

$(m^2 I - \Delta)^{\lambda}$ の anti-locality について.

村田 実 (者立大. 理)

増田 久弥 (東大. 理)

量子場の作用素 Δ によって生成された作用素環に関する問題との関連で, H. Reeh と S. Schlieder は, [3] の中で, $(m^2 I - \Delta)^{1/2}$ は, anti-local であることを示した. anti-local とは, ある $\mathbb{R}^N$ の中の開集合 U があって, $f(x) = (m^2 I - \Delta)^{1/2} f(x) = 0$ ($x \in U$) をみたす $L^2(\mathbb{R}^N)$ 関数は, 恒等的にゼロなるものにかぎるときいう. その後, I. Segal と R. Goodman [4] は, 空間次元 N が奇数のとき, $(m^2 I - \Delta)^{\lambda}$ (λ : 非整数) がやはり anti-local であることを示した. 最近講演者の一人 (村田) が, 奇数次元という条件をのぞいた. このレポートは, 2つある. [1] $(m^2 I - \Delta)^{1/2}$ が anti-locality をもつこと, 簡単な証明を与える

[20] $(m^2 I - \Delta)^\lambda$ が anti-locality をもつことを証明.

§1. 楕円型作用素の $\frac{1}{2}$ べきの anti-locality.

Ω ; $\mathbb{R}^N$ の 有界な領域 Ω をもつ領域
とし, $L^2(\Omega)$ の中の作用素 A を次の如く定める.

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(\Omega); u = 0 \text{ } (\Omega \text{ の境界上})\}$$

$$Au = \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}) + a(x)u$$

($H^2(\Omega)$; リボレ空間). $a(x)$ は係数に關して次の

仮定をおく.

(H-1) $a_{jk}(x)$ は, $\overline{\Omega}$ 上に一様有界且 1 階連続的
微分可能な実数値函数; $a(x)$ は, $\overline{\Omega}$ 上に一様有界且
連続な実数値函数.

(H-2)

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \delta |\xi|^2 \quad (\delta > 0)$$

$x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$

$$a(x) \leq 0. \quad (x \in \Omega)$$

この時, 次の定理が成立.

定理. $(-A)^{1/2}$ は anti-local 有性質をもつ。
 $(-A)^{1/2}$ は, 自己共役作用素 $-A$ の空間に
 表示によって定義される。

証明. $-A$ は, 明らかに, 下に有界な自己共役
 作用素より,

$$U(t) = e^{it(-A)^{1/2}} \quad -\infty < t < \infty$$

は, $L^2(\mathcal{N})$ 中, 有界作用素。1-パラメータ群をなす。

$$u(x, t) = (U(t)f)(x) \quad (x \in \mathcal{N})$$

は, 次の性質をもつ。

$$(i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au$$

すなわち,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}) + a(x)u$$

$$(ii) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = i(-A)^{1/2} f(x)$$

仮定より,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathcal{U})$$

であつ、且 u は、波動方程式の解であつ、

$\exists t_0 > 0$, $\exists U_0$ (U_0 有界集合);

$$u(x, t) = 0 \quad 0 < t < t_0, \quad x \in U_0.$$

すなわち、 $\forall y \in C_0^\infty(U_0)$ に対し、

$$(u(\cdot, t), y)_{L^2} = 0 \quad 0 < t < t_0.$$

故に、

$$F(z) = (\exp(iz(-A)^{1/2}) f, y)_{L^2} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

は、次の性質をもつ

(i) $F(z)$ は、 $\operatorname{Im} z > 0$ での正則、 $\operatorname{Im} z \geq 0$ での連続。

$$(ii) \quad F(t) = (u(\cdot, t), y)_{L^2}$$

$$(iii) \quad F(t) = 0 \quad 0 < t < t_0.$$

すなわち、Schwartz の鏡像定理より、 $F(z)$ は、 $(0, t_0)$ を通り、下半面に正則に延長される。(iii) より

$$F(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \geq 0)$$

時に、

$$F(t) = (u(\cdot, t), y)_{L^2} = 0 \quad -\infty < t < \infty.$$

すなわち $\varphi \in \mathcal{G}$ のとき

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \mathcal{U}_0, \quad -\infty < t < \infty,$$

解、一意性定理より、(17)

$$u(x, t) = 0 \quad x \in \mathcal{U}, \quad -\infty < t < \infty$$

時に、

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \quad x \in \mathcal{U}.$$

これは、定理を証明している。

§2. ラプラス作用素のある種の関数の反局所性.

$h \in C^\infty([0, \infty))$ と、その任意の導関数が多項式増大度とこのような関数とし、 $\mathcal{S}(E_n)$ における作用素 $h(-\Delta)$ と、

$$h(-\Delta)f = \mathcal{F}^{-1}(h(\xi^2)\hat{f}(\xi)), \quad f \in \mathcal{S}(E_n)$$

により定義する。

そのとき、次の定理が成立する。

定理. 仮定: $g(t) = h(t^2)$ といふとき, $g(t)$ が次の性質 (i) ~ (iii) をもつ.

(i) $g(t)$ はある $R > 0$ に対して $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ で実解析的であり, かつ,

$g|_{(R, \infty)}$ と $g|_{(-\infty, -R)}$ はそれぞれ,

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, -R] \cup \{t; |t| \leq R\}$$

$$\mathbb{C} \setminus [R, \infty) \cup \{t; |t| \leq R\}$$

に解析接続される. その内核をそれぞれ $g_1(t)$, $g_2(t)$ とする.

(ii) $\exists C, \exists N$ s.t. $|g_j(t)| \leq C(1+|t|)^N$, $j=1, 2$
for $\forall |t| \geq R$ and $\text{Im } t \neq 0$.

(iii) $g_2(t) - g_1(t) \neq 0$, in $\{t; \text{Im } t < -R\}$
and $\{t; \text{Im } t > R\}$

結論: $h(-\Delta)$ は局所性をもつ. 即ち,

ある空でない開集合 V があって,

$$f|_V = h(-\Delta)f|_V = 0 \text{ ならば } f=0.$$

証明. $n=1$ の場合. $f \in H^2 f (\equiv h(-\frac{d^2}{dx^2})f)$

が $(-\delta, \delta)$ で消えれば, $f=0$, と示せばよい.

$f_{\pm}(x) = \gamma(\pm x) f(x)$ とおく. ここで $\gamma(x)$ は Heaviside の関数. 我々は, まづ次のことを要請する.

$$Hf_+(x) = e^{2\pi R} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta}^{\infty} (D_x - i)^k \left(\frac{1}{x-y} \right) g_+(y) dy \quad (*)$$

$$+ F_+(x) \quad \text{in } (-\infty, \delta)$$

ここで $g_+(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}((\xi - i)^{-k} (g_2 - g_1)(\xi - 2Ri) \hat{f}_+(\xi - 2Ri))$ は L^2 -関数で, $F_+(x)$ は entire function.

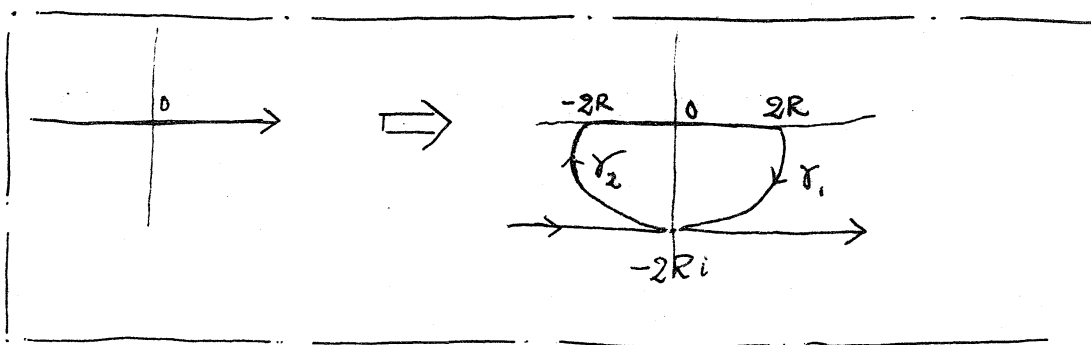
積分路をかくことにしよう.

$$Hf_+(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi^2) \hat{f}_+(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$= e^{2\pi R} \int_{-\infty}^0 g_2(\xi - 2Ri) \hat{f}_+(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$+ \int_{\gamma} g(\xi) \hat{f}_+(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

$$+ e^{2\pi R} \int_0^{\infty} g_1(\xi - 2Ri) \hat{f}_+(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$



$$\text{ここで } g(\xi) = \begin{cases} g_2(\xi) & \text{on } \gamma_2 \\ g(\xi) & \text{on } [-2R, 2R] \\ g_1(\xi) & \text{on } \gamma_1 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma_2 + [-2R, 2R] + \gamma_1$$

$F_+(x) \equiv \int_{\delta} g(\xi) \hat{f}_+(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ は entire function であるから、 σ -項と σ -項を問題にすればよい。

$\text{Supp } f_+ \subset [\delta, \infty)$ 故 $e^{i\delta\xi} \hat{f}_+(\xi)$ は下半平面で正則かつ polynomial growth at infinity である。従って、適当な自然数 k に対して、

$$\psi_j(\xi) \equiv e^{i\delta\xi} (\xi-i)^{-k} g_j(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri), (j=1,2)$$

は Hardy class に属する。

$$\begin{aligned} \text{従って、} \quad \mathcal{F}^{-1}((\xi-i)^{-k} g_j(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri))(x) \\ = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i\delta\xi} \psi_j(\xi))(x) \\ = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j)(x-\delta) \end{aligned}$$

が $(-\infty, \delta)$ で vanish することに注意すれば、

$(-\infty, \delta)$ において

$$\begin{aligned} & e^{22R} \mathcal{F}^{-1}(\gamma(\xi) g_1(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri)) \\ & + e^{22R} \mathcal{F}^{-1}(\gamma(\xi) g_2(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri)) \\ & = e^{22R} (D_x - i)^k \left\{ \mathcal{F}^{-1}((\xi-i)^{-k} g_1(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri)) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{F}^{-1}(\gamma(\xi) (\xi-i)^{-k} (g_2 - g_1)(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri)) \right\} \\ & = e^{22R} (D_x - i)^k \left\{ \mathcal{F}^{-1}(\gamma(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}((\xi-i)^{-k} (g_2 - g_1)(\xi-2Ri) \hat{f}_+(\xi-2Ri)) \right\} \\ & = e^{22R} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta}^{\infty} (D_x - i)^k \left(\frac{1}{x-y} \right) g_+(y) dy \end{aligned}$$

これで、(*) が証明された。

同様にして

$$Hf_-(x) = e^{-2xR} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\delta} (Dx+i)^k \left(\frac{1}{x-y}\right) g_-(y) dy \\ + F_-(x), \quad \text{in } (-\delta, \infty)$$

$$\therefore g_-(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}((\xi+i)^{-k} (g_2 - g_1)(\xi+2Ri) \hat{f}_-(\xi+2Ri))$$

は L^2 -関数で、 $F_-(x)$ は entire function.

従って、 $(-\delta, \delta)$ にあつて

$$Hf(x) = e^{2xR} G_+(x) + e^{-2xR} G_-(x) + F_+(x) + F_-(x)$$

$$\therefore G_{\pm}(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (Dx \mp i)^k \left(\frac{1}{x-y}\right) g_{\pm}(y) dy$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Supp } g_+ \subset [\delta, \infty), \quad \text{Supp } g_- \subset (-\infty, -\delta] \\ \text{に注意せよ。} \end{array} \right)$$

$$\text{仮定より } Hf(x) = 0 \quad \text{in } (-\delta, \delta)$$

であるから $G_{\pm}(x)$ はそれぞれ、全平面 $\mathbb{C}$ に解析接続される。従つて

$$0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{ G_+(x-i\varepsilon) - G_+(x+i\varepsilon) \} = (D-i)^k g_+(x) \\ \text{in } \mathcal{S}'(E_1).$$

$$0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{ G_-(x-i\varepsilon) - G_-(x+i\varepsilon) \} = (D+i)^k g_-(x) \\ \text{in } \mathcal{S}'(E_1).$$

Fourier変換することにより

$$\begin{aligned} (q_2 - q_1)(\xi - 2Ri) \hat{f}_+(\xi - 2Ri) &= 0, \quad \forall \xi \in E_1^* \\ (q_2 - q_1)(\xi + 2Ri) \hat{f}_-(\xi + 2Ri) &= 0, \quad \forall \xi \in E_1^* \end{aligned}$$

故に $f = 0$.

$q \in d$.

次に一般の場合を証明する。そのために E_j の上の Laplace 作用素に対して $H_j = h(-\Delta)$ on $\mathcal{S}(E_j)$ とおく。 $\mathcal{S}(E_j)$ の上の Fourier 変換を $\mathcal{F}_j$ と表示する。

$n = \text{奇数}$ の場合. H_n が convolution と可換であるから、 C^∞ -関数に対して証明すればよいことをまず注意しよう。

球対称な関数に対して、 H_n の反局所性を示すために次の Lemma をつかう。

Lemma. (Segal - Goodman [4] lemma 3)

$f \in C^\infty(E_n) \cap \mathcal{S}(E_n)$ を原点の近傍で vanish する関数とする。この様な関数 f に対して作用素 D を

$$Df = \mathcal{F}_1^{-1} |\xi|^{n-2} \cdot \mathcal{F}_n f$$

と定義する。このとき、もし $n = 2k+1$ ならば、次の性質 1), 2), 3) が成立する。

$$1) \quad \exists C_{\alpha\beta} \quad \text{s.t.} \quad Df = \sum_{\substack{\alpha \leq k \\ \beta \leq k-1}} C_{\alpha\beta} r^\alpha \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial r} \right)^\beta f$$

$$2) \quad H_1 Df = D H_n f$$

$$3) \quad Df = 0 \quad \text{ならば} \quad f = 0.$$

この Lemma から f と $H_n f$ が原点の近傍で vanish するならば、 Df と $H_1(Df) = D(H_n f)$ が原点の近傍で vanish する。 H_1 は反局所性をもつから $Df = 0$, 従って $f = 0$ が従う。

対称な場合への reduction については, Segal - Goodman [4] をみられたい。

$n = \text{偶数}$ の場合. まず次の等式:

$$H_{n+1}(f \otimes 1) = H_n f \otimes 1 \quad \forall f \in \mathcal{S}'(E_n)$$

を示そう。実際、 $\hat{f}$ が compact support ならば:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(f \otimes 1) &= \mathcal{F}^{-1} (h(|\xi|^2 + \xi_{n+1}^2) \cdot \hat{f}(\xi) \otimes 2\pi \delta(\xi_{n+1})) \\ &= \langle \hat{f}(\xi) \otimes 2\pi \delta(\xi_{n+1}), h(|\xi|^2 + \xi_{n+1}^2) (2\pi)^{-n-1} e^{ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \langle \hat{f}(\xi), h(|\xi|^2) (2\pi)^{-n} e^{ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \mathcal{F}_n^{-1} (h(|\xi|^2) \hat{f}(\xi)) \\ &= H_n f \otimes 1 \end{aligned}$$

$\hat{f}$ が compact support でないときは等式の $\mathcal{S}'$ における連続性による。

さて f と $H_n f$ が 原典の近傍で *vanish* すると仮定しよう。この時、 $F \equiv f \otimes 1$ と $H_n F = H_n f \otimes 1$ もやはり 原典の近傍で *vanish* するから、 H_{n+1} の反局所性により、 $F = 0$ 、従って $f = 0$ 。 *q.e.d.*
(証明おわり)

次に定理の応用として反局所性をもつ作用素の例をいくつかあげよう。

例 1. $(m^2 I - \Delta)^\lambda$ (λ : non-integral number)

例 2. $p(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$ を、次の性質

$$-\pi < \arg p(t) < \pi, \quad p(t) \neq 0, \quad \forall t \geq 0$$

をもつ複素係数多項式とする。このとき、

$$(a_0 (-\Delta)^m + a_1 (-\Delta)^{m-1} + \dots + a_m)^\lambda \quad (m\lambda \in \mathbb{Z})$$

は $\mathcal{S}(E_n)$ で反局所性をもつ。

例 3. $p(t)$ を上に述べた多項式として、

$\text{Log}(a_0 (-\Delta)^m + \dots + a_m)$ は $\mathcal{S}(E_n)$ で反局所性をもつ。

例 4. $(-\Delta)^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{2}$)

は $L^2(E_n)$ で反局所性をもつ。(証明は全く同様にしてできる。)

従って Riesz 変換 $Rf = (R_1 f, \dots, R_n f)$

も $L^2(E_n)$ で反局所性をもつ。

($\sum_{j=1}^n D_j R_j = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ に注意せよ。)

文 献

[1] Masuda, K. A unique continuation theorem for solutions of wave equations with variable coefficients. J. Math. Anal. Appl., 21 (1968) 369-576

[2] Murata, M., to appear

[3] Reeh, H. and Schlieder, S.: Bemerkungen zur Unitaräquivalenz von Lorentzinvarianten Feldern. Nuovo Cimento. 22 (1961) 1051-1068

[4] Segal, I., - Goodman R., Anti-locality of certain Lorentz invariant operators. J. Math. Mech., 14 (1965) 629-638.