおく。明らかに、 $H^p(R) \subset \mathcal{H}^p(R)$ 、 $\mathcal{H}^p(R)$ 、 $H^p(R)$ に、

$$(1) \quad \|u\|_p = (L. H. M. |u|^p(a_0))^{1/p}$$

でノルムを定義して、Banach 空間にすることが出来る。ここに、L.H.M. は最小調和優函数を表し、 a_0 は R の固定点とする。基本的な事実として、

補題 1 ([3]) D を単位円、 $1 < p < \infty$ とするとき、

$\forall u \in \mathcal{R}^p(D)$ に対し、その共役調和函数 $*u$ も $\mathcal{R}^p(D)$ で、 u に無関係な定数 C_p が存在して、

$$(2) \quad \|*u\|_p \leq C_p \|u\|_p$$

したがって、一般の開 Riemann 面 W (と O_G) に対しても、その universal covering εD と考え、上記の事実と、“ D 上の L.H.M. と W 上の L.H.M. は一致する ([6])” を使えば、

補題 2 W 上の正則函数 $f = u + iv$ に対し、もし $u \in \mathcal{R}^p(W)$ なら、 $f \in H^p(W)$ であり (ただし $1 < p < \infty$)、

$$(3) \quad \|f\|_p \leq C'_p \|u\|_p$$

を満たす定数 C'_p が存在する。

更に、 $\mathcal{R}^p(W)$, $H^p(W)$ の境界挙動について、

補題 3 調和函数 u が W 内のある compact 集合 K の外で $\mathcal{R}^p$ (or H^p) なら、 $u \in \mathcal{R}^p(W)$ (or $H^p(W)$)

証明は $W - K$ における $|u|^p$ の調和優函数を normal operator の方法 ([4]) によって、 W 上の調和函数に作り変えることで

示される。

さて、compact bordered Riemann 面 R について、実数値
 函数 $f \in L^p(\partial R)$ ($1 < p < \infty$) をとる。 ∂R の連結成分 α_j ($j=1, \dots, n$)
 に対して、 α_j をその外周とする annulus U_j がとれて、しかも U_j
 は $\{r_1 < |z| < 1\}$ と等角で、 α_j が単位円に対応するようになれる。
 したがって $f \in L^p(d\theta)$ と考えられる。よって f は、その Poisson
 積分を考えて、 $R^p(U_j)$ の α_j の境界値となる。これを u_j と
 する。 u_j は作り方から、

$$\int_{\partial_j} *du_j = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

ここに ∂_j は $\partial_j \sim \alpha_j$ なる、 U_j 内の閉曲線。よって存在定理 ([4]) より、 U_j 上、

$$(4) \quad u = u_j + (I)L_1(u - u_j)$$

をみたす R 上の調和函数 u が存在する。 $(I)L_1$ の ∂R における値
 を 0 と正規化しておけば、 u の ∂R における値は u_j と同一、す
 なわち、 f になる。normal operator の性質から、 $(I)L_1(u - u_j)$
 は U_j 上有界。したがって $u|_{U_j} \in R^p(U_j)$ 。補題 3 から $u \in R^p(R)$
 が従う。

$\gamma_1, \dots, \gamma_{2g+n-1} \in R$ のホモロジー基底として、

$$a_j = \int_{\gamma_j} *du \quad (j=1, \dots, 2g+n-1)$$

と置く。一方、 $R \cup \partial R$ の近傍での調和函数 $v_1, \dots, v_{2g+n-1}$ で、

$$(5) \quad \int_{\gamma_k} *dv_j = \delta_{jk} \quad (j, k=1, \dots, 2g+n-1)$$

なるものが見出せるが、これに対し、 $v = u - \sum_{j=1}^{2g+n-1} a_j v_j$ とおくと、 $v \in H^p(R)$ で、しかもその共役調和函数 $*v$ は一価。よって補題2から、

$$g = u + i * u \in H^p(R) \quad (1 < p < \infty)$$

特に、 $*v(a_0) = 0$ としおく。

$$(6) \quad u = \frac{1}{2} \{g + g(a_0) + \overline{g - g(a_0)}\} + \sum_{j=1}^{2g+n-1} a_j v_j$$

ここでは、 f を実数値としたが、複素数値でも同様の議論が成り立つことは明らかである。空間 $N \equiv \{v_j\}_{j=1}^{2g+n-1}$ の境界値によって $\mathbb{C}$ 上張られる空間、 $H_0^p(R) = \{g \in H^p(R); g(a_0) = 0\}$ とおく。

定理 1 $1 < p < \infty$ のとき、

$$(7) \quad L^p(\partial R) = H^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus N \quad (\text{直和})$$

$$\dim N = 2g + n - 1$$

しかも、 $L^p(\partial R)$ から、各空間への projection は有界線型作用素である。

証明 (6) によって、 $L^p(\partial R)$ が、 $H^p(R)$, $H_0^p(R)$, N で表現できることが分かる。また、 $H^p(R) \perp \overline{H_0^p(R)}$ の直和性は明らかだし、 N の直和性についても、共役微分の γ_j -周期をみれば分かる。 N の次元も、 $\{v_j\}_{j=1}^{2g+n-1}$ が境界函数として一次独立であることを示せば十分であるが、

$$\sum_{j=1}^{2g+n-1} c_j v_j = 0$$

ならば、最大値の原理から、 $\sum_{j=1}^{2g+n-1} C_j v_j$ は境界函数のオならず、 R 上の調和函数と考えても、 $\equiv 0$ 。よ、 2 両辺の g -周期を考へると、(5) から $C_B = 0$ となる。

projection の有界性を示す為。まず、 $u \in L^p(R)$ に対し、

$$(8) \quad \|u\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial R_n} |u|^p * dg_{a_0}^{R_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial R} |u|^p * dg_{a_0} \\ = (L.H.M. |u|^p)(a_0)$$

に注意する。ここに $\{g_{a_0}^{R_n}\}$ は R の正則近似列 $\{R_n\}$ に関して、極 a_0 にも γ Green 函数で、 g_{a_0} は R に関するそれである。

(8) の証明は Green 函数 に対する R の正則性と、 $L^p(R)$ の境界挙動による。次に、

補題 4 $1 < p$ のとき、 $u \in L^p(R)$ に対し、

$$u \longmapsto S_{r_j} * du \quad (j=1, \dots, 2g+n-1)$$

は有界線型汎函数である。しかも σ_{r_j} を r_j についての Γ_n -周期再成微分とすると、

$$(9) \quad S_{r_j} * du = \sum_{\partial R} u \sigma_{r_j}$$

証明 u の境界値 $u^* \in L^p(\partial R)$ を、 ∂R の近傍での調和函数列 $\{u_n\}$ の ∂R への制限 $\{u_n^*\}$ で L^p -近似する。ただし、ここでいう、 ∂R の近傍とは、 R を部分領域として含む十分広い $\tilde{R}$ における ∂R の近傍という意味である。 u_n^* を境界値として持つ、 $L^p(R)$ の u_n とすると (4) より、各 U_j 上、

$$R_n = u_n + (I) L_1(R_n - u_n)$$

よって、 f_n は $\bar{R}$ の近傍で調和で、 $*df_n \in \Gamma_R(R)$.

$$\begin{aligned} (10) \quad S_{r_j} * df_n &= \iint_R *df_n \wedge * \sigma_{r_j} = \iint_R df_n \wedge \sigma_{r_j} \\ &= \int_{\partial R} f_n \sigma_{r_j} = \int_{\partial R} f_n \frac{\sigma_{r_j}}{(-*dg_{a_0})} (-*dg_{a_0}) \end{aligned}$$

$\sigma_{r_j}/(-*dg_{a_0})$ は ∂R 上連続だから、 $\tilde{M} \geq \max_{\partial R} |\sigma_{r_j}/(-*dg_{a_0})|$ とおく。
 ここで、 $-*dg_{a_0}$ は ∂R 上正の微分より、

$$\begin{aligned} (11) \quad |S_{r_j} * df_n| &\leq 2\pi \tilde{M} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial R} |f_n| (-*dg_{a_0}) \\ &\leq 2\pi \tilde{M} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial R} |f_n|^p (-*dg_{a_0}) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\pi \tilde{M} \|f_n\|_p \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{M}$ は u に依存しない。

$\{f_n\}$ の取り方、及び (8) より、 $\|f_n - u\|_p^p \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

したがって、 $\{f_n\}$ は u に広義一様収束し ([5])、

$$(12) \quad S_{r_j} * df_n \rightarrow S_{r_j} * du$$

一方、 $\|f_n - u\|_p \geq |\|f_n\|_p - \|u\|_p|$ から、

$$(13) \quad \|f_n\|_p \rightarrow \|u\|_p$$

(11), (12), (13) より、

$$(14) \quad |S_{r_j} * du| \leq 2\pi \tilde{M} \|u\|_p$$

また、(10) において、 $n \rightarrow \infty$ とし

$$S_{r_j} * du = \int_{\partial R} u \sigma_{r_j} \quad \text{を得る。} \quad (\text{証明終})$$

さて、実数値 $u \in L^p(\partial R)$ を、(7) にしたがって、

$$u = f + \bar{g} + v \quad (f \in H^p(R), g \in H_0^p(R), v \in N)$$

と書いたとき、(6)、(14) から、

$$(15) \quad \|v\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{2^{m+1}} a_j v_j \right\|_p \leq 2\pi \tilde{M} \|u\|_p \sum_{j=1}^{2^{m+1}} \|v_j\|_p$$

$v_1, \dots, v_{2^{m+1}-1}$ は固定してあるから、projection $u \mapsto v$ についてその有界性は示された。projection $u \mapsto f$ については、

$$(6) \text{ から } f = \frac{1}{2}(u-v) + \frac{i}{2}*(u-v) + \frac{1}{2}(u(a_0)-v(a_0))$$

ただし、 $*(u-v)$ は $(u-v)$ の共役調和函数で、 a_0 で 0 としておく、また、各 v_j も a_0 で 0 としておけば、 $v(a_0)=0$ 。すると、補題 2-(3) より、

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq C'_p \left\| \frac{1}{2}(u-v) + \frac{1}{2}u(a_0) \right\|_p \\ &\leq \frac{1}{2}C'_p (\|u\|_p + \|v\|_p + \|u\|_p) \\ &\leq \frac{1}{2}C'_p (2 + 2\pi \tilde{M} \sum_{j=1}^{2^{m+1}} \|v_j\|_p) \|u\|_p \quad (\because (15) \text{ より}) \end{aligned}$$

projection $u \mapsto \bar{f}$ についても同様である。 (証明終)

さて、定理 1 の (7) の分解において、空間 N は、ある種の条件を満たす調和函数よりなる空間であった。これを [1], [2], [3] で見られるような、有理型函数の境界値の空間に置き換えて、のちの議論に応用したい。

定理 2 $\hat{R}$ で ∂R に関する R のダブルを表わし、 $S_1, S_2=1$ or $a_0 \in R$ 内の互いに素な整因子とし、 $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ をその鏡像、 $\hat{S} = S_2/S_1, \hat{\hat{S}} = \hat{S}_2/\hat{S}_1$ とおく。 $1 < p < \infty$ のとき、

$$(16) \quad L^p(\partial R) = H^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus M_{\hat{R}}(S\hat{S})|_{\partial R} \quad (S_2 \neq 1)$$

または、

$$(17) \quad L^p(\partial R) = H_0^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus M_{\hat{R}}(S\hat{S})|_{\partial R} \quad (S_2 = 1)$$

と直和分解できるための必要十分条件は、

$$(18) \quad \dim M_R(\delta\hat{\delta}) = \begin{cases} 2g+n-1 & (\delta_2 \neq 1) \\ 2g+n & (\delta_2 = 1) \end{cases}$$

かつ、

$$(19) \quad \dim M_R(\hat{\delta}) = \begin{cases} 0 & (\delta_2 \neq 1) \\ 1 & (\delta_2 = 1) \end{cases}$$

しかも、(16)または(17)の分解において、 $L^p(\partial R)$ から各空間への projection は有界である。

ここに、 $M_R(\delta) = \{f; \hat{R} \text{ 上の有理型函数で、} (f) > \delta\}$ で、 $M_R(\delta)|_{\partial R}$ は、その ∂R 上の制限からなる空間で、ノルムは、 $\frac{1}{2\pi} * dg_{00}$ に関する L^p -ノルムをとる。

証明 $\delta_2 = 1, \neq 1$ のときの表現、次元の相違は、定数の取捨によるものであるから、 $\delta_2 \neq 1$ として示す。

必要性; 定理1の N の基底 $v_1, \dots, v_{2g+n-1}$ について、(16)にしたがって、

$$(20) \quad v_j = f_j + \bar{g}_j + m_j \quad (j=1, \dots, 2g+n-1)$$

と表現する。ただし、 $f_j \in H^p(R)$, $g_j \in H_0^p(R)$, $m_j \in M_R(\delta\hat{\delta})|_{\partial R}$.

もし、 $\exists a_j \in \mathbb{C}$ ($j=1, \dots, 2g+n-1$) に対し、 $\sum_{j=1}^{2g+n-1} a_j m_j = 0$ とすると、(20)から、 $\sum_{j=1}^{2g+n-1} a_j v_j = \sum_{j=1}^{2g+n-1} (a_j f_j + a_j \bar{g}_j)$ とすると、定理1の直和性と $\{v_j\}$ の一次独立性より、 $\forall a_j = 0$ 。すなわち、

$m_1, \dots, m_{2g+n-1}$ は一次独立 $\therefore \dim M_R(\delta\hat{\delta}) \geq 2g+n-1$

もし、 $\dim M_R(\hat{S}) = R > 2g+n-1$ とすると、その基底 $m_1, \dots, m_R$ に対し、逐次定理 1 を用いて、

$$m_j = f_j' + \bar{g}_j' + \hat{v}_j \quad f_j' \in H^p(R), g_j' \in H_0^p(R), \hat{v}_j \in N$$

とすると、上の議論と同様にして、 $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_R$ が一次独立となり、 $\dim N = 2g+n-1$ に反す。

また、もし $\exists g \in M_R(\hat{S}), g \neq 0$ なら、 $g|_{\partial R} \in H^p(R) \cap M_R(\hat{S})|_{\partial R}$ となり、(16) の直和性に反す。以上により、(18), (19) が示された。

十分性；まず直和性を示す。 $\exists m \in M_R(\hat{S})$ で、 $H^p(R) \subset \overline{H_0^p(R)}$ で張られる空間の元であるものが存在したとすると、

$$m^* = f^* + \bar{g}^* \quad f \in H^p(R), g \in H_0^p(R)$$

ただし $*$ は境界値を示す。ダブル $\hat{R}$ を作る際の間接的等角写像を考えれば、 $\bar{g}^*$ は、 $\hat{R} - \bar{R}$ での H^p 函数で、 $\hat{a}_0 \neq 0$ になるものの境界値であることがわかる。それを $\hat{g}$ とおく。すると、 $f^* = m^* - \hat{g}^*$ で、明らかに $m^* - \hat{g}^*$ は $\hat{R} - \bar{R}$ のある compact set の外で H^p -class であるから、

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \bar{R} \\ m(z) - \hat{g}(z) & z \in \hat{R} - \bar{R} \end{cases}$$

と書いたものは $\hat{R}$ での有理型函数 (cf. [5] LEMMA 7)、しかも $M_R(\hat{S})$ の元である。よって (19) から、 $F \equiv 0$ 。よって $m \equiv \hat{g}$ 。再び (19) より、 $m \equiv 0$ 、即ち、直和性が示された。

(16) の表現についても、上に示した直和性と必要性の論法に

よ、て、容易に示される。

projection の有界性については、 $\forall v \in N$ を

$$(21) \quad v = f' + \overline{g'} + m \quad f' \in H^p(R), g' \in H_0^p(R), m \in H(R(\hat{S}))$$

と分解したとき、 v に無関係な $K > 0$ があって、

$$(22) \quad \|f'\|_p, \|g'\|_p, \|m\|_p \leq K \|v\|_p$$

である。実際、 $v \mapsto f'$, $v \mapsto g'$, $v \mapsto m$ は、有限次元ノルム空間上の線型写像だから、有界である。すると $u \in L^p(\partial R)$ が定理 1 の分解で、 $u = f + \overline{g} + v$ のとき、

$$u = (f + f') + \overline{(g + g')} + m$$

と分解される。さらに、(22) と定理 1 より、

$$\begin{aligned} \|f + f'\|_p &\leq \|f\|_p + \|f'\|_p \leq C_p (1 + \pi \hat{M} \sum_{j=1}^{2n+1} \|v_j\|_p) \|u\|_p + K \|v\|_p \\ &\leq \{C_p (1 + \pi \hat{M} \sum_{j=1}^{2n+1} \|v_j\|_p) + K \cdot 2\pi \hat{M} \sum_{j=1}^{2n+1} \|v_j\|_p\} \|u\|_p \end{aligned}$$

$\|g + g'\|_p$ も同様。

$$\|m\|_p \leq K \|v\|_p \leq (2\pi K \hat{M} \sum_{j=1}^{2n+1} \|v_j\|_p) \|u\|_p$$

よ、て、projection の有界性も示された。 (証終)

系 2-1 ([1], [2]) $b \in R$ を $\hat{R}$ における non-Weierstrass

点とする。 $\hat{b}$ をその鏡像とし、 $\hat{g} = 2g + n - 1$ とおく。

$$(23) \quad L^p(\partial R) = H_0^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)} \oplus M_R(b^{-\hat{g}} \hat{b}^{-\hat{g}})|_{\partial R}$$

証明 定理 2 の (18), (19) を $M_R(b^{-\hat{g}} \hat{b}^{-\hat{g}})$ について検証すればよいが、それは古典的な Riemann-Roch の定理から、容易である。

系 2-2 ([1], [2], [3])

 $\bar{\partial} g_{a_0} = dg_{a_0} + i^* dg_{a_0}$ の $\hat{R}$ での因子を S とすると、

$$(24) \quad L^p(\bar{\partial} R) = H^p(R) \oplus H_0^p(R) \oplus M_R(\bar{\partial} S^{-1})|_{\bar{\partial} R}$$

証明 (18) は Riemann-Roch の定理から容易に分かる。(19) は $L^2(\bar{\partial} R)$ の直交分解 ([2]) (Reed の定理から示される)

$$L^2(\bar{\partial} R) = H^2(R) + H^2(R; \bar{\partial} g_{a_0})$$

ここで、 $H^2(R; \bar{\partial} g_{a_0}) = \{f : R \text{ で有理型で、} \bar{\partial} R \text{ の近傍で } H^2, \\ f \bar{\partial} g_{a_0} \text{ が } R \text{ で正則}\}$ である、を用いればよい。(証明略)

ここで注意として、定理 1 と定理 2 の関連性について述べておく。すなわち、 N の基底 (それは (5) を与えただけでよい) の取り方の任意性の範囲内に $M_R(\bar{\partial} S)|_{\bar{\partial} R}$ を加えてしまう、そしてその意味で $N = M_R(\bar{\partial} S)|_{\bar{\partial} R}$ ということである。実際それを示すのには、 $M_R(\bar{\partial} S)|_{\bar{\partial} R}$ のある基底 $m_1, \dots, m_{2g+n-1}$ に対して、 $R_j (j=1, \dots, 2g+n-1)$ を $R_j|_{\bar{\partial} R} = m_j$ なる $\bar{R}$ の調和函数とする。それらの γ_R -周期 $\int_{\gamma_R} \bar{\partial} R_j = a_{Rj}$ によってできる行列 (a_{Rj}) が正則であればよい。 $b_j = (a_{1j}, \dots, a_{2g+n-1,j})$ とおくと、ベクトル $b_j (j=1, \dots, 2g+n-1)$ が一次独立であればよい。もし $\sum_{j=1}^{2g+n-1} \alpha_j b_j = 0$ ($\alpha_j \in \mathbb{C}$) ならば、 $\sum_{j=1}^{2g+n-1} \alpha_j R_j \in H^p(R) \oplus \overline{H_0^p(R)}$ 。直和性から $\sum_{j=1}^{2g+n-1} \alpha_j R_j|_{\bar{\partial} R} = \sum_{j=1}^{2g+n-1} \alpha_j m_j = 0$ 。 $\{m_j\}$ の一次独立性から、 $\forall \alpha_j = 0$ 。したがって、 (a_{Rj}) が正則となり、求める結論が得られた。

さて、定理2の結果を利用して、 ∂R 上のCauchy積分について考察する。ただし、ここで言うCauchy積分は、 $f \in L^p(\partial R)$ ($1 < p < \infty$)に対して、 ϕ_{pp_0} ($p \in R, p_0 \in \hat{R} \setminus \bar{R}$) $\in \hat{R}$ の第三種微分で、 p で $+1$ 、 p_0 で -1 の留数を持つものとしたとき、

$$\int_{\partial R} f \phi_{pp_0}$$

のことである。

補題 5 W は種数 g の閉Riemann面とし、 $p_0 \in W$ 上の固定点、 $\{p_{1,n}\}, \{p_{2,n}\} \in W$ 上の点列で、 $p_{1,n} \neq p_{2,n}$, $p_{i,n} \rightarrow p_0$ $i=1,2$ とする。このような点列に対し、以下の条件を満たす W 上の第2種又は第3種Abel微分 φ_n を与える。

(i) φ_n は $p_{1,n}, p_{2,n}$ 以外では正則。

(ii) $\alpha_j(n) = \int_{A_j} \varphi_n$ ($j=1, \dots, g$) とおいたとき、

$$\exists \alpha_j \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j(n) \longrightarrow \alpha_j \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iii) φ_n の $p_{1,n}, p_{2,n}$ の特異性の極限值が存在して、その和が0である。i.e. $p_{1,n}, p_{2,n} \rightarrow p_0$ だから、 φ_n は p_0 の局所円板 V_0 内に極を持つとしてよい。 V_0 の局所変数 z に関して、 $p_{i,n}$ の座標を $b_{i,n}$ ($i=1,2$)としたとき、 φ_n の主要部は

$$(25) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{l_1(n)} C_{1,n}^{(k)} (z - b_{1,n})^{-k} \\ \sum_{k=1}^{l_2(n)} C_{2,n}^{(k)} (z - b_{2,n})^{-k} \end{cases} dz$$

の形になるが、その時、十分大なる n について、 $l_1(n) = l_2(n)$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{i,n}^{(k)}$ ($i=1,2$) が任意の k ($1 \leq k \leq li(n)$) に対して存在し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{1,n}^{(k)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} C_{2,n}^{(k)}$ である。

そのとき、 $P_0, P_{j,n}$ ($j=1,2$) と異なる W 上の任意の Q_0 での φ_n の展開

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k dz \quad z: Q_0 \text{ の局所変数}$$

を考えると、

$$a_k^{(n)} \rightarrow a_k \quad (n \rightarrow \infty, k=0,1,2, \dots)$$

ここに、 a_k は $S_{A_j} \omega = \alpha_j$ ($j=1, \dots, g$) なる W 上の第 1 種 Abel 微分 ω の Q_0 での展開

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k dz$$

による Taylor 級数

特に、 $P_{1,n}, P_{2,n}$ についての W 上の第 3 種正規微分 $\phi_{P_{1,n}, P_{2,n}}^*$ に関して、 $a_k^{(n)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。

証明 φ_n の代わり $\varphi_n - \omega$ を考えることにより、 $\alpha_j = 0$ $a_k = 0$ として、補題を示せば十分である。

ψ_{Q_0} は Q_0 での $(k+2)$ 位の pole を持ち、そこでの主要部が $z^{-(k+2)} dz$ であり、かつ A -周期が 0 となる第 2 種 Abel 微分とする。いま、 $\Phi_{Q_0}(p) = \int^p \psi_{Q_0}$ とおくと、周期関係式より、

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_W \text{Res } \Phi_{Q_0} \varphi_n &= \sum_{j=1}^g \int_{A_j} \psi_{Q_0} \int_{B_j} \varphi_n - \int_{B_j} \psi_{Q_0} \int_{A_j} \varphi_n \\ &= -\sum_{j=1}^g \alpha_j^{(n)} \int_{B_j} \psi_{Q_0} \end{aligned}$$

一方、 Φ_{Q_0} は Q_0 の $\pi(k+1)$ 位の極をもつ。また、 $P_{1,n}$, $P_{2,n}$ の展開を、

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_{Q_0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{1,n}^{(k)} (z - b_{1,n})^k \\ \Phi_{Q_0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2,n}^{(k)} (z - b_{2,n})^k \end{cases}$$

とすると、(25), (26) より、

$$(27) \quad 2\pi i \sum_N \operatorname{Res} \Phi_{Q_0} \varphi_n = 2\pi i \left\{ a_E^{(n)} + \sum_{k=1}^{p_1(n)} C_{1,n}^{(k)} \beta_{1,n}^{(k-1)} + \sum_{k=1}^{p_2(n)} C_{2,n}^{(k)} \beta_{2,n}^{(k-1)} \right\} = - \sum_{j=1}^g \alpha_j(n) \int_{B_j} \varphi_{Q_0}.$$

仮定より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{1,n}^{(k)} + \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2,n}^{(k)} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j(n) = 0$

また、 Φ_{Q_0} は P_0 で正則だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{1,n}^{(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{2,n}^{(k-1)}$

したが、(27) の両辺の極限から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_E^{(n)} = 0$ (証明終)

さて、compact bordered Riemann 面 R に対し、 $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ を固定する。 ϕ_{p,a_0} を $p \neq -1$, $a_0 \neq -1$ の留数をもつ $\hat{R}$ 上の第三種 Abel 微分で、 $\sum_{A_j} \phi_{p,a_0} = \alpha_j$ と固定する。

定理 3 $\forall f \in L^p(\partial R)$ ($1 < p$) の、 ϕ_{p,a_0} による Cauchy 積分 $\Phi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f \phi_{p,a_0}$ ($p \in \partial R$) に対して、 $p \in R$ から $\partial R \cap \text{non-tangential}$ に近づけたときの limit Φ^+ , $p \in \hat{R} \setminus R$ から $\partial R \cap \text{non-tangential}$ に近づけたときの limit Φ^- があることも R 上 a.e. に存在して、 $\Phi^+, \Phi^- \in L^p(\partial R)$ で、

$$(28) \quad \Phi^+ - \Phi^- = f$$

が成り立つ。

証明 $f \in L^p(\partial R)$ は定理 2 またはその系によつて、

$$f = f_1 + \overline{f_2} + v \quad \text{とかける。}$$

ここで、 f_2 は、 $\varphi \in \hat{R} \rightarrow \hat{R}$ anti-conformal とすると、 $\varphi(a_0)$ で 0 になる $H^p(R)$ の元である。そして v は、ある特異性を持った $\hat{R}$ 上の有理型函数である。 $p \in R$ のとき、

$$\begin{aligned} (29) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f \phi_{p, a_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} (f_1 + \overline{f_2} + v) \phi_{p, a_0} \\ &= f_1(p) + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial R} \overline{f_2} \phi_{p, a_0} + \int_{\partial R} v \phi_{p, a_0} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $F_2 = \overline{f_2 \circ \varphi}$ とおくと、 F_2 は a_0 で 0 になる $H^p(\hat{R}|\overline{R})$ の元で、 ∂R でのその境界値は $\overline{f_2}$ に等しい。したがって

$$(30) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \overline{f_2} \phi_{p, a_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} F_2 \phi_{p, a_0} = F_2(a_0) = 0$$

一方 v の R 内での極を $S_1, \dots, S_k$, その位数を $n(1), \dots, n(k)$ とし、 S_j の近傍で、(局所変数 z_j とする)

$$v(z_j) = \sum_{l=1}^{n(j)} d_{l,j} z_j^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} d_{l,j}^+ z_j^l$$

また、 ϕ_{p, a_0} は S_j の近傍で、

$$\phi_{p, a_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{l,j}(p) z_j^l dz_j \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned} (31) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} v \phi_{p, a_0} &= \sum_R \operatorname{Res} v \phi_{p, a_0} \\ &= v(p) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{n(j)} d_{l,j} \alpha_{l-1,j}(p) \end{aligned}$$

ところが、補題 5 より $\alpha_{l-1,j}(p)$ は ∂R の近傍で連続。(29), (30)

(31) より、 Φ^+ が存在して $L^p(\partial R)$ の元である。 Φ^- についても、

$$(32) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f \phi_{q, a_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} (f_1 + \overline{f_2} + v) \phi_{q, a_0}$$

容易に、

$$(33) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f_1 \phi_{g,a_0} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \bar{f}_2 \phi_{g,a_0} = -F_2(g)$$

が分かる。 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \psi \phi_{g,a_0}$ に関しては前段と同様の議論を行えばよい。したが、 ψ が存在して $L^p(\partial R)$ の元。

(28) については、(29), (30), (32), (33) より

$$\Phi(p) - \Phi(g) = f_1(p) + F_2(g) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \psi \phi_{p,g}^*$$

前の2項は $p, g \in \text{non-tangentially}$ に ∂R に近づけた時、

a. e. に極限值 $f_1 + \bar{f}_2$ をもつ。

第3項については、 $\phi_{p,g}^*$ の極でない点における Taylor 級数が 0 に近づく (p, g が ∂R 上の同じ点に近づく) こと、(31) のような議論を行えば、 $p, g \rightarrow b \in \partial R$ のとき、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \psi \phi_{p,g}^* \rightarrow \psi(b)$$

よ、(28) が示された。

(証終)

注意 1) $R = \{ |z| < 1 \}$ のとき、 $a_0 = \infty$ と考えて、通常の Cauchy 積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-a} dz$ に対して、定理の結果が成り立つ。

2) 定理の証明から分かるように、 p, g の収束が non-tangential でなければならぬのは、 f の分解で $f_1, \bar{f}_2$ が現われるからである。一方、もし f が、連続で、しかも、 f に対して (4) のようにして作、た調和函数の共役調和函数が、局所的に ∂R まで連続になるならば (例えば、 R で正則で、 $\bar{R}$ で連続な

函数の実部の境界値や、 $\hat{R}$ 上の有理型函数の境界値など)、
 (6)より、定理1(7)の H^p -part, $\overline{H^p}$ -part も ∂R まで連続にのびる。
 一方、系2-2の後の注意より、それは定理2、またはその
 系における分解の H^p -part, $\overline{H^p}$ -part も ∂R まで連続にのびるこ
 とを意味する。したがって、そのような境界値 $f \in L^p(\partial R)$
 ($1 < p$) については、non-tangential の条件は不要になる。

参考文献

- [1] Earle, C. and Marden, A., On Poincaré series with applications to H^p spaces on bordered Riemann surfaces. Illinois J. Math. 13(1969), 202-219.
- [2] Heins, M. Symmetric Riemann surfaces and boundary problems. Proc. London. Math. Soc. 14a (1965) 129-143.
- [3] Heins, M. Hardy classes on Riemann surfaces. Lecture notes in Math. 98. Springer. (1969)
- [4] Rodin, B. and Sario, L. Principal functions. Van Nostrand (1966).
- [5] Royden, H. L. Boundary values of analytic and harmonic functions. Math. Z. 78 (1962), 1-24.

[5] Rudin, W. Analytic functions of class H^p .
 Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46-66