

和算における連立代数方程式を解くアルゴリズム

四日市大学・関孝和数学研究所

上智大学名誉教授

森本光生 (MORIMOTO, Mitsuo)

Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi University

1 はじめに

2008 年は関孝和の没後 300 年で、『関孝和のひとと業績』[10]、『建部賢弘の数学』[11]、『関孝和の数学』[12]、『関孝和論序説』[13] などが出版された。また、来る 2014 年は建部賢弘の生誕 350 年に当たる。この年にも、多くの和算研究書の出版を期待したい。

さて、関孝和・建部賢弘時代の和算の代数方面の主題は、連立の代数方程式を解くアルゴリズムを開発することであった。行列式の発見は関孝和の大業績だと高らかに言われているが、彼の主要なる目的は連立の代数方程式を解くことにあり、行列式の「発見」はその副産物にすぎない。関孝和の所謂、行列式に関する業績は、佐藤賢一 [3]、小松彦三郎 [7] の論争によって問題点が明らかになってきた。(後藤・小松 [6] も参照。)

そもそも、連立 1 次方程式は別に行列式を知らずとも解くことが出来る。行列式により連立 1 次方程式の解を表示する、所謂、クラメールの公式は、きれいな形をしているが、実際に解を求めるときには計算量が多すぎて、役に立たない。むしろ、1 変数ずつ消去して解を求める方が実際的であることは、数値解析の常識である。

同様に、連立の代数方程式もまた、「終結式」を知らずにも解くことが出来る。ここでは、仮に「徒手空拳法」(無手勝流)と呼ぶ方法を紹介する。「一般開方術」を前提とすれば、この「徒手空拳法」(無手勝流)で、原理上、どのような連立代数方程式も解くことが出来る。「徒手空拳法」は極めて明快なアルゴリズムであるが、高次の代数方程式には最良の解法のアルゴリズムを与えない。したがって、関孝和も建部賢弘も言及していない。

関孝和と建部建部賢弘は、『発微算法』、『発微算法演段諺解』で、「2 乗化」、「3 乗化」の方法を使って、多くの連立代数方程式を解いた。これらは、汎用ではないが、彼らを取り扱った連立代数方程式では「徒手空拳法」よりも良い結果を与える。

関・建部の時代以前には、行列式も「終結式」も知られていなかった。その状況に戻って、関・建部の著作を読み、彼らが一般の「終結式」に考え至っていたのかどうかを考察するが本論の目的である。まず、『発微算法』の例題を一題、『大成算経』の巻十九より隠題を一題、巻十七より伏題を四題選んで、問題を紹介する。そのあとで、現代数学の立場から彼らの業績を俯瞰するために、線形代数学の行列式、終結式を復習する。最後に、『大成算経』巻十七の「交乘法」、「変乘法」、「消長法」の意味を述べることにする。

2 関孝和と建部賢弘の代数学の形成

2.1 立元の法（天元術）と一般開平術

数係数の1変数の代数方程式が与えられたときに、中国古来の開平術、開方術によって数値的に解くことができた。宋元時代には、一般の次数の開平術が知られていたが、日本に伝わったのかどうか定かでない。関孝和、建部賢弘など、日本の和算家たちは、一般次数の数係数の1変数の方程式ならば、原理上解くことのできるアルゴリズム「一般開平術」を独立に確立していた。

さらに、『算学啓蒙』の徹底的な理解によって、1変数多項式の多元環としての演算（代数演算）を完全にマスターした。これが天元術で、『解隠題之法』、『算学啓蒙演段診解』で確立した。建部賢弘は『綴術算経』の中では、天元術という術語を用いず、立元の法と呼んでいる。また、天元術の中に、「一般開平術」を含める研究者もいるが、ここでは区別する。

天元術を拡張した関孝和の傍書法では、文字係数の1変数多項式を扱うことが出来る。多変数の多項式も、ある変数について展開すれば、多項式係数の1変数多項式と書ける。たとえば、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を変数とする多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は x_n について展開すれば、

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_0(x') + A_1(x')x_n + A_2(x')x_n^2 + \dots + A_m(x')x_n^m \quad (1)$$

と書くことが出来る。ここで、 $A_i(x')$ は $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ の多項式である。このようにして、関孝和は『発微算法』（1674）において連立の代数方程式の問題を取り扱うことが出来た。また、建部賢弘は『発微算法演段診解』（1685）で関孝和の「演段」（多変数多項式の処理）を書き下すことが出来た。

2.2 連立代数方程式を解くアルゴリズム

一般に、 n 変数の n 個の多項式からなる、連立代数方程式、

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ P_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

を解くには、未知変数をつずつ消去して1変数の方程式にし、それに「一般開方術」を適用すればよい。

例えば、3変数の方程式 $P(x, y, z) = 0, Q(x, y, z) = 0, R(x, y, z) = 0$ が与えられたら、2変数多項式 $P_1(x, y), Q_1(x, y)$ で、2変数の方程式 $P_1(x, y) = 0, Q_1(x, y) = 0$ が同じ根を持つものを見つける。さらに、1変数多項式 $P_2(x)$ で、（数係数の）1変数方程式 $P_2(x) = 0$ が同じ根を持つものを見つける。最後の1変数方程式は「一般開平術」で根が求められるので、その根 x を $P_1(x, y) = 0$ に代入すれば、 y のみを変数とする数係数の1変数方程式が得られるので、「一般開平術」で根が求められる。最後に $P(x, y, z) = 0$ に求まった x, y を代入すれば、 z のみを変数とする数係数の1変数多項式が得られるので、「一般開平術」で根が求められる。

このアルゴリズムは、連立代数方程式 (2) にも適用でき、各変数毎に根が一つずつ求まるはずである。

3 連立代数方程式の例題

ここで、関孝和と建部賢弘が考察した連立代数方程式を紹介しよう。

3.1 『発微算法』より

未知数を多数含む場合の連立代数方程式をどのように解いたらよいのか、それが、関口一之が『古今算法記』（1670）の遺題 15 問で提出した問題で、関孝和はこの挑戦に対し『発微算法』で解答を与えた。

次の例題は、例えば、小川 [9] で考察されている。

『発微算法』第 6 問 いま、五つの立方体 A, B, C, D, E がある。ただし、 A と B の体積を併せると 700、 C, D, E の体積を併せると 500 である。 A, B, C, D, E の一辺の長さを求めよ。なお、 A, B, C, D, E の一辺の長さの差は順にすべて同じである。（問題には、 A から順に小さくなる立方体の絵が描かれている。）

A, B, C, D, E の一辺の長さをそれぞれ、 a, b, c, d, e とすると、

$$a^3 + b^3 = 700, \quad c^3 + d^3 + e^3 = 500, \quad a - b = b - c = c - d = d - e$$

すなわちこれは、5 元の連立代数方程式の問題である。『発微算法演段諺解』では、3 乗化の方法で解いている。（小川 [9] を参照。）

3.2 『大成算経』巻之十九の隠題

隠題とは、未知数を一つ準備すれば解ける問題のことである。小川東 [8] では、『大成算経』巻之十九隠題第六の一問を取り上げて解説している。原文の問いと答えを読み下す。

[第 19-06 問] ^{たとえば} 仮如、勾股有り。只云う、勾再自乗数と弦再自乗数と相 ^{あわ} 併せて共に一百五十二寸。又云う、股再自乗数と弦再自乗数と相併せて共に一百八十九寸。勾股を問う。 答えて曰く、勾三寸、股四寸。

勾股とは直角三角形で、勾と股は直角をはさむ二辺である。勾を x で、股を y で、弦を z で表すと、この問題は連立方程式

$$x^3 + z^3 = 152(= A) \quad \text{只云う} \tag{3}$$

$$y^3 + z^3 = 189(= B) \quad \text{又云う} \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{勾股弦（所謂、ピタゴラスの定理）} \tag{5}$$

の解 x, y を求めることになる。これは 3 元の連立代数方程式だが、「3 乗化」して容易に 1 変数の代数方程式に出来るので、隠題に分類されている。（小川 [8] を参照。）

3.3 『大成算経』巻之十七の伏題

『大成算経』巻之十七は、「全題解」と称し、見題篇、隠題篇、伏題篇、潜題篇と四つの部分に分かれている。この伏題篇の冒頭に、単伏としてふたつの例題（第 17-31 問と第 17-32 問）衆伏としてやはり二つの例題（第 17-33 問と第 17-34 問）がある。この節ではこの四つの例題を見ていきたい。

ちなみに、伏題とは二つ以上の未知数を用いて立式する問題をいい、単伏とは二つの未知数で良いもの、衆伏とは三つ以上の未知数を必要とする者をいう。

次は、伏題篇の第一問で、「単伏」とされている。問題文を読み下そう。

[第 17-31 問] ^{たとえば} 仮如、勾股有り。只言う。勾を実と為し平方に之を開き得る数と弦の和（若干）。又云う。勾股の和（若干）。勾を問う。

これは、『解伏題之法』の第 1 問と同問である。現代語に訳してみる。直角三角形において、勾を x 、股

を y 、弦を z で表す。

$$\sqrt{x} + z = A \quad \text{只云う} \quad (6)$$

$$x + y = B \quad \text{又云う} \quad (7)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{勾股弦の法則} \quad (8)$$

のとき、 x を求めるのが問題である。

「単伏」の第二問は次の通り。

[第 17-32 問] 仮如、方台有り。積（若干）。只云う、上下方と高さの和（若干）。又云う、下方冪と高冪相併せて（若干）。上方を問う。

これは、『解伏題之法』第 4 問と同問である。方台とは、底面が正方形の錐体を底面に平行な平面で頭を切り取った立体図形のことで、その体積の公式 (9) は、当時周知であった。方台の上面の正方形の一辺（上方）を x 、底面の正方形の一辺（下方）を y 、高さを h とする。

$$\frac{1}{3} \times (x^2 + xy + y^2) = V \quad \text{体積} \quad (9)$$

$$x + y + h = A \quad \text{只云} \quad (10)$$

$$y^2 + h^2 = B \quad \text{又云} \quad (11)$$

このとき、上方 x を求めるのが問題である。

次は、「衆伏」の第一問で、「単伏」より複雑になる。一般の三角形（三斜という）を扱う。まず、問題文を読み下す。

[第 17-33 問] 仮如、三斜有り。積（若干）。只云う、大斜再自乗数と中斜再自乗数と相併せ共に（若干）。又云う、中斜再自乗数と小斜再自乗数と相併せ共に（若干）。大斜を問う。

これは、『解伏題之法』第 2 問と同問である。

『関全集』[2] 120 頁には、題術弁議之法の解説がある。それによると三斜とは、一般の三角形で、その辺を大きい方から、大斜 a 、中斜 b 、小斜 c という。また、大斜を底辺と見たとき、その高さを「中股」 h といい、大斜を「中股」の脚で区切ったとき、小斜側を「短股」 t ということある。このテキストでは、「短股」は、「小股」と呼ばれている。

勾股弦の法則より、 $h^2 + t^2 = c^2$ および $h^2 + (a - t)^2 = b^2$ が成り立つので、辺々引けば、 $-a^2 + 2at = c^2 - b^2$ を得る。したがって、

$$t = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (12)$$

と短股（小股） t が求まる。三角形の面積は、 $S = \frac{ah}{2}$ だから、

$$16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2(c^2 - t^2) = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 \quad (13)$$

となる。以上が、この問題の予備知識である。

いま、三斜（三角形のこと）において、只云う数 A と又云う数 B

$$a^3 + b^3 = A \quad \text{只云} \quad (14)$$

$$b^3 + c^3 = B \quad \text{又云} \quad (15)$$

および面積 S が与えられているとする。(13) より、

$$-(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 = 16S^2 \quad (16)$$

が与えられている。問題は、大斜 a を求めることである。

(15) と (16) を c の連立方程式と見ると、解を持つ条件が、 a と b の代数方程式として書ける。それと、(14) を連立させて、 b に関する方程式と見ると、それが解を持つための条件が、数係数の 1 変数 a の代数方程式として求まる。それを「一般開方術」で解けば a が求まる。^{*1}

次の問題は、「衆伏」の第二問である。徐澤林が論文 [4] で例題として取り上げている。

[第 17-34 問] 仮如、^{たとえば} 甲乙丙丁の平方、各一有り。甲云う、甲方三乗冪、乙方再乗冪、丙方、丁方を相併せ (若干)。乙云う、甲方再乗冪、乙方冪、丙方再乗冪、丁方三乗冪相併せ (若干)。丙云う、甲方冪、乙方、丙方三乗冪、丁方再乗冪相併せ (若干)。丁云う、甲方、乙方三乗冪、丙方冪、丁方冪相併せ (若干)。甲方を問う。

甲方 x 、乙方 y 、丙方 z 、丁方 w が与えられたとする。

$$x^4 + y^3 + z + w = A, \quad \text{甲云} \quad (17)$$

$$x^3 + y^2 + x^3 + w^4 = B, \quad \text{乙云} \quad (18)$$

$$x^2 + y + z^4 + w^3 = C, \quad \text{丙云} \quad (19)$$

$$x + y^4 + z^2 + w^2 = D, \quad \text{丁云} \quad (20)$$

このとき、甲方 x を求めよというのが問題である。この問題は、『解伏題之法』には見当たらない。

4 変数の消去・・・徒手空拳法（無手勝流）

連立代数方程式 (2) は、二つの代数方程式から一つの変数を消去できれば、帰納的に解ける。そこで、 x_n を y 、 x' を x と記号を改めて、

$$\begin{cases} A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + \cdots + A_m(x)y^m = 0 \\ B_0(x) + B_1(x)y + B_2(x)y^2 + \cdots + B_m(x)y^m = 0 \end{cases} \quad (21)$$

なる連立代数方程式において、 y を消去することを考える。係数 $A_j(x)$, $B_j(x)$ は $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ の多項式である。連立代数方程式 (21) を m 次の両式と呼ぼう。「両式」とは、『解伏題之法』、『大成算経』巻之十七の用語である。

一般に、1. 最高次の係数を消す、2. 定数項の係数を消して y で割る、の二つの操作で、次数 m を一つ下げた方程式が二つできることは明らかであろう。

具体的には、(以下、係数多項式の (x) は略記する。) (前式) $\times B_m -$ (後式) $\times A_m$ とすると、最高次が消え、1 次低い多項式

$$(A_0B_m - B_0A_m) + (A_1B_m - B_1A_m)y + (A_2B_m - B_2A_m)y^2 + \cdots + (A_{m-1}B_m - B_{m-1}A_m)y^{m-1} = 0 \quad (22)$$

が得られる。また、(前式) $\times B_0 -$ (後式) $\times A_0$ と定数項を消してから y で割れば、1 次低い多項式

$$(A_1B_0 - B_1A_0) + (A_2B_0 - B_2A_0)y + \cdots + (A_{m-1}B_0 - B_{m-1}A_0)y^{m-2} + (A_mB_0 - B_mA_0)y^{m-1} = 0 \quad (23)$$

^{*1} 「一般開方術」で数係数の 1 次方程式は (実根を持つ場合に) その根を幾らでも精度を上げて求めることができる。したがって、ここで得られた条件は、連立代数方程式が根を持つための必要条件であるが、空虚な条件ではない。今日の数学の力では、十分条件であることも示すことができる。江戸時代の数学では、論理関係の記述が未成熟であり、また、実数の連続性とか実数が代数的閉体をなすなどの現代数学の常識を持ち合わせていなかったにもかかわらず、行列式、終結式、判別式などの意味ある公式を発見していたことは、数学史的に重要であると思う。本稿の議論は素朴で、現代数学の厳密性を追求するものではない。

が得られる。 m 次の両式 (21) から $m-1$ 次の両式 (22)-(23) が得られる。次に、同じ操作により、 $m-1$ 次の両式から、 $m-2$ 次の両式が得られる。この操作を続けて次数を一つずつ下げていくと、ついには変数 y を消去することが出来る。これを、「徒手空拳法」(無手勝流) と呼ぶことにしよう。

4.1 $m = 1$ の場合

1 次の両式

$$A_0(x) + A_1(x)y = 0, \quad B_0(x) + B_1(x)y = 0 \quad (24)$$

に「徒手空拳法」を適用し、次数を下げるには、(前式) $\times B_1(x)$ - (後式) $\times A_1(x)$ として、

$$A_0(x)B_1(x) - A_1(x)B_0(x) = 0 \quad (25)$$

とする。これが、 y の消去された方程式である。

4.2 $m = 2$ の場合

2 次の両式

$$A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 = 0, \quad B_0(x) + B_1(x)y + B_2(x)y^2 = 0 \quad (26)$$

に、「徒手空拳法」を適用しよう。まず、(前式) $\times B_2$ - (後式) $\times A_2$ を作ると、

$$(A_0B_2 - A_2B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)y = 0 \quad (27)$$

これで最高次が消える。次に、(前式) $\times B_0$ - (後式) $\times A_0$ を作り y で割ると、

$$(A_1B_0 - A_0B_1) + (A_2B_0 - A_0B_2)y = 0 \quad (28)$$

となる。(27) と (28) に、 $m = 1$ の場合の結果 (25) を使えば、

$$(A_0B_2 - A_2B_0)(A_2B_0 - A_0B_2) - (A_1B_2 - A_2B_1)(A_1B_0 - A_0B_1) = 0 \quad (29)$$

と y を消去できて、2 次の両式 (26) が解をもつ条件が得られる。

4.3 $m = 3$ の場合

3 次の両式

$$A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + A_3(x)y^3 = 0, \quad B_0(x) + B_1(x)y + B_2(x)y^2 + B_3(x)y^3 = 0 \quad (30)$$

に、「徒手空拳法」を適用しよう。まず、(前式) $\times B_3$ - (後式) $\times A_3$ を作ると、

$$(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)y + (A_2B_3 - A_3B_2)y^2 = 0 \quad (31)$$

これで最高次が消える。次に、(前式) $\times B_0$ - (後式) $\times A_0$ を作り、定数項を消し、 y でわれば、

$$(A_1B_0 - A_0B_1) + (A_2B_0 - A_0B_2)y + (A_3B_0 - A_0B_3)y^2 = 0 \quad (32)$$

となる。(31) と (32) に、 $m = 2$ の場合の結果 (29) を使えば、

$$\begin{aligned} & ((A_0B_3 - A_3B_0)(A_3B_0 - A_0B_3) - (A_2B_3 - A_3B_2)(A_1B_0 - A_0B_1)) \times \\ & ((A_2B_3 - A_3B_2)(A_1B_0 - A_0B_1) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_3B_0 - A_0B_3)) \\ & - ((A_1B_3 - A_3B_1)(A_3B_0 - A_0B_3) - (A_2B_3 - A_3B_2)(A_2B_0 - A_0B_2)) \times \\ & ((A_1B_3 - A_3B_1)(A_1B_0 - A_0B_1) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_2B_0 - A_0B_2)) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

と y を消去できて、3 次の両式 (30) が解を持つ条件が得られる。

同様に、一般の m 次の両式に、「徒手空拳法」が適用できることは、明らかであろう。

5 線形代数学の見地から・・・行列式と終結式

この節では、現代の線形代数学の見地から、変数の消去について考察し、あわせて、「徒手空拳法」の有効性について論じよう。先ず簡単な場合より始める。

5.1 連立 1 次方程式

2 元連立 1 次方程式

$$ax + by = 0, \quad cx + dy = 0 \quad (34)$$

「徒手空拳法」で y を消去すると $axd - bcx = 0$ なる方程式が得られるので、 x で割れば、次を得る。

$$ad - bc = 0 \quad (35)$$

連立 1 次方程式 (34) が非自明な解を持つための条件は、係数行列 A の行列式 $\det A$ が 0 となることが線形代数学で知られている。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 0 \quad (36)$$

この場合、徒手空拳法の結果 (36) は、線形代数学の結果 (35) と同一である。

3 元連立 1 次方程式

$$ax + by + cz = 0, \quad dx + ey + fz = 0, \quad gx + hy + iz = 0 \quad (37)$$

2 元の場合に倣って z を消去すると、第 1 式と第 2 式より $(ax + by)f - (dx + ey)c = 0$ 、第 1 式と第 3 式より $(ax + by)i - (gx + hy)c = 0$ を得る。 y で整理すると

$$(af - cd)x + (bf - ce)y = 0, \quad (ai - cg)x + (bi - ch)y = 0$$

2 元の場合の結果 (35) を使えば、次を得る。

$$(af - cd)(bi - ch) - (bf - ce)(ai - cg) = 0 \quad (38)$$

一方、連立方程式 (37) が非自明な解を持つための条件は、係数行列 A の行列式が 0 になること、すなわち、

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg = 0 \quad (39)$$

である。一方、(38) の左辺を整理すると、

$$(af - cd)(bi - ch) - (bf - ce)(ai - cg) = c \times \det A \quad (40)$$

となるので、この場合線形代数学の結果 (39) の方が、「徒手空拳法」の結果 (38) より良い。

5.2 徒手空拳法の評価

2 次の両式 (26) を考察しよう。連立代数方程式 (26) を

$$\begin{cases} A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 = 0 \\ \quad A_0(x)y + A_1(x)y^2 + A_2(x)y^3 = 0 \\ B_0(x) + B_1(x)y + B_2(x)y^2 = 0 \\ \quad B_0(x)y + B_1(x)y^2 + B_2(x)y^3 = 0 \end{cases}$$

のように書けば、2 次の両式 (26) が解を持つ条件は線形代数の理論より、係数行列の行列式が 0 になることである。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \\ & A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 & \\ & B_0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (41)$$

(41) の左辺を (シルベスターの) 終結式という。いま、

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \\ & A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 & \\ & B_0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \\ & B_0 & B_1 & B_2 \\ & & A_0 & A_1 & A_2 \\ & & B_0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} A_0 & A_2 \\ B_0 & B_2 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A_0 & A_2 \\ B_0 & B_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

なので、「徒手空拳法」の結果 (29) と線形代数学の結果 (41) とは同一である。

次に、3 次の両式 (30) を考察しよう。連立代数方程式 (30) を、

$$\begin{cases} A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + A_3(x)y^3 = 0 \\ \quad A_0(x)y + A_1(x)y^2 + A_2(x)y^3 + A_3(x)y^4 = 0 \\ \quad \quad A_0(x)y^2 + A_1(x)y^3 + A_2(x)y^4 + A_3(x)y^5 = 0 \\ B_0(x) + B_1(x)y + B_2(x)y^2 + B_3(x)y^3 = 0 \\ \quad B_0(x)y + B_1(x)y^2 + B_2(x)y^3 + B_3(x)y^4 = 0 \\ \quad \quad B_0(x)y^2 + B_1(x)y^3 + B_2(x)y^4 + B_3(x)y^5 = 0 \end{cases}$$

のように書けば、3 次の両式 (30) が解を持つ条件は行列式で表される。

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & & \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (43)$$

(43) の左辺は (シルベスターの) 終結式と呼ばれている。

(43) は A_i, B_j の 6 次式であり、(33) は 8 次式である。実際、

$$(33) \text{ の左辺} = (43) \text{ の左辺} \times (A_3 B_0 - A_0 B_3) \quad (44)$$

であるので、(43) から (33) を導き出せ、「徒手空拳法」は最良の結果を与えていない。

一般の m に対する連立代数方程式 (21) に対しても、 $m = 2, 3$ の場合と同様に、(シルベスターの) 終結式が定義できることは線形代数学で周知である。

5.3 行列式のことなど

ここで用いた線形代数学の行列式の理論は、現代の大学数学で学ぶことである。

行列式の基本性質 行列式は、列の順序交換に応じて符号が変化し、列に関して多重線形である。
(行に関しても同じことが言える。) さらに、このような性質を持つ関数は、行列式の定数倍しかない。

上の行列式の基本性質を既知としてしまえば、行列式は容易に計算できる。行列式を定義して、基本性質をを証明しようとする、大変である。順序の符号のことなどが前提になり、構成的に証明せざるを得ないだろう。行列式の展開式は、上の基本性質に比べれば重要性は低い。

行列式を作ることは、関孝和の『解伏題之法』の生剋第五で実行され、関孝和の最大の業績であるとされている。そこでは2次、3次、4次、5次の行列式の展開式が与えられている。(5次の場合には、誤りがある。)

和算の時代には、行列式がゼロになるかどうかが問題であったので、行列式の符号をどのように決めるかは任意性があつた。従つて、列を入れ換えることの考察は、明白になされていないようである。また、多重線形性の概念の認識はなかったが、『解伏題之法』や『大成算経』巻の十七で、「芟」(さん)、「治」の操作を明示しているので、列に対する多重線形性と行に対する多重線形性は、それなりに意識していたと思われる。

行列式を使えば、2次の両式(26)、3次の両式(30)などの連立代数方程式が解を持つとき係数の満たすべき条件は、(41)あるいは(43)とすぐに書けるが、ここで主張したいことは、行列式を知らずとも、この条件は初等的に求められることである。すなわち、「徒手空拳法」で次数を下げていき、最後に共通項を括りだせばよい。これは、どのように式が複雑になろうとも、明解なアルゴリズムである。

すなわち、再高次の係数を消すこと、定数項の係数を消してから次数を一つ下げること、の二つの操作で、二つの方程式の次数は一つずつ下げていけるのである。

(もちろん、係数は段々と複雑になって、手に負えなくなるし、最後の共通項も見つけるのは難しい。)

次数に関するインダクションを積極的に利用すれば、次数が一つ下がったの2個の方程式が立てれば、消去には十分である。このことを、関孝和、建部賢弘は気が付いていただろうが、「徒手空拳法」は効率が悪いめか明示されていないようだ。

6 関孝和・建部賢弘のアルゴリズム

3次の両式(30)が与えられたとき、前節で述べた「徒手空拳法」では最高次の係数を消した方程式(31)と定数項を消して次数を一つ下げた方程式(32)を連立させて、次数を下げ、最終的に、係数に対する条件(33)を得ることが出来たが、これは最良の結果ではない。もう少し、次数を下げる事が出来る。

この節では、関孝和が『発微算法』ですでに多用した「2乗化」、「3乗化」を紹介する。(「2乗化」、「3乗化」は、小川東の命名である。)

6.1 2乗化

今、3次の両式(30)の第2式が、定数項と2次項だけの場合、すなわち、次を考える

$$\begin{cases} P(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + A_3(x)y^3 = 0 \\ Q(x, y) = B_0(x) + B_2(x)y^2 = 0 \end{cases} \quad (45)$$

「徒手空拳法」の結果 (33) で $B_1 = 0$ 、 $B_3 = 0$ とすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (-A_3B_0 \cdot A_3B_0 + A_3B_2 \cdot A_1B_0) \times (-A_3B_2 \cdot A_1B_0 + A_3B_0 \cdot A_3B_0) \\ & - (A_3B_2 \cdot (A_2B_0 - A_0B_2)) \times (A_3B_0 \cdot (A_2B_0 - A_0B_2)) = 0 \end{aligned}$$

整理して、

$$\begin{aligned} & A_3^2B_0 \times \{A_1A_3B_0^2B_2 - A_3^2B_0^3 - A_1^2B_0B_2^2 + A_1A_3B_0^2B_2 \\ & - A_2^2B_0^2B_2 + A_0A_2B_0B_2^2 + A_0A_2B_0B_2^2 - A_0^2B_2^3\} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

一般に、 $a + b = 0$ ならば、 $a^2 - b^2 = 0$ となる。実際、

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (47)$$

だからである。この原理を使うことを「2乗化」と言い、(47) を「2乗化の公式」と呼ぼう。

(45) の第 1 式に B_2 を乗じて、

$$A_0B_2 + A_1B_2y + A_2B_2y^2 + A_3B_2y^3 = 0$$

(45) の第 2 式を用いて、

$$A_0B_2 + A_1B_2y - A_2B_0 - A_3B_0y = (A_0B_2 - A_2B_0) + (A_1B_2 - A_3B_0)y = 0$$

ここで、2乗化すると

$$(A_0B_2 - A_2B_0)^2 - (A_1B_2 - A_3B_0)^2y^2 = 0$$

再び、第 2 式を使えば、

$$B_2(A_0B_2 - A_2B_0)^2 + B_0(A_1B_2 - A_3B_0)^2 = 0 \quad (48)$$

となり、 y が消去できた。(48) を展開すると、

$$A_0^2B_2^3 - 2A_0A_2B_0B_2^2 + A_2^2B_0^2B_2 + A_1^2B_0B_2^2 - 2A_1A_3B_0^2B_2 + A_3^2B_0^3 = 0$$

となる。これは、(46) の $\{ \}$ の内部の符号を変えたものである。2乗化で、「徒手空拳法」よりも 3 次だけ次数の低い条件を求めることができる。

6.2 3乗化

今、3 次の両式 (30) の第 2 式が定数項と 3 次項だけの場合、すなわち、次を考える。

$$\begin{cases} P(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + A_3(x)y^3 = 0 \\ Q(x, y) = B_0(x) + B_3(x)y^3 = 0 \end{cases} \quad (49)$$

「徒手空拳法」の結果 (33) で $B_1 = 0$ 、 $B_2 = 0$ とすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & ((A_0B_3 - A_3B_0)(A_3B_0 - A_0B_3) - (A_2B_3)(A_1B_0)) \times ((A_2B_3)(A_1B_0) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_3B_0 - A_0B_3)) \\ & - ((A_1B_3)(A_3B_0 - A_0B_3) - (A_2B_3)(A_2B_0)) \times ((A_1B_3)(A_1B_0) - (A_0B_3 - A_3B_0)(A_2B_0)) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

一般に、 $a + b + c = 0$ ならば、 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ となる。実際、

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad (51)$$

だからである。この原理を使うことを、「3乗化」と言い、(51)を「3乗化の公式」と呼ぼう。

(49)の第1式に B_3 を乗じて、

$$A_0B_3 + A_1B_3y + A_2B_3y^2 + A_3B_3y^3 = 0$$

(49)の第2式を用いて、

$$A_0B_3 + A_1B_3y + A_2B_3y^2 - A_3B_0 = 0$$

ここで、3乗化すると、

$$(A_0B_3 - A_3B_0)^3 + A_1^3B_3^3y^3 + A_2^3B_3^3y^6 - 3(A_0B_3 - A_3B_0)A_1A_2B_3^2y^3 = 0$$

ここで、再び第2式を用いれば、

$$(A_0B_3 - A_3B_0)^3 - A_1^3B_0B_3^2 + A_2^3B_0^2B_3 + 3(A_0B_3 - A_3B_0)A_1A_2B_0B_2 = 0 \quad (52)$$

これは6次式で、「徒手空拳法」で得られる8次式(50)より次数が2だけ低い。実際、(44)で示したように(50)の左辺は、 $(A_3B_0 - A_0B_3)$ と(52)の左辺を因子に持つ。

6.3 換式

『解伏題之法』あるいは『大成算経』巻之十七には「換式」と呼ばれる消去方法が述べられている。連立方程式(21)が与えられたとき、前式と後式の再高次 m の係数から1次の係数までを順次考察して、 m 個の $m-1$ 次の連立方程式を作る。これが関孝和の換式である。稿を改めて述べることにする。関孝和の方程式論は、例えば、小川[9]、『関孝和論序説』[13]に紹介されている。

■ $m=3$ の場合 3次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 = 0 \quad (53)$$

$$B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 = 0 \quad (54)$$

を考えよう。連立方程式(53)-(54)が解を持つ条件は、線形代数学によれば、(シルベスターの)終結式で与えられる。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (55)$$

と6次の行列式を使って書ける。

関孝和は、この(シルベスターの)終結式は知らなかった。彼は、(53)-(54)より「換式」を作った。すなわち、次の一連の操作をした。まず、(53) $\times B_3$ - (54) $\times A_3$ と3次の項を消すと、

$$(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)x + (A_2B_3 - A_3B_2)x^2 = 0 \quad (56)$$

次に、(53) $\times B_2$ - (54) $\times A_2$ と2次の項を消すと、

$$(A_0B_2 - A_2B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)x + (A_3B_2 - A_2B_3)x^3 = 0 \quad (57)$$

そこで、(56) $\times x$ + (57)を作ると、

$$(A_0B_2 - A_2B_0) + \{(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)\}x + (A_1B_3 - A_3B_1)x^2 = 0 \quad (58)$$

また、(53) $\times B_1 - (54) \times A_1$ と 1 次の項を消すと、

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_2B_1 - A_1B_2)x^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)x^3 = 0 \quad (59)$$

次に、(58) $\times x + (59)$ を作ると

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_0B_2 - A_2B_0)x + (A_0B_3 - A_3B_0)x^2 = 0 \quad (60)$$

最後の式は、(53) $\times B_0 - (54) \times A_0$ と定数項を消し、 $(-x)$ で割っても得られる。

連立方程式 (53)-(54) (両式) から、この操作で、連立方程式 (56)-(58)-(60) (「換式」という) で作る。

いま、

$$\begin{aligned} A &= A_2B_3 - A_3B_2, & B &= D = A_1B_3 - A_3B_1, \\ C &= G = A_0B_3 - A_3B_0, & E &= (A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1), \\ F &= H = A_0B_2 - A_2B_0, & I &= A_0B_1 - A_1B_0 \end{aligned} \quad (61)$$

のように置けば、「換式」(56)-(58)-(60) は、

$$\begin{cases} C + Bx + Ax^2 = 0 \\ F + Ex + Dx^2 = 0 \\ I + Hx + Gx^2 = 0 \end{cases}$$

と書け、それがが解を持つ条件は、

$$\det \begin{pmatrix} C & B & A \\ F & E & D \\ I & H & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C & B & A \\ F & E & B \\ I & F & C \end{pmatrix} = 0 \quad (62)$$

と 3 次の行列式 (交乘法、変乘法) (62) を使って表せることを、関孝和は示した。(62) を (関孝和の) 終結式と呼ぼう。

数式処理システム (例えば、Mathematica) で展開して比べてみると、シルベスターの終結式 (55) と関孝和の終結式 (62) は同じ式である。次のような行列の計算でも示すことができる。

$$S_3 = \det \begin{pmatrix} B_3 & 0 & 0 & -A_3 & 0 & 0 \\ B_2 & B_3 & 0 & -A_2 & -A_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を、(55) の左から掛けると、行列式の積は、行列の積の行列式となるので、

$$\det \begin{pmatrix} C & B & A & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 \\ I & H & G & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = (B_3)^3 \times \det \begin{pmatrix} C & B & A \\ F & E & D \\ I & H & G \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $A, B, C, \dots$ は、(61) で定義される。いま、 $S_3 = (B_3)^3$ であるので、シルベスターと関孝和の終結式の等しいことが示せた。

■ $m = 4$ の場合 次に次数を一つ上げて、4 次の両式を考える。

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 = 0 \quad (63)$$

$$B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 = 0 \quad (64)$$

両式 (63)-(64) が解を持つ条件は、線形代数学によれば、シルベスターの終結式で表せる。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (65)$$

と 8 次の行列式で書ける。

関孝和は、両式から換式を作った。すなわち、先ず、 $(63) \times B_4 - (64) \times A_4$ と 4 次の項を消すと、

$$(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_4 - A_4B_1)x + (A_2B_4 - A_4B_2)x^2 + (A_3B_4 - A_4B_3)x^3 = 0 \quad (66)$$

次に、 $(63) \times B_3 - (64) \times A_3$ と 3 次の項を消すと、

$$(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)x + (A_2B_3 - A_3B_2)x^2 + (A_4B_3 - A_3B_4)x^4 = 0 \quad (67)$$

そこで、 $(66) \times x + (67)$ を作ると、

$$\begin{aligned} & (A_0B_3 - A_3B_0) + \{(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)\}x \\ & + \{(A_1B_4 - A_4B_1) + (A_2B_3 - A_3B_2)\}x^2 + (A_2B_4 - A_4B_2)x^3 = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

次に、 $(63) \times B_2 - (64) \times A_2$ と 2 次の項を消すと、

$$(A_0B_2 - A_2B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)x + (A_3B_2 - A_2B_3)x^3 + (A_4B_2 - A_2B_4)x^4 = 0 \quad (69)$$

そこで、 $(68) \times x + (69)$ を作ると

$$\begin{aligned} & (A_0B_2 - A_2B_0) + \{(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)\}x \\ & + \{(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)\}x^2 + (A_1B_4 - A_4B_1)x^3 = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

最後に、 $(63) \times B_1 - (64) \times A_1$ と 1 次の項を消すと、

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_2B_1 - A_1B_2)x^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)x^3 + (A_4B_1 - A_1B_4)x^4 = 0 \quad (71)$$

そこで、 $(70) \times x + (71)$ を作ると、

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_0B_2 - A_2B_0)x + (A_0B_3 - A_3B_0)x^2 + (A_0B_4 - A_4B_0)x^3 = 0 \quad (72)$$

最後の式 (72) は、 $(63) \times B_0 - (64) \times A_0$ と定数項を消し、 $(-x)$ で割っても得られる。

両式 (63)-(64) から、この操作で、連立方程式 (66)-(68)-(70)-(72) (「換式」という。) が作れた。

いま、

$$\begin{aligned}
 A &= A_3B_4 - A_4B_3, & B &= E = A_2B_4 - A_4B_2, \\
 C &= I = A_1B_4 - A_4B_1, & D &= M = A_0B_4 - A_4B_0, \\
 F &= (A_1B_4 - A_4B_1) + (A_2B_3 - A_3B_2), & G &= J = (A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1), \\
 H &= N = A_0B_3 - A_3B_0, & K &= (A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1), \\
 L &= O = A_0B_2 - A_2B_0, & P &= A_0B_1 - A_1B_0
 \end{aligned} \tag{73}$$

と置けば、換式 (66)-(68)-(70)-(72) は、

$$\begin{cases} D + Cx + Bx^2 + Ax^3 = 0 \\ H + Gx + Fx^2 + Ex^3 = 0 \\ L + Kx + Jx^2 + Ix^3 = 0 \\ P + Ox + Nx^2 + Mx^3 = 0 \end{cases}$$

と書け、それが解を持つ条件は、

$$\det \begin{pmatrix} D & C & B & A \\ H & G & F & E \\ L & K & J & I \\ P & O & N & M \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} D & C & B & A \\ H & G & F & B \\ L & K & G & C \\ P & L & H & D \end{pmatrix} = 0 \tag{74}$$

と 4 次の行列式 (交乘法、変乘法) (74) を使って表せることを関孝和は示した。(74) を (関孝和の) 終結式と呼ぼう。

(65) と (74) の左辺は同じ式である。実際、

$$S_4 = \det \begin{pmatrix} B_4 & 0 & 0 & 0 & -A_4 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & B_4 & 0 & 0 & -A_3 & -A_4 & 0 & 0 \\ B_2 & B_3 & B_4 & 0 & -A_2 & -A_3 & -A_4 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を、(65) の左から掛けると、行列式の積は、行列の積の行列式となるので、

$$\det \begin{pmatrix} D & C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & G & F & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & K & J & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & O & N & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} = (B_4)^4 \times \det \begin{pmatrix} D & C & B & A \\ H & G & F & E \\ L & K & H & I \\ P & O & N & M \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $A, B, C, \dots$ は、(73) で定義される。いま、 $S_4 = (B_4)^4$ であるので、このときも、シルベスターと関孝和の終結式の等しいことが示せた。

■ $m = 5$ の場合 さらに次数を一つ上げて、5 次の両式を考える。

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 = 0 \tag{75}$$

$$B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 = 0 \tag{76}$$

両式 (75)-(76) が解を持つ条件は、線形代数学によれば、(シルベスターの) 終結式で与えられる。すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (77)$$

と、10 次の行列式で書ける。

関孝和は、両式より換式を作った。まず、(75) $\times B_5$ - (76) $\times A_5$ と 5 次の項を消すと、

$$(A_0B_5 - A_5B_0) + (A_1B_5 - A_5B_1)x + (A_2B_5 - A_5B_2)x^2 + (A_3B_5 - A_5B_3)x^3 + (A_4B_5 - A_5B_4)x^4 = 0 \quad (78)$$

次に、(75) $\times B_3$ - (76) $\times A_3$ と 4 次の項を消すと、

$$(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_4 - A_4B_1)x + (A_2B_4 - A_4B_2)x^2 + (A_3B_4 - A_4B_3)x^3 + (A_5B_4 - A_4B_5)x^5 = 0 \quad (79)$$

そこで、(78) $\times x$ + (79) を作ると、

$$\begin{aligned} & (A_0B_4 - A_4B_0) + \{(A_0B_5 - A_5B_0) + (A_1B_4 - A_4B_1)\}x \\ & + \{(A_1B_5 - A_5B_1) + (A_2B_4 - A_4B_2)\}x^2 \\ & + \{(A_2B_5 - A_5B_2) + (A_3B_4 - A_4B_3)\}x^3 + (A_3B_5 - A_5B_3)x^4 = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

次に、(75) $\times B_3$ - (76) $\times A_3$ と 3 次の項を消すと、

$$(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)x + (A_2B_3 - A_3B_2)x^2 + (A_4B_3 - A_3B_4)x^4 + (A_5B_3 - A_3B_5)x^5 = 0 \quad (81)$$

そこで、(80) $\times x$ + (81) を作ると

$$\begin{aligned} & (A_0B_3 - A_3B_0) + \{(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)\}x \\ & + \{(A_0B_5 - A_5B_0) + (A_1B_4 - A_4B_1) + (A_2B_3 - A_3B_2)\}x^2 \\ & + \{(A_1B_5 - A_5B_1) + (A_2B_4 - A_4B_2)\}x^3 + (A_2B_5 - A_5B_2)x^4 = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

次に、(75) $\times B_1$ - (76) $\times A_1$ と 2 次の項を消すと、

$$(A_0B_2 - A_2B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)x + (A_3B_2 - A_2B_3)x^3 + (A_4B_2 - A_2B_4)x^4 + (A_5B_2 - A_2B_5)x^5 = 0 \quad (83)$$

そこで、(82) $\times x$ + (83) を作ると、

$$\begin{aligned} & (A_0B_2 - A_2B_0) + \{(A_0B_3 - A_3B_0) + (A_1B_2 - A_2B_1)\}x \\ & + \{(A_0B_4 - A_4B_0) + (A_1B_3 - A_3B_1)\}x^2 + \\ & + \{(A_0B_5 - A_5B_0) + (A_1B_4 - A_4B_1)\}x^3 + (A_1B_5 - A_5B_1)x^4 = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

次に、(75) $\times B_1$ - (76) $\times A_1$ と 1 次の項を消すと、

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_2B_1 - A_1B_2)x^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)x^3 + (A_4B_1 - A_1B_4)x^4 + (A_5B_1 - A_1B_5)x^5 = 0 \quad (85)$$

そこで、(84) $\times x$ + (85) を作ると、

$$(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_0B_2 - A_2B_0)x + (A_0B_3 - A_3B_0)x^2 + (A_0B_4 - A_4B_0)x^3 + (A_0B_5 - A_5B_0)x^4 = 0 \quad (86)$$

を、(77) の左から掛けると、行列式の積は、行列の積の行列式となるので、

$$\det \begin{pmatrix} E & D & C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J & I & H & G & F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ O & N & M & L & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T & S & R & Q & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & X & W & V & U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{pmatrix} = (B_5)^5 \times \det \begin{pmatrix} E & D & C & B & A \\ J & I & H & G & F \\ O & N & M & L & K \\ T & S & R & Q & P \\ Y & X & W & V & U \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $A, B, C, \dots$ は、(87) で定義される。いま、 $S_5 = (B_5)^5$ であるので、シルベスターと関孝和の終結式の等しいことが示せた。^{*2}

7 『大成算経』巻之十七

『大成算経』巻之十七は、見題篇、隠題篇、伏題篇、潜題篇と分かれている。連立代数方程式を取り扱っているのは、伏題篇であり、伏題篇はさらに、

虚術第一、両式第二、定乗第三、換式第四、交乗第五、寄消第六

と分かれている。換式第四については、かなり紙面を使って説明した。交乗第五は、辟易するような記号の列挙である。2 次、3 次、4 次、5 次の行列式の展開式で、項数がそれぞれ 2、6、24、120 項ある。これを交乘法というが、その他にも変乘法、消長法の表が載っている。ここでは、それらの意味を述べる。

7.1 交乘法、変乘法、あるいは終結式

『大成算経』巻之十七では、両式から換式を作り、交乘法（変乘法）により未知変数を消去できることを述べている。つまり、 m 次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m = 0, \quad B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m = 0$$

から、 m 個の $m-1$ 次代数方程式が「換式」の操作で出来る。この係数は $m \times m$ 行列をなすが、この係数行列は逆対角線に関して対称である。（逆対称ということにしよう。）中算の伝統に従って、関孝和は多項式をその係数の縦ベクトルとして表し、定数項が一番上、最高次の項が一番下にした。ここで、縦書きを横書きに直すときに、縦ベクトルを数式とし、項を昇順に並べた。もし、降順に書けば、「逆対称」は普通の「対称」になる。

m 次の両式から換式の操作により、 $m \times m$ 次の係数行列を作ったとき、これが逆対称になることは、計算すればすぐにわかることだが、今迄あまり強調されてこなかったように思う。

m 個の $m-1$ 次代数方程式から、何時でも、未知変数を消去できる。線形代数学の用語では、係数行列の行列式が 0 になるという条件である。これを『大成算経』巻之十七の用語では、「交乘法」という。 $m = 2, 3, 4, 5$ に対して、 $m \times m$ 行列の行列式が列に関する展開により、帰納的に定義され、展開式が与

^{*2} $m = 3, 4, 5$ の場合に、行列 S_m の左からの乗法で（シルベスターの）終結式を（関孝和の）終結式に変形する方法は、小川 [9] による。

えられている。しかし、関孝和と建部賢弘にとっての第一の関心事は、連立代数方程式の解法のアルゴリズムであり、行列式の展開（交乗法）はこの研究の副産物であった。

実際、両式から換式を取る操作で得られる連立方程式の係数行列は、「逆対称」であり、逆対称行列の行列式の展開も、巻之十七では「変乗法」の名前のもとで、与えられている。これは「交乗法」の特殊な場合で、わざわざ書きだすほどの意味があるのだろうかとの感想を持つが、こういう感想そのものが、関孝和が連立代数方程式を解くための効率的かつ一般的なアルゴリズムを開発しようとしていたことを等閑に附していることの証左である。むしろ、「変乗法」を求めるための副産物として「交乗法」（一般の行列式）を得たと考えるべきであろう。

m 次の両式の（シルベスターの）終結式は、 $2m$ 次の行列式であるが、換式をとると変乗法により作られる関孝和の終結式は m 次の行列式で書ける。

$$\text{シルベスターの終結式} = \text{換式} + \text{変乗法} \quad (\text{すなわち、関孝和の終結式})$$

であり、関孝和は「換式+変乗法」という形で線形代数で言う終結式を発見したのである。

7.2 消長法、あるいは m 乗化の公式

「2 乗化」「3 乗化」は伊関知辰の『算法發揮』（1690）では、それぞれ「平乗演式」、「再乗乗演式」と呼ばれている（小川他著『建部賢弘の数学』59 頁）。和算では七乗乗演式までが出版されている。

- 『明元算法 乾坤』柴田清行（宮城清行）、元禄二年（1689）、西村七郎兵衛（東北大学：岡本文庫、刊 060）「4 乗化」、「5 乗化」の公式。
- 『一極算法』安藤吉治、元禄二年（1689）、中村彌兵衛（東北大学：林文庫 0042）「六乗乗演式」（すなわち、「7 乗化」の公式）を求める。
- 『七乗乗演式』中根元圭、元禄四年（1691）跋、梅村彌與門（東北大学：岡本文庫、漢 065）「七乗乗演式」（すなわち、「8 乗化」の公式）を論じる。
- 「八乗乗演式」の著を著した江州の小柿義則なる人がある。（『明治前第三巻』85 頁）

そもそもこれらの公式は、どうして求められるのだろうか。

巻之十七の交乗第五には、変乗法と並んで消長法が付されている。これは、特殊な m 次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{m-1}x^{m-1} = 0, \quad -B^m + 0 + 0 + \cdots + 0 + x^m = 0$$

の終結式（換式+変乗法）を記述している。ここで、 $B = 1$ とすると、 m 乗化の公式が得られる。

先ず、2 次の両式

$$A_0 + A_1x = 0, \quad -B^2 + x^2 = 0$$

より x を消去して、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & 0 \\ -B^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1B^2 & A_0 \end{pmatrix} = 0$$

を得る。これが平方消長法である。 $B = 1$ として 2 乗化の公式が得られる。

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix} = A_0^2 - A_1^2 = (A_0 - A_1)(A_0 + A_1)$$

3 次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 = 0, \quad -B^3 + x^3 = 0$$

より x を消去して、

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ -B^3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -B^3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -B^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2B^2 & A_0 & A_1 \\ A_1B^2 & A_2B^2 & A_0 \end{pmatrix} = 0$$

を得る。これが、立方消長法である。 $B = 1$ として 3 乗化の公式が得られる。

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2 & A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_0 \end{pmatrix} &= A_0^3 + A_1^3 + A_2^3 - 3A_0A_1A_2 \\ &= (A_0 + A_1 + A_2)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 - A_0A_1 - A_1A_2 - A_2A_0) \end{aligned}$$

4 次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 = 0, \quad -B^4 + x^4 = 0$$

より x を消去して

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ -B^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B^4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3B^4 & A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2B^4 & A_3B^4 & A_0 & A_1 \\ A_1B^4 & A_2B^4 & A_3B^4 & A_0 \end{pmatrix} = 0$$

を得る。これが、三乗方消長法である。 $B = 1$ として 4 乗化の公式が得られる。

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_0 \end{pmatrix} &= A_0^4 - A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 - 2A_0^2A_2^2 + 2A_1^2A_3^2 - 4A_0^2A_1A_3 - 4A_0A_1^2A_2 - 4A_1A_2^2A_3 + 4A_0A_2A_3^2 \\ &= (A_0 - A_1 + A_2 - A_3)(A_0 + A_1 + A_2 + A_3)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2A_0A_2 - A_1A_3) \end{aligned}$$

5 次の両式

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 = 0, \quad -B^5 + x^5 = 0$$

より x を消去して

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ -B^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_4 B^5 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 B^5 & A_4 B^5 & A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2 B^5 & A_3 B^5 & A_4 B^5 & A_0 & A_1 \\ A_1 B^5 & A_2 B^5 & A_3 B^5 & A_4 B^5 & A_0 \end{pmatrix} = 0$$

を得る。これが、四乗方消長法である。 $B = 1$ として 5 乗化の公式が得られる。

$$\det \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_4 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_0 & A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{pmatrix} = 5 \text{ 次式 (式省略)} = (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \times 4 \text{ 次の因子}$$

ここでは、5 次式を省略してしまったが、『大成算経』巻之十七には書き出してある。

数式処理システム (たとえば、Mathematica) を用いれば、同様に、6 乗化、7 乗化、8 乗化の公式を求め、その因数分解をすることが出来る。「ぐるぐる行列」の形より、 m 乗化公式が $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{m-1}$ を因子に持つことは明かである。因子の数は、 m の素因数の個数と一致すると予想できるが、証明できない。

『明治前』第 2 巻 [1] には「 $\cdots$ 消長法なるものは、一見したところでは行列式とは関係のなかりそうなものである。」と述べて、『大成算経』に載っている式変形による立方消長法の説明をしている。そして、「これは消長法である。これは変乗法の結果と一致する。しかもその関係については、[大成算経巻之十七には] 別に記されていない。」と述べている。しかし、大成算経の文脈では、特殊な両式を換式と変乗法を使って変数消去をした実例であり、交乘法 (すなわち、一般の行列の行列式) が知れてしまえばその付録になったものの、多変数連立代数方程式の解法のアルゴリズムの開発という見地からは、重要なステップであったと思われる。

参考文献

- [1] 日本学士院編：『明治前日本数学史』第 2 巻、岩波書店、(1956 年)
- [2] 平山他編：『関孝和全集』大阪教育図書、(1974 年)
- [3] 佐藤賢一：「関孝和の行列式の再検討」、科学史・科学哲学 11 巻、(1993 年)、小松 [7] に注記と共に再録されている。
- [4] 徐澤林：中算の数学機械化思想の和算における発展 $\cdots$ 解伏題の機械化特徴 (自然科学史研究、第 20 巻 2 期、(2001 年))
- [5] 後藤武史：「大成算経における判別式の求め方」、数理解析研究所講究録 1257、(2002 年)

- [6] 後藤武史、小松彦三郎：「17 世紀日本と 18 - 19 世紀西洋の行列式、終結式及び判別式」、数理解析研究所講究録 1392、(2004 年)
- [7] 小松彦三郎：日本科学史学会「科学史研究」編集委員会委員長宛書簡、数理解析研究所講究録 1392、(2004 年)
- [8] 小川束：「近世日本数学における表現形式、『大成算経』の隠題をめぐって」、数理解析研究所講究録 1513、(2006 年)
- [9] 小川束：「関孝和と行列式」、数学のたのしみ（関孝和と建部賢弘）、日本評論社、(2006 年)
- [10] 佐藤健一・真島秀行編：『関孝和の人と業績』、研成社、(2008 年)
- [11] 小川束、佐藤健一、竹之内脩、森本光生：『建部賢弘の数学』、共立出版、(2008 年)
- [12] 竹之内脩：『関孝和の数学』、共立出版、(2008 年)
- [13] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一：『関孝和論序説』、岩波書店、(2008 年)

(本稿は、2011 年 4 月 2 日(土)に名古屋数学史セミナーに提出した原稿を大幅に加筆訂正したものである。改定稿の概略を、2011 年 5 月 22 日に日本数学史学会総会・年会(同志社大学)で発表した。)