

Lauricella の超幾何関数 F_D の変換公式 と Garnier 系

東大教養 木村弘信 (Hironobu Kimura)

§1. F_D の変換公式 $m=(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ に對し, $|m| = m_1 + \dots + m_n$ と書き, 変数 $s=(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ に對し, $s^m = s_1^{m_1} \dots s_n^{m_n}$ と略記する。複素パラメータ $v=(v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}$ が与えられるとき, 超幾何級数 $F_D(v, s)$ は

$$F_D(v, s) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(v_0, |m|)(v_1, m_1) \dots (v_n, m_n)}{(v_{n+1}, |m|)(1, m_1) \dots (1, m_n)} s^m$$

で与えられる。ここで $(\alpha, k) = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ である。 $v_{n+1} \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば, $F_D(v, s)$ は $\max |s_i| < 1$ を収束し, ここで正則関数を与える。 $F_D(v, s)$ は次の完全積分可能な系:

$$(1) \quad s_i(1-s_i)\partial_i^2 u + (1-s_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s_j \partial_i \partial_j u + [v_{n+1} - (v_0 + v_i + 1)s_i] \partial_i u \\ - v_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s_j \partial_j u - v_0 v_i u = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

を満足し, $F_D(v, s)$ は $0 \in \mathbb{C}^n$ における正則な解を初期値 1 とするものとして特徴づけられる。 (1) の解空間を $\mathcal{S}(v)$ と書く。

Def. 系(1)の変換とは、 $Q: (S, u) \rightarrow (S, U)$, $S \rightarrow S$ は双有理変換、 $u \rightarrow U$ はゲージ変換、及び $Q_*: \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$ で $Q_* S(u) = S(Q(u))$, $\forall u \in \mathbb{C}^n$ が成立するものを言う。

さて、 Q_* が $\mathbb{C}^{n+2}$ の線形変換となるものの中で、次のものが知られている。

Prop. 1[5] 系(1)の変換のなす群 H で、 $(n+3)$ 次対称群 S_{n+3} に同型なものが存在する。

具体的には H の generators として次のものがとれる。

$H = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1} \rangle$ としたとき

$$Q_0: S_j = \frac{1}{s_j}, U = s_1^{-v_1} \cdots s_n^{-v_n} u$$

$Q_m (m=1, \dots, n):$

$$S_j = \begin{cases} \frac{s_m - s_j}{s_m - 1} & (j \neq m) \\ \frac{s_m}{s_m - 1} & (j = m) \end{cases}, U = (1 - s_m)^{-v_0} u$$

$Q_{n+1}:$

$$S_j = \frac{s_j}{s_{j-1}}, U = (1 - s_1)^{-v_1} \cdots (1 - s_n)^{-v_n} u$$

この小論の目的は、 H が、ポアンカレ方程式 P_n の偏微分方程式系への拡張であるガリニエ系 G_n の対称性より自然に得られることを注意することである。

§ 2. ガリニエ系

$\mathbb{CP}^1$ 上の Fuchs 型微分方程式

$$(2) \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

を考える。特異点集合は $S_t = \{t_0=0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}=1, t_{n+2}=\infty, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ とし、このうち $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ は見掛けの特異点とする。各特異点における特性指数を Gauge 変換により normalize することにより、(2) の Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=t_i & x=\lambda_k & x=\infty \\ 0 & 0 & \nu \\ e_i & 2 & \nu + \theta_\infty \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} i=0, 1, \dots, n+1 \\ k=1, \dots, m \end{array}$$

で与えられると仮定する。ここで、Fuchs の関係式を用いれば $\nu = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i \right)$ である。簡単な計算により、(1) の係数は次のように書ける：

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1-\theta_i}{x-t_i} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{x-\lambda_k}$$

$$B(\alpha) = \frac{\kappa}{\alpha(\alpha-1)} - \sum_{i=1}^n \frac{t_i(t_i-1)K_i}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-t_i)} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k(\lambda_k+1)\mu_k}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-\lambda_k)}$$

ここで $\kappa = \nu(\nu + \theta\omega)$ である。 $\alpha = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ が互異
 けの特異点であることより、 K_i 達は (t, λ, μ) の有理関数と
 して次で定まる：

$$K_i = M_i \sum_r M^{r,i} \left\{ \mu_r^2 - \mu_r \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\theta_j}{\lambda_r - t_j} + \frac{\kappa}{\lambda_r(\lambda_r+1)} \right\}$$

ここで、 $M_i, M^{r,i}$ は $T(\alpha) = \prod_{i=0}^{n+1} (\alpha - t_i)$, $\Lambda(\alpha) = \prod_{k=1}^n (\alpha - \lambda_k)$
 を用いて

$$M_i = -\frac{\Lambda(t_i)}{T(t_i)}, \quad M^{r,i} = \frac{T(\lambda_r)}{(\lambda_r - t_i)\Lambda(\lambda_r)}$$

で定義される。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ は特性指数からは定
 まらない量である。 さて、(2) のモノドロミー保存変形を考
 えよう。 すなわち、(2) で $t = (t_1, \dots, t_n)$ を動かしたとき、
 そのモノドロミー表現で t によらないものが存在するよう
 に λ, μ を定めることを考える。

Th.2 [6]. (2) のモノドロミー保存変形は、次の完全積分
 可能な、ハミルトン系で記述される：

$$G_n \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial K_i}{\partial \lambda_j} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ハミルトン系 G_n を ガリニエ系 と呼ぶ。

以下で我々が F_D との関連を考察するのは、 G_n ではなく、 G_n より、適当な有理変換を通じて得らる方程式系である。有理変換を考える理由は次のように説明できる。 G_n の $n=1$ の場合に相当する Painlevé 方程式 P_1 は、動く分岐点をもたないという性質 (Painlevé property) により特徴づけられる方程式であるが $n \geq 2$ の場合、 G_n は動く代数的分岐点を持つ [6]。そこで、これを解消するために、変換 $\Phi: (t, \lambda) \rightarrow (s, \varrho)$ を

$$\Delta_i = \frac{t_i}{t_i - 1}, \quad \varrho_i = -t_i N_i \quad (i=1, \dots, n)$$

を定義する。 ϱ_i 達は $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の対称関数である。更に

$$\begin{array}{ccc} B \times T^* \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\Phi^*} & B \times T^* \mathbb{C}^n \\ \begin{array}{c} (t, \lambda, \mu) \\ \downarrow \\ B \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow \\ (t, \lambda) \end{array} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Phi \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ B \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow \\ (s, \varrho) \end{array} \\ & & \downarrow \\ & & (s, \varrho) \end{array}$$

とする。 $T^* \mathbb{C}^n$ の fiber 方向での写像は直線として $\Phi_* = (\Phi^*)^{-1}$ が構成でき、 P が t, λ, μ の有理関数として定まる。

Th.3 [2] 正準変換 Φ_* により G_n は次のハミルトン系に移される。

$$G_n : \quad \frac{\partial q_j}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial \Delta_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j} \quad (i, j=1, \dots, n)$$

$$H_i = \frac{1}{\Delta_i(\Delta_i-1)} \left[\sum_{j,k=1}^n E_{jk}^i(s, q) p_j p_k - \sum_{j=1}^n F_j^i(s, q) p_j + k q_i \right]$$

ここで $E_{jk}^i, F_j^i \in \mathbb{C}(s)[q]$ は $E_{jk}^i = E_{kj}^i = E_{ik}^j, F_j^i = F_i^j$ を満たす。

具体的には E_{jk}^i, F_j^i は次で与えられる。

$$E_{jk}^i = \begin{cases} q_i q_j q_k & (i \neq j \neq k \neq i) \\ q_i q_j (q_j - \Gamma_i^j) & (i \neq j = k) \\ q_i (q_i - 1)(q_i - s_i) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_k^i q_i q_k & (i = j = k) \end{cases}$$

$$F_j^i = \begin{cases} \eta q_i q_j - \theta_j \Gamma_i^j q_i - \theta_i \Gamma_j^i q_j & (i \neq j) \\ (\theta_0 + 1) q_i (q_i - 1) + \theta_{n+1} q_i (q_i - s_i) + \theta_i (q_i - 1)(q_i - \Delta_i) \\ \quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \{ \theta_k q_i (q_i - \Gamma_k^i) - \theta_i S_k^i q_k \} & (i = j) \end{cases}$$

$$\Gamma_j^i = \frac{\Delta_i(\Delta_j - 1)}{\Delta_j - \Delta_i}$$

$$S_j^i = \frac{\Delta_i(\Delta_i - 1)}{\Delta_i - \Delta_j}$$

$$\eta = \sum_{i=0}^n \theta_i - 1$$

この結果と、Miwa [4], Malgrange [3] の結果より

系 G_n は Painlevé property を満たす。

§3. G_n の対称性.

G_n の対称性とは、 (S, g, P) の双有理的な正準変換のなす群であって、パラメータ $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{n+1}, \theta_{n+2})$ の変換を除いて、 G_n を不変にするものと言う。すなわち、

$Q: (S, g, P) \rightarrow (S, Q, P)$ を変換とすると、 $Q \cdot G_n(\theta) = G_n(Q \cdot \theta)$ となるものである。

Prop. 4 G_n の対称性として、 $(n+3)$ 次対称群 G_{n+3} に同型なものが存在する。

証明の概略. 線形方程式 (2) において、 $\mathbb{CP}^1$ の正則変換で S_t を $\{0, 1, \infty, t_1^*, \dots, t_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}$ に移す。例えば ∞ を固定し、 0 と 1 を入れ換える変換は、 $z = 1 - \alpha$ で与えられる。方程式 (1) が

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + P_1(z) \frac{dy}{dz} + P_2(z) y = 0$$

に移ったとすると、(3) の特異点は $\{0, 1, \infty, 1-t_1, \dots,$

$1-t_n, 1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_n\}$ である。そこで、これを $\{0, 1, \infty, t_1^*, \dots, t_m^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}$ とおき、更に、

$$\mu_i^* = \operatorname{Res}_{z=\lambda_i^*} P_2(z), \quad K_i^* = -\operatorname{Res}_{z=t_i^*} P_2(z).$$

とある。(2) のモノドロミ-保存変形は、自然に (3) の Σ を誘導し、変形は再び G_n で与えられる。但しパラメータ達は置換 $Q_*(\theta_0, \dots, \theta_{n+2}) = (\theta_{n+1}, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta_0, \theta_{n+2})$ を受ける。このようにして、 $n+3$ の特異点の入れ換えに対応して、 G_{n+3} に同型の群が構成される。これを Φ_* によつて G_n の変換群にもち上げるのである。略証終

具体的には、群 $\Gamma = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{n+1} \rangle$ と生成元で書くと、 σ_i 達は次で与えられる。

$$\sigma_0: S_j = \frac{1}{s_j}, \quad Q_j = \frac{q_j}{s_j}, \quad P_j = s_j p_j$$

$$\sigma_{n+1}: S_j = \frac{s_j}{s_j - 1}, \quad Q_j = \frac{q_j}{\omega_j - 1}, \quad P_j = -(\omega_j - 1) \left\{ \nu - p_j + \sum_{a=1}^n q_a p_a \right\}$$

$$\sigma_m \quad (m=1, \dots, n):$$

$$S_j = \begin{cases} \frac{s_m - s_j}{s_m - 1} & (j \neq m) \\ \frac{s_m}{s_m - 1} & (j = m) \end{cases}$$

$$Q_j = \begin{cases} \frac{q_j}{\Gamma_m^j} & (j \neq m) \\ -(\omega_s - 1) \frac{\Delta_m}{\Delta_m - 1} & (j = m) \end{cases}$$

$$P_j = \begin{cases} \Gamma_m^j (p_j - \frac{\Delta_m}{\Delta_j} p_m) & (j \neq m) \\ (\Delta_m - 1) p_m & (j = m) \end{cases}$$

$$\text{ニニ} \quad \omega_1 = \sum_{a=1}^n q_a, \quad \omega_s = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{\Delta_a}.$$

特に F は次の元を命ることが計算を分る。

$$\tau_m = (\sigma_0 \circ \sigma_m) \circ \sigma_{m+1} \circ (\sigma_0 \circ \sigma_m)^{-1} \quad (m=1, \dots, n):$$

$$S_j = \begin{cases} \frac{\Delta_j}{\Delta_m} \\ \frac{1}{\Delta_m} \end{cases}, \quad Q_j = \begin{cases} -\frac{q_j}{q_m} \\ \frac{1}{q_m} \end{cases}, \quad P_j = \begin{cases} -q_m p_j \\ q_m (\nu - \sum_{a=1}^m q_a p_a) \end{cases}$$

§4. G_m と F_D の関係

ニニでは、 G_m のパラメータ $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{m+1}, \theta_\infty)$ が $\nu(\nu + \theta_\infty) = 0$ を満たすとき、 G_m の特殊解として、 F_D があらわれることを示す。

$\mathbb{P}^n$ 上のアファインバンドル $\sum$ を次のように定義する。 $(z_0, z_1, \dots, z_m)$ を $\mathbb{P}^n$ の斉次座標とし、 $U_i = \{$

$z \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0$ } における非斉次座標を $z^i(z_0^i, \dots, z_{i-1}^i, z_{i+1}^i, \dots, z_n^i)$, $z_R^i = z_R/z_i$ とする。 $U_i \times \mathbb{C}^n \ni (z_i, \zeta_0^i, \dots, \zeta_{i-1}^i, \zeta_{i+1}^i, \dots, \zeta_n^i)$ と $U_j \times \mathbb{C}^n \ni (z_j, \zeta_0^j, \dots, \zeta_{j-1}^j, \zeta_{j+1}^j, \dots, \zeta_n^j)$ は次の関係があるときに同一視する。

$$z_R^i = \begin{cases} z_R^j / z_i^j & (R \neq i, j) \\ 1 / z_i^j & (R = j) \end{cases}$$

$$\zeta_R^i = \begin{cases} z_i^j \zeta_R^j & (R \neq i, j) \\ z_i^j (\nu - \sum_{a=1}^n z_a^j \zeta_a^j) & (R = j) \end{cases}$$

$\bigcup_{i=0}^n U_i \times \mathbb{C}^n$ 上の同一視によつて、やはり合せた多様体 $\sum_\nu$ と書く。 $(U_0 \times \mathbb{C}^n) \times B \cong \mathbb{C}^{2n} \times B$ に注意し、 G_n が $(U_0 \times \mathbb{C}^n) \times B$ を定義されているものと考えよ。この時、 τ_m ($m=1, \dots, n$) によつて G_m が再び G_n に移されることに注意すれば次の事が今ある。

Prop. 5. G_m は $\sum_\nu \times B$ 上のハミルトン系に延長される。更に、ハミルトニアンは $\sum_\nu$ の座標についての多項式である。

Rem. $\nu=0$ のとき $\sum_0 \cong T^*\mathbb{P}^n$ 。従つて $\mathbb{P}^n$ に同型な部分多様体 (零切断) をもつ。

G_n と F_D の関係は次で与えられる。

Prop. 6. $\theta \in \mathbb{C}^{m \times 3}$ が $K = V(V + \theta_\infty) = 0$ を満たすとき、 G_n は次の特殊解をもつ：

$$\begin{cases} Q_i(s) = \eta^{-1} \Delta_i(\Delta_i - 1) \frac{\partial}{\partial \Delta_i} \log \prod_{k=1}^m (\Delta_k - 1)^{\theta_k} u(\Delta) \\ P_i(\Delta) \equiv 0. \end{cases}$$

ここで $u(\Delta)$ は方程式系 (1) の任意の解 $\in \mathcal{S}(1 - \theta_m, \theta_1, \dots, \theta_n, \sum_{k=0}^n \theta_k)$ 。

証明の概略. G_n において $P_i \equiv 0$ ($i=1, \dots, n$) とおくとハミルトニアン H_i ($i=1, \dots, n$) の形から、 $(\partial H_i / \partial q_j)(s, q, 0) \equiv 0$ 。従って G_n のオ2方程式は自明に成立する。 G_n は

$$(4) \quad \frac{\partial q_j}{\partial \Delta_i} = -F_{ij}^i(s, q) \quad (i, j=1, \dots, m)$$

に reduce する。一才、Prop. とその Remark により、(1) は $\mathbb{P}^m \times B$ 上の方程式に延長さし、 $s^0 \in B$ で $Q(s^0) = Q^0 \in \mathbb{P}^n$ なる解 $Q(s; s^0, Q^0)$ は、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q^0 & \longmapsto & Q(s; s^0, Q^0) \end{array}$$

により $\mathbb{P}^n$ の解析自己同型をひきおこす。 $\mathbb{P}^n$ の自己同型が $\mathbb{C}^{m+1}$ の線形変換より書かれるから、 $Q(s; s^0, Q^0)$ は線形方程

式の解を用いて書かせるはずであるが、実際、(4)の任意の解 $g(s)$ に対して $\omega = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(s)}{\Delta_i(\Delta_{i-1})} d\Delta_i$ が closed であることが $F_j'' = F_j'$ より確かめられることより、 $\omega = \eta' d \log \prod_{k=1}^m (\Delta_k - 1)^{\theta_k} u(s)$ と $u(s)$ を導入すると、 $u(s)$ は方程式 (1) において $v = (1 - \theta_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_n, \sum_{k=0}^n \theta_k)$ としてものの解であることが分る。略証終。

§5. F の $F_0 \wedge$ の作用

群 F の生成元 σ_i ($i=0, 1, \dots, m+1$) の具体的な形より、パラメータ $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m+1}, \theta_\infty)$ が関係式 $p=0$ を満たすとき、 F の元は $p=0$ を $P=0$ に移すことが分る。よって §4 で構成した $G_n(\theta)$ の特殊解を再び $G_n((\sigma, \theta))$ の特殊解に移す。この事実をまとめて、

Th. 7. G_m の対称性の群 $F (\triangleq S_{m+3})$ は F_0 のみたす方程式系の解空間に作用する。

Rem. F の形より、§1 の変換連 Q_i はすべて F から誘導される変換連に含まれる。

参考文献

- [1] H. Kimura ; Feuilletage associé au système de Garnier. (preprint).
- [2] H. Kimura, K. Okamoto ; On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pures et appl. 63 (1984) 129-146.
- [3] B. Malgrange ; Sur les déformations isomonodromiques I. singularités régulières, Séminaire de l'E.N.S. 1978-1982
- [4] T. Miwa ; Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ -functions, Publ. RIMS 17 (1981) 703
- [5] J. Miller ; Encyclopedia of Mathematics, Academic Press. 1977
- [6] K. Okamoto ; Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 1986.