数理解析研究所講究録
第1608巻 2008年 142-150

ボルツマン方程式の漸近解析と流体力学極限：微量の非凝縮性気体を含む蒸気流

青木一生 (Kazuo Aoki)

京都大学工学研究科機械理工学専攻
(Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University)

1. はじめに

我々の身近で見られる気体の流れの解析には，流体力学が用いられる．流体力学は，巨視的・現象論的モデルであり，気体が局所的熱平衡の状態にあることが，それが適用できるための必要条件である．局所的熱平衡は，気体分子どうしの衝突が非常に頻繁に起こっているときに実現する．もう少し定量的に言えば，気体分子の平均自由行程（1個の気体分子が他の分子と衝突することなく移動できる距離の平均値）lが，考えている系の代表的な長さLに比べて無視できるとき，ということになる．この二つの長さの比 $\mathrm{Kn} = l/L$ はクヌーセン（Knudsen）数とよばれる無次元パラメータで，気体の非平衡の度合いを表す．上述の $\mathrm{Kn} \to 0$ の極限を連続流極限（continuum limit）あるいは流体力学極限（fluid-dynamic limit）という．

もし，考えている気体が低圧気体（高層大気，真空機器内の気体など）あるいは非常に小さい系の気体（マイクロ流路内の気体，エアロゾル粒子まわりの気体など）であれば，クヌーセン数は基本的に任意の値をとり得る．このときには気体は局所平衡状態にはなく，流体力学は適用できない．かわりに，気体が多くの分子の集団であり，どのような速度をもつ分子がどのくらいあるかの微視的情報が必要になる．この立場で気体の振る舞いを記述するのが気体分子運動論あるいは分子気体力学であり，その基本的物理量は気体分子の速度分布関数，それを支配するのがボルツマン（Boltzmann）方程式である．

このことから分かるように，(気体に対する）通常の流体力学は分子気体力学の一極限（$\mathrm{Kn} \to 0$）であり，その極限近傍（$\mathrm{Kn} \ll 1$）を分子気体力学にもとづく系統的漸近解析によって調べることにより，気体が局所的熱平衡から少しずれたときに流体力学がどのような形の修正を受けるかが明らかになる．また，この極限自身を調べることにより，既存の流体力学の再検討や新しい流体力学の構築が可能である．この研究は，1960年代に曾根によって始められ[1, 2]，クヌーセン数が小さい場合の漸近理論として曾根自身によって集大成された[3, 4, 5].

そのなかで重要なテーマの一つが，境界面で気体の蒸発や凝縮（あるいは昇華）が起こる場合である．この種の流れでは，たとえクヌーセン数が非常に小さくても，蒸発・凝縮が起こっている界面では気体は非平衡状態にあるため，巨視的・現象論的考察のみから流体力学を導くことができない．分子気体力学をもとに流体力学極限を考えることによってはじめて，正しい流体力学を構築することができる．本稿では，この話題を取り上げる．気体が単一の蒸気からなる一成分系については，[3, 4, 5]に詳しく述べられているので，蒸気中に不純気体が含まれる二成分系を考え，あらたに構築した流体力学をもとに，それに特有の物理現象を調べる．

2. 蒸気・非凝縮性気体混合系

2.1 問題設定 ある物質の蒸気と凝縮相（液体相または固体相）からなる系を考え，凝縮相まわりの蒸気の流れに注目する．例えば，水滴のまわりの水蒸気，ドライアイスのまわりの二酸化炭素の流れである（以下では単原子分子の理想気体を考えるが，物理的イメージはこのようなものである）．この場合，様々な物理的状況に応じて，凝縮相界面で蒸気の蒸発や凝縮（昇華も含めて蒸発・凝縮とよぶことにする）が起こる．ここでは，蒸気中にもう一つ別の気体が入っており，それは境界面上で蒸発も凝縮もしないとする．例えば，ドライアイスのまわりの二酸化炭素の流れのなかに窒素ガスが混入している場合である．蒸気に対して，この別種の気体を非凝縮性気体とよぶことにする．

このような系における蒸気と非凝縮性気体の振る舞いを，次の仮定の下で考える．(i) 蒸気分子と非凝縮性気体分子の挙動は，二成分混合気体に対するボルツマン方程式によって記述される．(ii) 凝縮相界面を離れる蒸気分子は，界面の局所的移動速度，温度，およびその温度に対応する飽和蒸気圧をそれぞれ平均速度，温度，および圧力とするマクスウェル（Maxwell）分布（平衡分布）に従う．(iii) 同じ界面を離れる非凝縮性気体分子は，やはり界面の局所的移動速度と温度をそれぞれ平均速度と温度とするマクスウェル分布に従い，さらに界面を通過する正味の気体流量がゼロである．(iv) 凝縮相の変形は無視できるとし，流れは時間的に変化しない（定常流）．(iv) 蒸気分子の代表的平均自由行程にもとづくクヌーセン数が小さい．

上の (ii), (iii) は数学的にはボルツマン方程式に対する境界条件であり，物理的にはそれぞれ，蒸気分子と凝縮相界面との相互作用，および非凝縮性気体分子とそれとの相互作用に対するモデルである．これらは通常用いられるもので，(iii) は拡散反射とよばれる．

2.2 流体力学極限 上述の系でクヌーセン数がゼロとなる極限（流体力学極限）をとることによって，どのような流体力学が導かれるかが興味の対象である．1. で述べたクヌーセン数が小さい場合の系統的漸近解析が，この系に対しても行われ，流体力学極限での混合気体の振る舞いが明らかにされている [6, 7]．まず，その結果について述べる．説明を簡単にするため，気体の領域が有界であるとする．今，n_r を蒸気の代表的な分子数密度，n_{av}^B を気体領域にわたる非凝縮性気体の平均数密度，Kn を蒸気の代表的な平均自由行程 l_r にもとづくクヌーセン数（$\mathrm{Kn} = l_r/L$，L は代表長）とする．流体力学極限として得られる流体力学の型は，**(A)** n_{av}^B/n_r を 1 程度に固定した上での極限 [6]，**(B)** n_{av}^B/n_r を Kn に比例するようにゼロにもっていく極限 [7]，のいずれかによって全く異なる．簡単のため，**(A)** については境界が静止している場合のみを考えると，流体力学極限では蒸発，凝縮は止まり，混合気体は静止する．しかし，無限小の蒸発・凝縮によって混合気体の温度場や密度場は有意の影響を受ける．これは，流体力学極限における「幽霊効果」[3, 4] の一例である．これについては，5. で少し触れる．一方，**(B)** では，流体力学極限において，非凝縮性気体の平均濃度が無限小になり，見かけは純粋蒸気流になる．しかし，この蒸気流は，非凝縮性気体の「痕跡」によって大きな影響を受ける．本稿では，**(B)** 型極限についてもう少し詳しく述べることにする．

3. 漸近解析と流体力学方程式系

3.1 概要 まず，クヌーセン数が小さい場合の漸近解析のごく大まかな筋道を述べる．以下の記述は，気体が単成分気体であっても混合気体であっても変わりはない．

いま考えている定常問題では，ボルツマン方程式は 1 階の空間微分項と非線形の積分項（気体分子どうしの衝突の効果を表わす項で，衝突項とよばれる）からなる．未知関数は，気体分子の速度分布関数で，これは空間座標と気体分子速度の関数である．この方程式を無次元化すると，空間微分項に微小パラメータであるクヌーセン数がかかる．解の変化がおだやか，すなわちその変化のスケールが系の代表長さ程度であると仮定し，クヌーセン数の単純なべき級数展開（漸近展開）で解を求めると，ボルツマン方程式は実質的に積分方程式に縮退し，速度分布関数の（気体分子速度の関数としての）関数形が展開の低次より順次決まって行く．この速度分布関数は，密度，流速，温度といった巨視量を含んでおり，空間座標はこれらの巨視量を通してのみ入ってくる．これらの巨視量は定まらないが，積分方程式が順次解けていくための条件から，巨視量に対する制約がでる．これは巨視量に対する偏微分方程式の形をしている．これが流体力学的方程式である．速度分布関数の漸近展開に対応して，巨視量もクヌーセン数のべき級数で表わされており，その初項に対する方程式が流体力学極限における方程式ということになる．

しかし，上の解析では，微積分方程式が積分方程式に縮退していることからも分かるように，境界面における境界条件が一切取り込まれていない．境界条件を満たす解は，変化のおだやかな解を，境界に接する厚さが平均自由行程程度の薄い層（クヌーセン層）内で補正することによって求めることができる．境界面を離れた気体分子は，一般にまわりの分子とは平衡状態にはないが，他の分子との衝突を経て，変化のおだやかな解で表わされる局所的平衡状態に近い状態に近づい

ていく．この遷移領域が，クヌーセン層である．クヌーセン層では，気体の状態は，境界に沿う方向にはおだやかに変化するが（変化のスケールは系の代表長），境界に垂直な方向には急激に変化する（変化のスケールは平均自由行程）．もし，クヌーセン層内部の気体の様子を平均自由行程のスケールで眺めれば，境界はほとんど平面で，クヌーセン層の外縁はかなり遠くにある．このことから分かるように，クヌーセン層の解析は，空間的に 1 次元のボルツマン方程式に対する半無限空間での境界値問題を逐次解析することに帰着する（境界面の曲率や境界に沿う物理量の変化の影響は，1 次元ボルツマン方程式の非斉次項として現れる）．この解析により，クヌーセン層における解と同時に，変化のおだやかな解の流体力学的方程式に対する境界条件が定まる．

[3, 4, 5] には，単一成分気体について，この解析の詳細が述べられており，結果として得られる流体力学的方程式，その境界条件，それにクヌーセン層における補正が，一般の幾何学的形状に対してまとめられている．流体力学的方程式やその境界条件の型は，考える物理的状況によって異なる．

3.2 流体力学方程式 2.2 の流体力学極限 **(B)** にもどろう．この場合の物理的状況は次の通りである [7]．蒸気中に混入した微量（平均濃度無限小）の非凝縮性気体は蒸気流によって吹き流され，蒸気の凝縮が起こっている界面に吹き寄せられる．非凝縮性気体は界面を突き抜けて流れないから，それはそこにたまる．結局，非凝縮性気体は，凝縮が起こっている界面に接するクヌーセン層内にのみ存在し，それ以外の場所は純粋蒸気の流れになる．流体力学極限では，クヌーセン層は系の代表長に比べて無限に薄いが，非凝縮性気体の量も蒸気に比べて無限小であるため，クヌーセン層内部で，すなわち界面上で，非凝縮性気体分子の数密度が有限になる．このように，界面が非凝縮性気体の無限に薄いが密な層で覆われる．この層が界面における蒸気の凝縮に影響を与え，結果として蒸気の大域的な流れを変えてしまう．

この流体力学極限における流体力学方程式は，純粋蒸気に対するもので，いわゆる圧縮性オイラー方程式である．すなわち，

$$\frac{\partial \rho v_j}{\partial X_j} = 0 \tag{1}$$

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial X_i} = 0, \tag{2}$$

$$\rho v_j \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{5}{2}RT + \frac{1}{2}v_k^2\right) = 0, \tag{3}$$

$$p = R\rho T. \tag{4}$$

ここに，X_i は空間直交座標，ρ は蒸気の密度，v_i は流速，T は温度，p は圧力，R は単位質量あたりの気体定数で，ボルツマン定数 k を蒸気分子 1 個の質量 m で割ったものである（$R = k/m$）．上式では，和の規約（$a_j b_j = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j$ など）を用いている．

3.3 流体力学方程式に対する境界条件 このオイラー方程式に対する境界条件は，3.1 で触れたように，クヌーセン層の解析によって求められる．今考えている流体力学極限では，蒸発が起こっている界面でのクヌーセン層問題は，無限に広い平面凝縮相から半無限空間への純粋蒸気の強い蒸発の問題 [8] と同等であり，非線形ボルツマン方程式の 1 次元境界値問題である．この問題の定常解があるためには，凝縮相の温度，その温度における蒸気の飽和蒸気圧，無限遠方での蒸気の温度，圧力，流速の間に特定の関係がなければならない．この関係が実質的に，オイラー方程式に対する蒸発面での境界条件を与える．この関係は，[8] において数値的に構築されている．一方，凝縮が起こっている界面でのクヌーセン層の問題は，遠方から平面凝縮相に蒸気が吹き付けてそこで凝縮しており，この蒸気流によって非凝縮性気体が凝縮相の近くに閉じ込められている問題 [9, 10, 11] と同等である．これは，2 成分混合気体に対する非線形ボルツマン方程式の 1 次元境界値問題であり，やはり上述のパラメータおよび非凝縮性気体の含有量の間に特定の関係があるときに限り，定常解がある．この関係（およびそれを補足する別の関係）がオイラー方程式に対する凝縮面での境界条件を与える．この関係は，[9, 10, 11] において，数値的に求められている．

以下に，このようにして得られたオイラー方程式に対する境界条件をまとめておく．なお，多くの記号の導入を避けるため，凝縮が起こっている界面での境界条件は，2次元流れに対するものを示すにとどめる．以下では次の記号を用いる：T_w は界面の温度，p_w はその温度における蒸気の飽和蒸気圧，v_{wi} は界面の速度，n_i は界面の蒸気側に向いた単位法線ベクトルである（定常問題であるため，界面速度は $v_{wj}n_j = 0$ を満たす）．また，M_n，M_t はそれぞれ，界面における蒸気の流速の法線成分および（界面に相対的な）接線成分に基づく局所マッハ数で，v_i，T の界面上での値を用いて次式で定義される．

$$M_n = |v_j n_j|(5RT/3)^{-1/2}, \qquad M_t = |v_i - v_j n_j n_i - v_{wi}|(5RT/3)^{-1/2}. \tag{5}$$

(a) 蒸発界面における境界条件：

$$M_n \le 1, \qquad M_t = 0, \qquad p/p_w = h_1(M_n), \qquad T/T_w = h_2(M_n). \tag{6}$$

ここに，h_1，h_2 は M_n の関数で，BGK モデルあるいは BKW モデルとよばれるボルツマン方程式のモデル方程式を用いた数値データが [8] で求められている．それを補足したデータが，[3] の Table 7.1（p. 214），[4] の Table 3.4（p. 141），[5] の 3.5 表（p. 113）に再録されている．なお，$M_n > 1$ なる流れはない．

(b) 凝縮界面における境界条件：（上述のように2次元流に限り，さらに $M_n < 1$ の場合の結果のみを示しておく．$M_n \ge 1$ の場合および3次元流については [7, 12] を参照されたい．）

$M_n < 1$ のとき，

$$p/p_w = \mathcal{F}_s(M_n, M_t, T/T_w, \Gamma), \tag{7}$$

$$\mathcal{N}_j^B t_j = \text{一定}. \tag{8}$$

ここに，

$$\mathcal{N}_i^B = (\sqrt{\pi}/2)\, n\, l\, [v_{wi}\Gamma + (2RT)^{1/2} G_s(M_n, M_t, T/T_w, \Gamma)]\, a_i, \tag{9}$$

$$\Gamma = (2/\sqrt{\pi})(nl)^{-1} N^B, \tag{10}$$

$n = \rho/m$ は蒸気分子の数密度，l は蒸気分子が温度 T，密度 ρ（または圧力 p）の静止平衡状態にあるとしたときの平均自由行程（いまの流体力学極限では，l は系の代表長に比べて無限小である）で，たとえば剛体球分子では $l = [\sqrt{2}\pi d_m^2 n]^{-1} = (2/\gamma_1\sqrt{\pi})(2RT)^{1/2}(\mu/p)$（$d_m$ は分子の直径，$\gamma_1 = 1.270042$，μ は粘性係数），BGK モデルや次段落のモデルでは $l = (2/\sqrt{\pi})(2RT)^{1/2}/A_c\rho = (2/\sqrt{\pi})(2RT)^{1/2}(\mu/p)$（$A_c$ は定数で，$A_c\rho$ が蒸気分子の衝突頻度を表わす）である．N^B は界面におけるクヌーセン層（その厚さは系の代表長に比べて無限小）に含まれる非凝縮性気体の分子数（界面の単位面積当たり），$\mathcal{N}_i^B$ は同じくクヌーセン層内の非凝縮性気体の総分子流量（単位時間，界面の単位面積当たり），t_i は界面の単位接線ベクトル，a_i は界面における蒸気の相対的流速 $v_i - v_{wi}$ の接線成分の方向の単位ベクトルである（2次元流では $a_i = t_i$ または $a_i = -t_i$ である）．また，$\mathcal{F}_s$，G_s はそれぞれ4変数（M_n, M_t, T/T_w, Γ）の関数で，G_s は $M_t = 0$，すなわち $v_i - v_{wi}$ の接線成分がゼロのとき，ゼロとなる．これらの関数は，[9, 10] で数値的に求められている．Γ は，M_n，M_t などと同様，界面上の位置の未知関数であり，オイラー方程式 (1)–(4) と境界条件 (6)–(9) の解 ρ，v_i，T，p と同時に定まる．（解を定めるには，非凝縮性気体の量に関するパラメータ，たとえば n_{av}^B や 4. の応用例における Δ など，を指定する必要がある．）

もう少し正確に言うと，関数 $\mathcal{F}_s$，G_s の数値データは Garzó らによって提案された混合気体に対するボルツマン方程式のモデル方程式をもとにしており，さらに蒸気分子と非凝縮性気体分子が力学的に同一（たとえば剛体球分子の場合では，各成分の分子の質量と直径が等しい）の場合に対して作られている．このとき，$\mathcal{F}_s$，G_s は，それぞれ次の形に表わされる（[10, 12] 参照）：

$$\mathcal{F}_s(M_n,\, M_t,\, \frac{T}{T_w},\, \Gamma) = \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_*(M_n,\, M_t,\, T/T_w)}\right)^{-1} F_s(M_n,\, M_t,\, \frac{T}{T_w}), \tag{11}$$

$$G_s(M_n,\, M_t,\, T/T_w,\, \Gamma) = \Gamma \mathcal{G}(M_n,\, M_t,\, T/T_w). \tag{12}$$

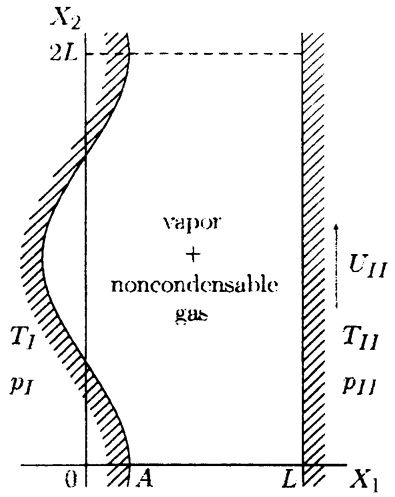

図 1: 平面状および正弦波状凝縮相の間の蒸気流.

関数 F_s, Γ_*, $\mathcal{G}$ の数値データは [10] の Tables I–III に与えられている［より詳しいデータは，EPAPS Document No. E-PHFLE6-15-504303 の Tables I–IV（F_s），V-VIII（Γ_*），IX–XII（$\mathcal{G}$）に収録されている．この Document は，EPAPS ホームページ（http://www.aip.org/pubservs/epaps.html）から参照できる］．一般の場合には，$\mathcal{F}_s$, G_s は蒸気分子と非凝縮性気体分子の質量比などの分子の特性にも依存する．M_n が小さい場合に限ると，ボルツマン方程式（ただし剛体球分子）に対しても，一般の場合の $\mathcal{F}_s$, G_s をほとんど解析的に求めることができる [13]．なお，3 次元流では，式 (8) が $\mathcal{N}_i^B$ に対する界面上での (2 次元) 連続の式に置きかわる．

N^B を凝縮が起こっている界面全体にわたって積分すると，系に含まれる非凝縮性気体の全分子数が求まる．これより，有界領域の問題では平均数密度 $n_{\rm av}^B$ が求まる．$\Gamma = O(1)$ が最初の仮定 $n_{\rm av}^B/n_\tau = O({\rm Kn})$ ［2.2**(B)**］に対応している．このように，平均濃度が無限小であるような微量の非凝縮性気体が，境界条件中の Γ を通して，蒸気の大域的流れに影響を与える．

4. 応用例

ここでは，3.2, 3.3 で見たオイラー方程式とその境界条件の応用例 [12] を示す．

4.1 平面状および正弦波状凝縮相の間の蒸気流 図 1 に示すように，$X_1 = A\cos(\pi X_2/L)$ にある正弦波状の凝縮相と $X_1 = L$ にある平面凝縮相の間の蒸気と非凝縮性気体を考える．正弦波状凝縮相は温度 T_I に保たれており，静止している．一方，平面凝縮相は温度 T_{II} に保たれており，X_2 軸方向に一定速さ U_{II} で動いている．p_I を温度 T_I における蒸気の飽和蒸気圧，p_{II} を温度 T_{II} におけるそれとする．流れの場は X_2 方向に周期的（周期 $2L$）であると仮定し，問題を有限領域 $A\cos(\pi X_2/L) \le X_1 \le L$, $0 \le X_2 \le 2L$ で考える．$n_{\rm av}^B$ をこの領域に含まれる非凝縮性気体分子の平均数密度，n_I を T_I, p_I に対応する蒸気の数密度（$n_I = p_I/kT_I$）とし，2.2 の流体力学極限 **(B)** にしたがって

$$n_{\rm av}^B/n_I = \Delta{\rm Kn} = \Delta(l_I/L), \tag{13}$$

とおく．ここで，l_I は温度 T_I，圧力 p_I で静止平衡状態にある蒸気分子の平均自由行程，Δ は指定すべき定数である．式 (6), (7), (9) の数値データ構築の際に用いたモデルボルツマン方程式では，$l_I = (2/\sqrt{\pi})(2RT_I)^{1/2}/A_c n_I = (2/\sqrt{\pi})(2RT_I)^{1/2}(\mu/p_I)$ である．この場合，流体力学極限 (${\rm Kn} \to 0$) では，$n_{\rm av}^B/n_I \to 0$ より，非凝縮性気体の平均濃度は無限小になる．

$A/L = 0.2$, $T_{II}/T_I = 1$, $p_{II}/p_I = 2$, $\Delta = 2$ の場合について，オイラー方程式とその境界条件を数値的に解いて得られた蒸気の流線の様子を図 2 に示す．このパラメータの設定では，平面凝縮相で蒸発が，正弦波状凝縮相で凝縮が起こる．図の (a), (b), (c), (d) はそれぞれ異なる平板の速さ，すなわち $\hat{U}_{II} = (2RT_I)^{-1/2}U_{II} = 0$, 0.1, 0.2, 0.3 に対する結果で，実線は $\Delta = 2$，破線は

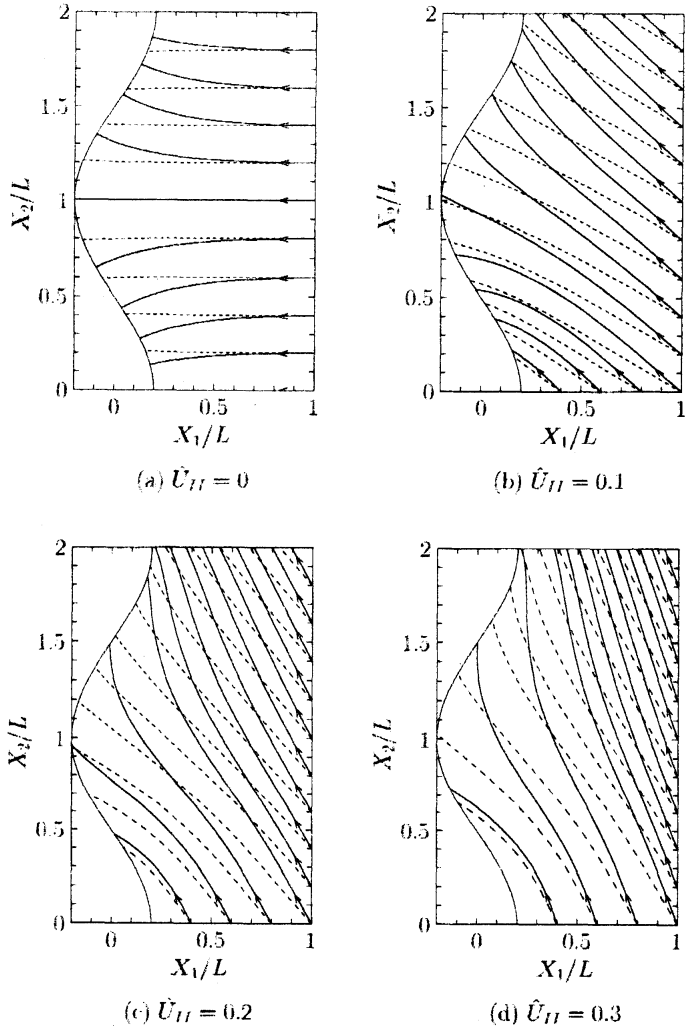

図 2: 平面状および正弦波状凝縮相の間の蒸気流の流線．実線は平均濃度無限小の非凝縮性気体を含む場合（$\Delta = 2$），破線は純粋蒸気流．

純粋蒸気の場合である．図が示すように，平均濃度無限小の非凝縮性気体あるいは不純気体の混入により，蒸気の流れが大きな影響を受けている．蒸気の温度分布や分子数密度分布，さらに Γ，すなわち無限に薄いクヌーセン層に含まれる非凝縮性気体分子数，の正弦状凝縮相に沿っての分布なども [12] に与えられている．

4.2 偏心 2 重円筒状凝縮相間の蒸気流 次に，図 3 に示すような，蒸気の凝縮相でできた偏心 2 重円筒の間の蒸気と非凝縮性気体を考える．R_I（R_{II}）を内円筒（外円筒）の半径，T_I（T_{II}）を内円筒（外円筒）の温度，D を 2 円筒の中心軸間の距離，p_I（p_{II}）を温度 T_I（T_{II}）における蒸気の飽和蒸気圧とする．外円筒は静止しているが，内円筒は表面速さ U_I で反時計回りに回転しているとする．2 円筒間での非凝縮性気体の平均数密度を $n_{\rm av}^B$ とし，$n_{\rm av}^B/n_I$ をやはり式 (13) のようにおく．ここでも $n_I = p_I/kT_I$，l_I は T_I，p_I に対応する平均自由行程である．

$R_{II}/R_I = 2$，$D/R_I = 0.5$，$T_{II}/T_I = 1$，$p_{II}/p_I = 0.5$，$\Delta = 2$ の場合について，オイラー方程式とその境界条件を数値解析して得られた蒸気の流線の様子を図 4 に示す．このときには，内円筒で蒸発が，外円筒で凝縮が起こる．図の (a)，(b)，(c) はそれぞれ異なる内円筒の回転速さ，すなわち $\hat{U}_I = (2RT_I)^{-1/2}U_I = 0$，0.1，0.2 に対する結果で，実線は $\Delta = 2$，破線は純粋蒸気の場合である．やはり，平均濃度無限小の非凝縮性気体の混入により，蒸気の流れが大きな影響を受ける．

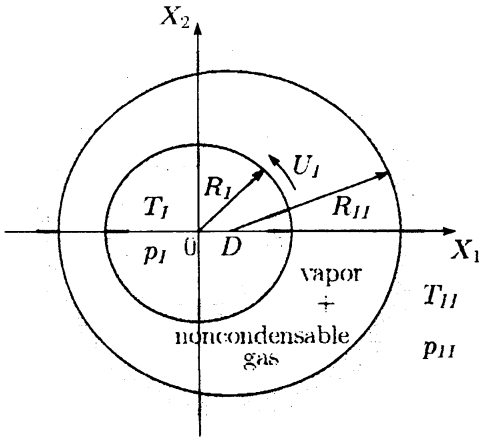

図 3: 偏心 2 重円筒状凝縮相間の蒸気流.

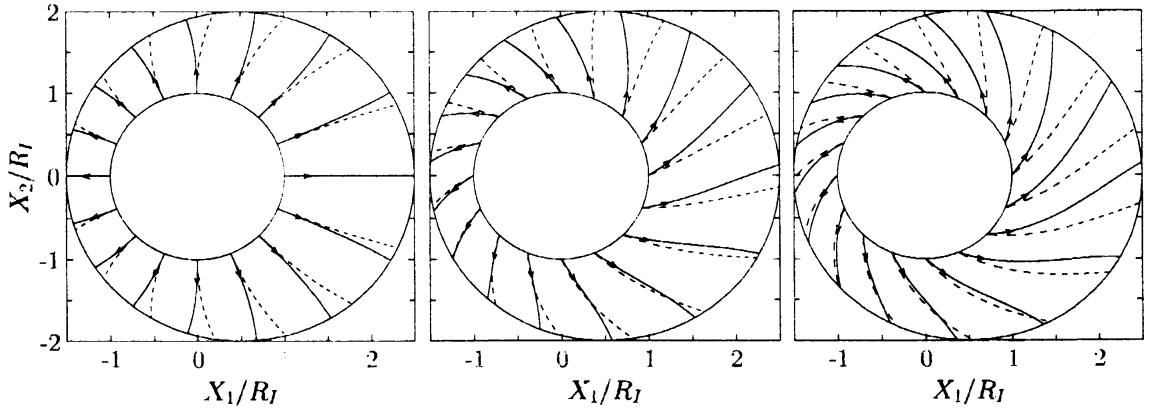

図 4: 偏心 2 重円筒状凝縮相間の蒸気流の流線. 実線は平均濃度無限小の非凝縮性気体を含む場合 ($\Delta = 2$), 破線は純粋蒸気流.

5. おわりに

上で見たように, 界面で蒸発・凝縮を伴う蒸気流は, 流体力学極限において, ごく微量 (平均濃度無限小) の非凝縮性気体によって大きな影響を受ける. この事実およびそれを記述する流体力学方程式系は, ボルツマン方程式とその境界条件からなる系の流体力学極限を考えることによってはじめて導かれる. この系すなわちオイラー方程式と数値的に構築された境界条件は, 理論的に興味あるだけでなく, 実用的にも重要である. たとえばこれによって, ヒートパイプ中の蒸気流に対する不純気体の影響の定量的評価が容易に行える. ボルツマン方程式の数値解法として, 直接シミュレーション・モンテカルロ法 (DSMC 法) とよばれる粒子的・確率論的方法がよく用いられる. これによって 4.1 の問題 (平面凝縮相が静止している場合) の計算を行ったが [14], 計算負荷はクヌーセン数の減少とともに急激に増大し, Kn = 0.005 では (数年前の計算ではあるが) 並列計算で数ヶ月を要した. どのような数値解法でも, 一般に小さなクヌーセン数に対する計算は困難である. 特に今の問題では, 微量の非凝縮性気体が凝縮が起こっている界面のごく薄いクヌーセン層に集中し, その内部構造が蒸気の全体としての流れに影響を与える. この内部構造を正確に捉えない限り全体の流れが正しく求められないため, ボルツマン方程式による計算は非常に難しい. それに比べると, 3.2, 3.3 の流体力学方程式と境界条件の解析ははるかに容易である. したがって, これは流体力学極限だけでなくその近傍に対するモデルとしても有効である.

ここで，本稿では省略した 2.2 の (A) の型の流体力学極限に関連して，少し補足をしておく．そこで述べたように，$n_{\rm av}^B/n_r$ を一定に保った上での $\mathrm{Kn} \to 0$ の極限では，蒸発・凝縮が止まり，流れが無限小になるが（境界が静止している場合を考えている），混合気体の温度場や密度場はこの無限小流れによって大きな影響を受ける．このような事実は，単一成分気体に対して，[15] において見出された．ナビエーストークス方程式にもとづく通常の流体力学では，外力が働いていない場合の静止気体中の定常的温度分布は，(定常) 熱伝導方程式によって与えられる．ところが，ボルツマン方程式系の系統的漸近解析を行うと，流体力学極限で消滅するいわゆる希薄化効果による流れが，この極限においても気体の温度場に有意の影響を与えることが分かった ([3, 4] 参照)．これは，通常の流体力学が，それが成り立つと考えられている流体力学極限においても正しい答えを与えないこと，すなわち流体力学が深刻な欠陥を抱えていることを意味する．この効果は，流体力学極限では見えない「もの」がその極限で効果を現すため，曾根によって「幽霊効果」(ghost effect) と名づけられた．その他の具体例と「幽霊効果」の研究のその後の発展については，[3, 4, 16, 17, 18, 19] を参照されたい．現在では，無限小の境界曲率による幽霊効果を調べることによって，一方の平板がその面内で一定速さで動いている平行 2 平板間の流れにおいて，非圧縮性ナビエーストークス方程式の平面クエット流解（直線の流速分布をもつ一方向流れ）からレイノルズ数無限大で分岐する二次元分岐解が見出されている [19, 4]．これらの事実は，巨視的・現象論的枠組みによる従来の流体力学がもっている重大な欠陥と限界を示すもので，これを回避するには，分子気体力学にもとづく流体力学極限への正しい極限移行が必要である．

以上述べたように，分子気体力学にもとづく漸近解析は，流体力学に非平衡効果による修正を行うという従来の役割以外に，新しい流体力学の建設および流体力学自身の再検討という重要な使命を帯びることになった．

参考文献

[1] Y. Sone, Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary I, Rarefied Gas Dynamics, edited by L. Trilling and H. Y. Wachman (1969), 243–253, Academic Press.

[2] Y. Sone, Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary II, Rarefied Gas Dynamics, edited by D. Dini (1971), Vol. II, 737–749, Editrice Tecnico Scientifica.

[3] Y. Sone, Kinetic Theory and Fluid Dynamics (2002), Birkäuser.

[4] Y. Sone, Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications (2007), Birkäuser.

[5] 曾根良夫，青木一生，分子気体力学 (1994)，朝倉書店．

[6] S. Takata and K. Aoki, The ghost effect in the continuum limit for a vapor-gas mixture around condensed phases: Asymptotic analysis of the Boltzmann equation, Transp. Theor. Stat. Phys. **30**-2 & 3 (2001), 205-237; Erratum: *ibid* **31**, 289 (2002).

[7] K. Aoki, S. Takata, and S. Taguchi, Vapor flows with evaporation and condensation in the continuum limit: Effect of a trace of noncondensable gas, Eur. J. Mech., B/Fluids **22**-1 (2003), 51-71.

[8] Y. Sone and H. Sugimoto, Strong evaporation from a plane condensed phase, Adiabatic Waves in Liquid-Vapor Systems, edited by G. E. A. Meier and P. A. Thompson (1990), 293–304, Springer.

[9] Y. Sone, K. Aoki, and T. Doi, Kinetic theory analysis of gas flows condensing on a plane condensed phase: Case of a mixture of a vapor and a noncondensable gas, Transp. Theor. Stat. Phys. **21-4-6** (1992), 297-328.

[10] S. Taguchi, K. Aoki, and S. Takata, Vapor flows condensing at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a noncondensable gas. I. Subsonic condensation, Phys. Fluids **15**-3 (2003), 689-705.

[11] S. Taguchi, K. Aoki, and S. Takata, Vapor flows condensing at incidence onto a plane condensed phase in the presence of a noncondensable gas. II. Supersonic condensation, Phys. Fluids **16**-1 (2004), 79-92.

[12] S. Taguchi, K. Aoki, and S. Takata, Vapor flows in the continuum limit in the presence of a small amount of noncondensable gas, Phys. Fluids **16**-11 (2004), 4105–4120.

[13] S. Taguchi, K. Aoki, and V. Latocha, Vapor flows along a plane condensed phase with weak condensation in the presence of a noncondensable gas, J. Stat. Phys. **124**-2-4, (2006) 321–369.

[14] K. Aoki, S. Takata, and K. Suzuki, Numerical simulation of a vapor flow with evaporation and condensation in the presence of a small amount of a noncondensable gas, Rarefied Gas Dynamics, edited by A. D. Ketsdever and E. P. Muntz (2003), 638-645, AIP.

[15] Y. Sone, K. Aoki, S. Takata, H. Sugimoto, and A. V. Bobylev, Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit: Examination by asymptotic analysis and numerical computation of the Boltzmann equation, Phys. Fluids **8**-2 (1996), 628-638; Erratum: *ibid* **8**, 841 (1996).

[16] Y. Sone, Flows induced by temperature fields in a rarefied gas and their ghost effect on the behavior of a gas in the continuum limit, Annu. Rev. Fluid Mech. **32** (2000), 779-811.

[17] Y. Sone and T. Doi, Bifurcation of and ghost effect on the temperature field in the Bénard problem of a gas in the continuum limit, Phys. Fluids **15**-6 (2003), 1405-1423.

[18] Y. Sone, M. Handa, and T. Doi, Ghost effect and bifurcation in a gas between coaxial circular cylinders with different temperatures, Phys. Fluids **15**-10 (2003), 2903-2915.

[19] Y. Sone and T. Doi, Ghost effect of infinitesimal curvature in the plane Couette flow of a gas in the continuum limit, Phys. Fluids **16**-4 (2004), 952-971.