

N W T による等方性乱流の直接数値シミュレーション

航 技 研 山 本 稀 義 (Kiyoshi Yamamoto)

電 通 大 細 川 巖 (Iwao Hosokawa)

〃 生 出 伸 一 (Shin-ichi Oide)

1. はじめに

乱流現象は自然界の中ではありふれた流体现象であるが、その力学構造は強い非線形機構によって誘導されるので極めて複雑である。また、その運動を記述するナビエ・ストークス方程式は複雑な3次元の非定常方程式であるので、これを直接数値解析するためには膨大な計算が必要となる。したがって、従来乱流の数値解析は主として簡単なモデル方程式に基づいて行われてきたが、乱流モデルの妥当性等の問題もあり、その解明には多くの問題が残されている。しかし、近年の計算機の発展によって、ナビエ・ストークス方程式を直接計算することが可能となってきた、乱流研究にも新しい展望が開けてきた。このような流体運動の計算による研究は今日では計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics : C F D) と呼ばれ、従来の実験と並ぶ成果を挙げる様に成ってきた。こ

れは主として最近のスーパーコンピュータの飛躍的發展に負っている。すなわち、スーパーコンピュータは現在ベクトル計算機から並列計算機へと發展しているが、その結果、計算速度も飛躍的に速くなり、ギガフロップスから近い将来テラフロップスへ到達しようとしている。航空宇宙技術研究所では昨年新しい並列計算機である数値風洞 (Numerical Wind Tunnel: NWT) を導入したが、その理論的ピーク速度は236ギガフロップスになっている。ここでは、これを応用して行われた等方性乱流の直接数値シミュレーション (DNS) について述べる。

一様等方性乱流のDNSはしばしばその時点の最先端のスーパーコンピュータを用いて挑戦されてきた研究課題である。この様な特別な乱流は、現実の流れの中では固体境界から遠く離れた領域で近似的に実現していると考えられる。しかし、この理論的仮定によって、流れの取扱いは著しく簡単になり、計算領域として流れの中の周期的な立方体を考えることが出来る。計算はこの立方体を可能な限り微小な格子で分割し、各格子点の速度場を計算する。この時ナビエ・ストークス方程式の計算には差分法に比べて計算精度の良いフーリエ・スペクトル法が使用出来る様になる利点がある。最近の等方性乱流のDNSによる研究の例としては以下の様なも

のがある。Kerr(1885)¹⁾は 128^3 格子点で強制乱流のDNSを行い、テイラーのマイクロスケール・レイノルズ数、 R_λ が83までの乱流速度場を計算した。一方、山本と細川(1988)²⁾は同じ 128^3 格子点で減衰乱流のDNSを行い、 $R_\lambda \sim 100$ の乱流速度場を数値解析した。これらのDNSはベクトル計算機で実行された。一方、Vincent & Meneguzzi(1991)³⁾は並列計算機によって 240^3 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R_\lambda \sim 150$ の乱流速度場を導いた。さらに、最近Chen et al(1993)⁴⁾およびJimenez et al(1993)⁵⁾等は 512^3 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R_\lambda \sim 200$ までの乱流速度場を計算した。この様に、乱流のDNSにおいて、並列計算機はますますその威力を発揮するようになってきた。ここでは、NWTを用いて行われた 512^3 格子点の減衰等方性乱流のDNSについて述べる。

2. 数値風洞 (NWT)

NWTは1.7ギガフロップスのピーク速度を持つベクトル計算機をその要素計算機(PE)として最大140台並列化した並列計算機で、その理論的ピーク速度は236ギガフロップスとなる⁶⁾。しかし、現実のCFDプログラムの計算速度はこれよりはかなり小さくなる。その原因は現実の計算プログ

ラムでは各 P E 間のデータ転送が頻繁に必要となるが、これは P E 内だけの計算速度に比べてかなり遅いため、P E 間のデータ転送の頻度に依存して計算速度は遅くなるためである。また、各 P E がベクトル計算機であるので、複雑な計算プログラムについて、ベクトル化と並列化を同時に理想的に達成する事はそれほど容易ではない。本 D N S では、計算の主要部分を占める 3 次元高速フーリエ変換 (F F T) の計算について、3 次元空間をそれぞれベクトル化の軸、並列化の軸、F F T 演算の軸と分割して取り扱う事によって、計算のベクトル化と並列化を同時に達成すること出来た。

図 1 は本 D N S の実際の計算における N W T 並列化の性能測定の結果を示す。横軸の N_{PE} は N W T に使用された P E 台数を表し、縦軸は D N S の時間方向の積分における単位時間ステップ進むのに必要な C P U 時間 (秒) である。図中のいろいろな記号は D N S に使用される格子点数を示す。また、実線は $1/N_{PE}$ の勾配を示し、これはプログラムの並列化が理想的に行われた時の性能曲線と考えられる。それぞれの計算結果は N_{PE} の最大の点を除いてほぼ実線と平行に並んでいて、この範囲では並列化はほぼ理想的に行われていると考えられる。以下の D N S では N_{PE} はこの直線の範囲で選び、 256^3 の D N S は 64 台の P E を使用し、 512^3 の D N S は 128 台の P E

を使用して行なう。その結果、NWTによる 512^3 DNSの計算速度は53ギガフロップスとなっている。

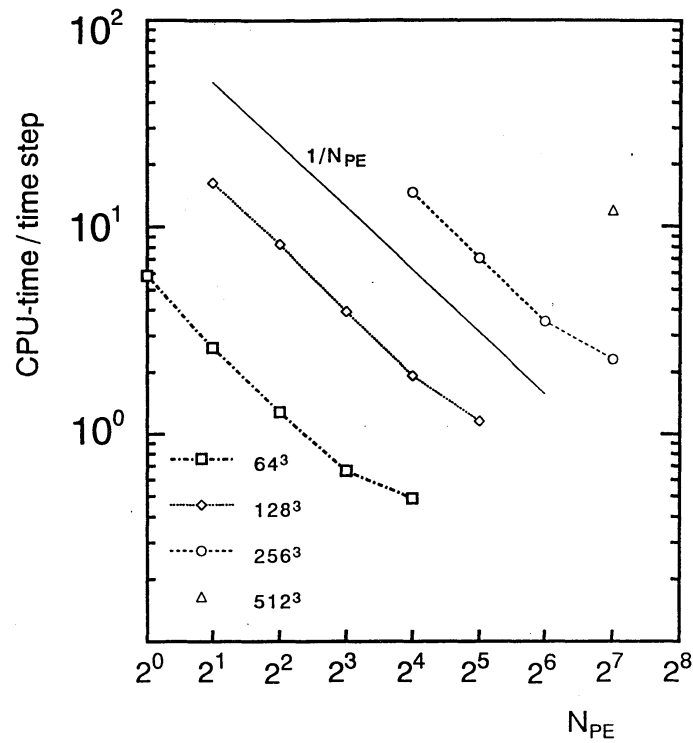


図1 本DNSのプログラムによって測定されたNWT並列化の性能
 N_{PE} はNWTに使用されたPE台数を表す。

3. 基礎方程式

流れの周期性を仮定し、速度場 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \sum_k u(k, t) \exp(ik \cdot x) \quad (1)$$

とフーリエ級数展開すると、 $u(k)$ の基礎方程式はナビエ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - i k p(\mathbf{k}) - \frac{k^2}{R} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \quad (2)$$

とえられる。ここではさらに、受動的スカラーとして温度場 $\theta(x, t)$ を考えるとそのフーリエ成分の方程式は

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'} \theta(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{k^2}{R P_r} \theta(\mathbf{k}) \quad (3)$$

となる。ここで、 R は初期の流れに基づくレイノルズ数、 P_r はプラントル数である。これらの方程式はフーリエ・スペクトル法で計算されるが、その計算法の主たる特徴は(2)、(3)式のコンボリューション和を高速フーリエ変換で効率的に行うことである。乱流の計算においてはこの際に発生する aliasing 誤差を消去することが特に重要となるが、これにはシフト法を使用して消去する¹⁾。そのため、スペクトル法は一般に差分法にくらべて計算精度が良いことが知られている。また、時間方向の積分には精度の良い Runge-Kutta-Gill 法が使用される。

ここでは減衰等方性乱流を取り扱うので初期の乱流速度と温度場を与える必要がある。これには初期の乱れのスペクトルを双方とも

$$E(k) = \frac{16}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (4)$$

と与える。これよりレイノルズ数は $R = v_0 / k_0 \nu$ と定義される。

ここで、 v_0 は $v_0 = \sqrt{2 \int E(k) dk}$ 、 k_0 は (4) の初期スペクトル $E(k)$ が最大値を持つ波数（すなわち、 $k_0 = 1$ ）である。

(1) 式のフーリエ成分の個数はレイノルズ数 R に依存して、1000 の場合は 256^3 個、2000 の場合には 512^3 が必要となる。この様にしてフーリエ成分で計算された速度場は (1) 式によって物理空間に変換されるので、その結果は物理空間の同じ数の空間格子点で計算された速度場と等価である。

4. 計算結果と検討

4.1 エネルギースペクトル

図 2 は速度場のエネルギースペクトルの時間的発達の計算結果を示す。レイノルズ数 R は 2000 である。点線は初期のエネルギースペクトル (4) 式を表す。エネルギースペクトルは時間と共に低波数領域のエネルギーが高波数領域に流れて、時間と共に発達した乱流スペクトルが形成される。そして、無次元時間 t がほぼ 10 で高波数領域におけるエネルギースペクトルは最大になり、その後は全領域でほぼ単調に減衰する。そして、この $t=10$ で得られたエネルギースペクトルの波数の中間領域（波数 k が 2 ～ 30 の範囲）で k の巾乗領域が実現し、その分布は $k^{-5/3}$ 分布（コルモゴロフ・スペクトル）に近い。

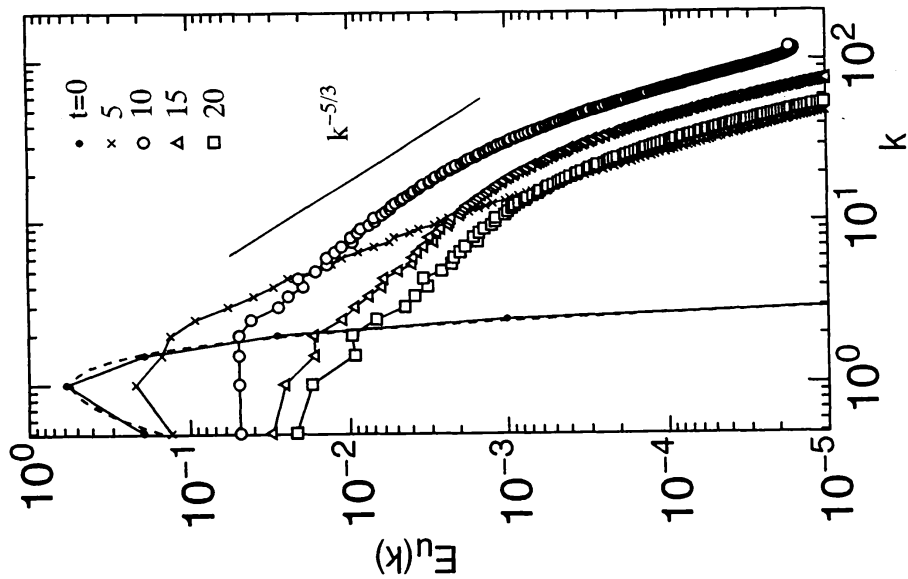


図2 エネルギースペクトルの時間的发展

$R = 2000$ 。点線は初期スペクトル(4)を表す。

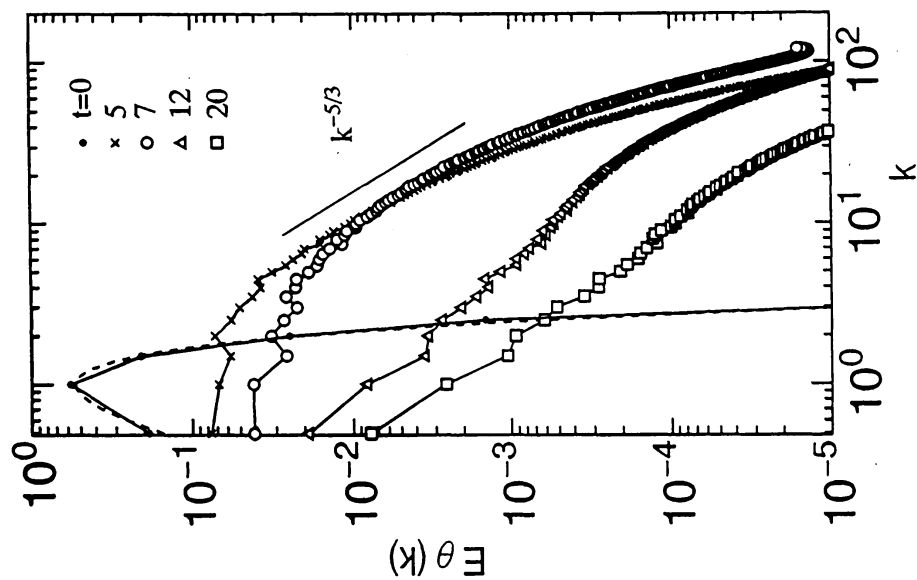


図3 温度場の分散スペクトルの時間的发展

$R = 2000$, $Pr = 1$ 。点線は初期スペクトル(4)を表す。

しかし、その一致は必ずしも厳密ではない。この不一致はこれまでの DNS でも見られる傾向で⁸⁾、今後の問題である。

この $t=10$ で得られた乱流速度場は $R_\lambda = 134$ となり、発達した乱流の速度場と考えることが出来るので、これを数値解析して乱流のいろいろな微細構造を調べてみる。

図 3 は温度場の分散スペクトルの時間的発達の結果を示す。プラントル数は 1 と選んだ。スペクトルの発達の傾向は図 2 のエネルギースペクトルとほぼ同様であるが、その発達の時間スケールはエネルギースペクトルに比べて早く、 $t=7$ で高波数領域の最も発達したスペクトルが得られている。この温度分散スペクトルについては Batchelor⁹⁾ によって慣性領域で同様に $k^{-5/3}$ 分布となることが予測されている。計算結果におけるこのスペクトルの実現領域は図 2 のエネルギースペクトルに比べて良くない。

4.2 確率分布関数

乱流の力学を記述する基本的な物理量は速度の確率分布関数である。 $t=10$ で得られた発達した乱流速度場と温度場のデータから流れ場のいろいろな確率分布を計算してみる。

図 4 は速度 u の確率分布の計算結果を示す。実線はガウス分布を示す。計算結果はガウス分布と良く一致している。速

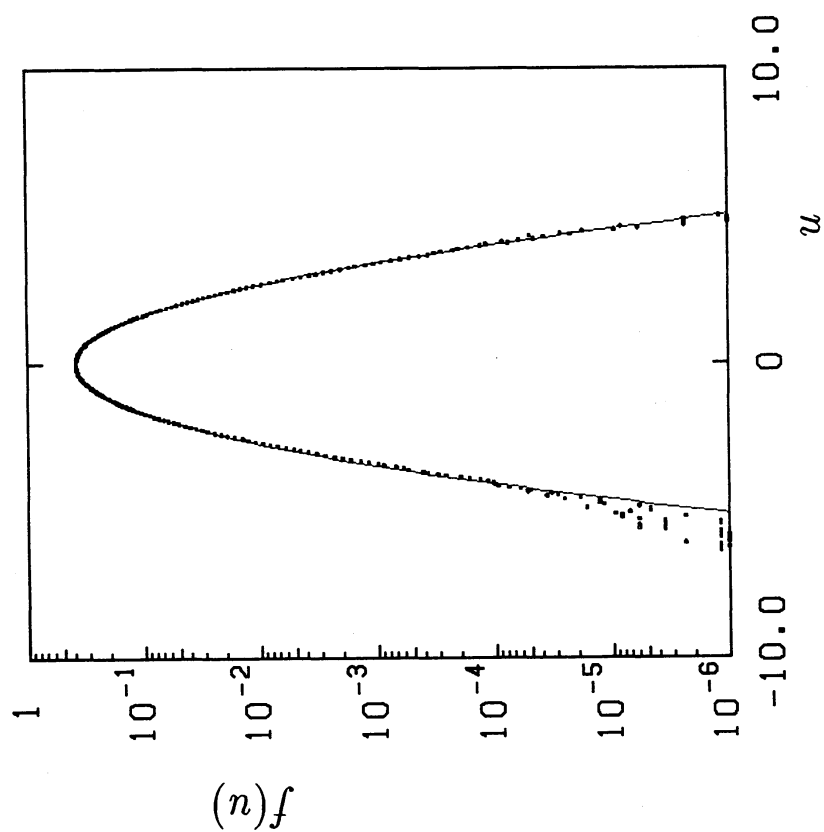


図4 速度 u の確率分布関数

$R = 2000$, $t = 10$ 。実線はガウス分布を示す。

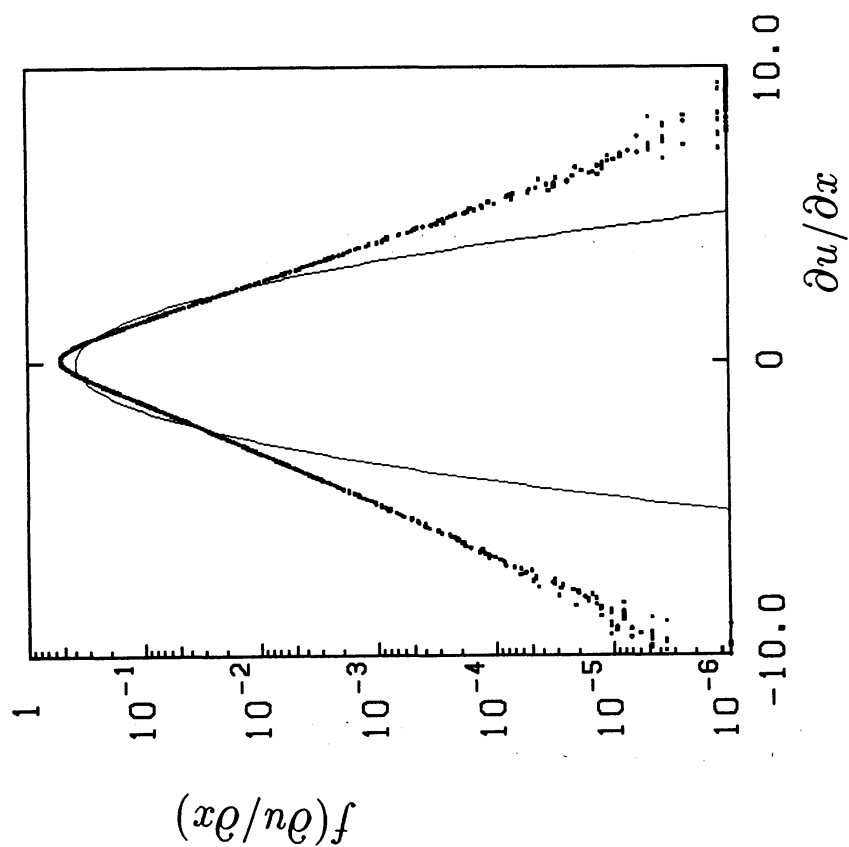


図5 速度の縦微分 $\partial u / \partial x$ の確率分布関数

$R = 2000$, $t = 10$ 。実線はガウス分布を示す。

度場のガウス分布については理論的にも予測され、実験的にも検証されている¹⁰⁾。

一方、図5は速度の縦微分 $\partial u / \partial x$ の確率分布を示す。計算結果はガウス分布とは全く異なり指数分布をしている。乱流に於けるこのような指数分布は最近のDNSによって導出された結果で^{11), 12)}、乱流ではしばしば現れる分布であることが分かってきた。図5の結果の他の重要な特徴は分布が横軸の原点について非対称で、負の領域の確率が正の領域の確率より大きくなっていることである。これは乱流におけるカスケード機構に関連している重要な性質である。一方、速度の横微分 $\partial u / \partial y$ の確率分布を計算してみると図5と同様に指数分布を示すが、この場合は分布は横軸の原点に対して対称になる。また、温度場の確率分布はほぼガウス分布となる。

4.3 乱流の微細構造

乱流場の変動のデータを時空間で直接得られるのがDNSの大きな利点である。これを数値解析することによって、乱流場の時空間の微細構造を直接調べることが出来る。

図6は乱流中の高渦度領域が空間的に細い渦管状に集中することを図示した結果で、薄い灰色領域は $3\langle\omega\rangle$ 、黒色の領域は $5\langle\omega\rangle$ を敷居値として描いてある。ここで $\langle\omega\rangle$ は渦度の



図6 乱流の高渦度領域の空間的集中する形状
 $R = 2000$, $t = 10$ 。灰色の領域は $3 < \omega <$ 、
 黒色の領域は $5 < \omega <$ を数居値として描
 かれている。

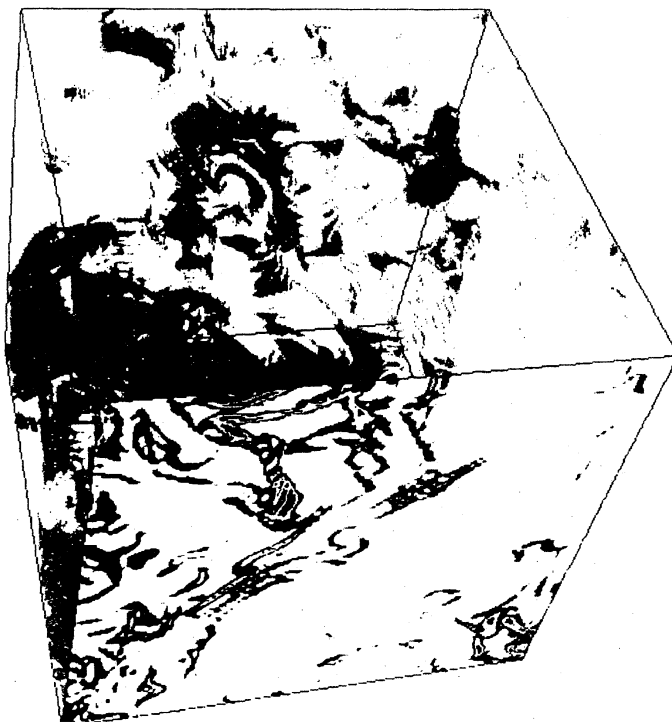


図7 乱流中の温度場の勾配 H の高い領域が空間的
 に集中する形状 ($R = 2000$, $Pr = 1$, $t = 10$)
 黒色の領域は H の平均値を数居値として描か
 れている。

自乗平均である。図から渦度は細長い管状の領域に階層的に集中することが分かる。この様な高渦度領域の階層的構造は最近の数値シミュレーションによって明らかにされたことである。この集中領域が渦管であることは速度分布から分かる。この様な乱流中の渦度の集中する形状に関しては、これまで理論的に渦管状¹³⁾およびシート状¹⁴⁾となることが予測されていたが、図6の結果は前者を支持する。

一方、図7は乱流温度場の勾配 $H = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^{1/2}$ の強い領域が、図6と同様に、空間的に集中する形状を図示した結果である。図中の雲のような黒い領域はHの平均値を数居値として等高面を透視図で描いたものである。一方、立方体の左端面ではその断面が示されているが、そこでは1次元的な紐状になっている。この結果はHの集中する領域が空間的にシート状に分布することを示している。

この様な渦度場と温度場の勾配が空間的に渦管およびシート状に集中する力学機構はまだ十分には解明されていない。

5. 結 び

航空宇宙技術研究所に導入された数値風洞(NWT)を応用して減衰一様等方性乱流の空間格子点数が 512^3 までのDNSを行い、乱流の速度場や温度場のエネルギースペクトルの

時間的発達を調べた。また、 $t=1.0$ で得られた発達した乱流場を数値解析して、いろいろな乱流場の確率分布を計算した。さらに、乱流の渦度場や温度勾配の空間的集中領域を図形表示した結果、渦度場は空間的に1次元的な管状領域に集中し、温度勾配は2次元的なシート状領域に集中することが分かった。このような乱流場の空間的集中の力学機構はまだ明確には分かっていないので、今後の課題である。

参考文献

- 1) R. M. Kerr: J. Fluid Mech., 153 (1985) 31.
- 2) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988) 1532.
- 3) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech., 225 (1991) 1.
- 4) S. Chen et al: Phys. Fluids, A 5 (1993) 458.
- 5) J. Jimenez et al: J. Fluid Mech., 255 (1993) 65.
- 6) T. Iwamiya et al: to appear in Proc. Parallel CFD' 93.
- 7) C. Canuto et al: Spectral Methods in Fluid Dynamics, 1988, Springer-Verlag, New York.
- 8) Z-S. She et al: Phys. Rev. Letts., 70 (1993) 3251.
- 9) G. K. Batchelor: J. Fluid Mech., 5 (1956) 113.
- 10) A. S. Monin and A. M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, 2, 1975, MIT Press Cambridge.
- 11) Z-S. She et al: J. Sci. Comput. 3 (1988) 497.
- 12) K. Yamamoto and T. Kambe: Fluid Dynamics Research, 8 (1991) 65.
- 13) H. Tennekes: Phys. Fluids, 11 (1968) 669.
- 14) R. Betchov: J. Fluid Mech., 1 (1956) 497.