

# 測度値拡散過程に対する可逆性の問題について

On the problem of reversibility for measure-valued diffusions

半田 賢司 (Kenji Handa)

佐賀大学 理工学部 (Saga University)

生物・集団遺伝学を動機とした拡散過程モデルにおいては、可逆性のための構造が予め「仕組まれた」ものは少ない様であり、可逆性が非自明であるモデルも多い。特に無限次元の場合には、数学的にも興味深い問題を与える。ここでは Fleming-Viot 過程と呼ばれる確率測度値拡散過程を取り上げ、その様な問題を考察した結果を報告する。

## 1 モデルと結果

生物等のある集団における個体の型の頻度分布についての時間発展を考える。可能な型の全体を  $E$  で表せば、頻度分布は  $E$  上の確率測度として記述される。ここでは、「型の空間 (type space)」 $E$  はコンパクト距離空間であると仮定し、 $E$  上の Borel 確率測度全体を  $\mathcal{M}_1(E)$  で表す。(自明な場合を除くために、「 $E$  は 1 点集合ではない」とする。) いわゆる Wright-Fisher 型のマルコフ連鎖モデルからの極限過程として、次のような形式的生成作用素  $\mathcal{L}$  を持つ  $\mathcal{M}_1(E)$ -値拡散過程が導出される [6]。

$$\mathcal{L}\Phi(\mu) = \langle \mu, A \frac{\delta\Phi(\mu)}{\delta\mu(x)} \rangle + \langle B(\mu), \frac{\delta\Phi(\mu)}{\delta\mu(x)} \rangle + \frac{1}{2} \langle Q(\mu), \frac{\delta^2\Phi(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)} \rangle \quad (1)$$

ただし、一般に  $\langle m, f \rangle$  または  $\langle m, f(x) \rangle$  は (符号付き) 測度  $m(dx)$  による関数  $f(x)$  の積分を表し、 $A$  は  $D(A)$  を定義域とする  $E$  上の保存的 Feller 過程の生成作用素、 $\frac{\delta\Phi(\mu)}{\delta\mu(x)}$  および  $\frac{\delta^2\Phi(\mu)}{\delta\mu(x)\delta\mu(y)}$  は汎関数微分であり、 $B(\mu) = W(\mu) + \rho R(\mu)$  ( $\rho$  は正定数) と  $Q(\mu)$  は次のように与えられる符号付き測度である。

$$\begin{aligned} W(\mu)(dx) &= (\int_E V(x, y)\mu(dy) - \langle \mu \otimes \mu, V \rangle) \mu(dx), \\ R(\mu)(dx) &= \int_E \int_E \eta(x_1, x_2; dx) \mu(dx_1) \mu(dx_2) - \mu(dx), \\ Q(\mu)(dxdy) &= \delta_y(dx) \mu(dy) - \mu(dx) \mu(dy). \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $V$  は  $E \times E$  上の有界かつ対称な Borel 可測関数、 $\eta$  は  $C(E)$  から  $C(E^2)$  への作用素を定義する確率核とする。作用素  $A$  は突然変異のダイナミクスを記述するものであり、mutation operator と呼ばれる。 $V$  は自然淘汰の効果を記述する”重み”関数であり、selection intensity と呼ぶ。 $\eta, \rho$  はそれぞれ、組み替えの効果とその強さを表す。前者を recombination kernel と呼ぶ。 $R(\mu)$  の定義からわかるように、 $\eta(x_1, x_2; \cdot)$  は  $x_1, x_2$  について対称であると仮定して一般性を失わない。

$\mathcal{L}$  は、 $\Phi(\mu) = P(\langle \mu, f_1 \rangle, \dots, \langle \mu, f_n \rangle)$  ( $n \in \mathbb{N}, P$  は  $n$  変数多項式,  $f_1, \dots, f_n \in D(A)$ ) という型の関数全体  $\mathcal{D}$  の上で well-defined であり、ここで考える Fleming-Viot 過程 (以下「 $\mathcal{L}$ -過程」と呼ぶ) は、Ethier-Kurtz [6] によって得られた  $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ -マルチンゲール問題の一意解である。

応用の観点から言っても、定常分布を具体的に求める事は重要である。しかしながら、一般にそれは簡単ではない。では、どのような場合に具体的に求める事が可能となるのであろうか？有限次元の場合から類推すると、その候補として「可逆分布を持つ場合」が考えられる。そこで次の問題を考えよう。

**問題1**  $\mathcal{L}$ -過程が可逆分布を持つための必要十分条件を、 $A, V, \eta$  の言葉で求めよ。

**問題2** 可逆分布を持つ場合に、その具体形を与えよ。

次の定理がこれらの答えを与える。

**定理 1**  $A$  が生成する  $C(E)$  上の半群  $\{T_t\}$  は既約である (i.e.,  $\forall x \in E \forall f \in C(E), \geq 0$  に対し、 $\|f\|_\infty > 0 \Rightarrow \sup_{t>0} T_t f(x) > 0$ ) が成り立つ) と仮定する。このとき、 $\mathcal{L}$ -過程が可逆分布を持つための必要十分条件は、 $A$  および  $\eta$  が次の型である事である：

ある  $\theta > 0, m \in \mathcal{M}_1(E)$  および  $F \in C(E)$  が存在して

$$Af(x) + \rho \left( \int_E f(z) \eta(x, x; dz) - f(x) \right) = \frac{\theta}{2} (\langle m, f \rangle - f(x)), \quad (3)$$

$$\eta(x, y; dz) = \frac{1}{2} (\eta(x, x; dz) + \eta(y, y; dz)) + (F(x) - F(y)) (\delta_x(dz) - \delta_y(dz)). \quad (4)$$

そして、このときの可逆分布は一意であり、次式で与えられる：

$$\Pi(d\mu) = Z^{-1} \exp [\langle \mu \otimes \mu, V \rangle + 4\rho \langle \mu, F \rangle] \Pi_{\theta, m}(d\mu) \quad (5)$$

ここに  $\Pi_{\theta, m}$  はパラメータ  $\theta m$  の Dirichlet ランダム測度であり、 $Z$  は右辺が  $\mathcal{M}_1(E)$  上の確率測度となるための正規化定数である。 ■

形式的に  $\rho = 0$  とすると、Li-Shiga-Yao の結果 [12] (ただし、そこでの  $E$  は「局所コンパクト可分」と、より一般的) となるが、証明の手法は異なる。彼らの手法はモーメントの計算を基礎にしたものであるが、組み替えを考慮するときには適用は困難と思われる。定理 1 の証明については次節で述べる。ここでは、条件 (3), (4) について注意を与える。

**注意 1** (3) を満たす mutation operator  $A$  は次の型を取る：

$$Af(x) = \lambda(x) \left( \int_E f(z) \phi(x, z) m(dz) - f(x) \right).$$

ここに、 $\lambda$  は正の Borel 可測関数、 $\phi(x, z)$  は非負可測関数で  $\int_E \phi(x, z) m(dz) = 1 (x \in E)$  を満たす。

**注意 2**  $E \times E$  から  $E$  への対称な確率核  $\eta(x, y; dz)$  と  $F \in C(E)$  とが与えられたときに、

$$\eta(x, y; dz) + (F(x) - F(y)) (\delta_x(dz) - \delta_y(dz))$$

がやはり  $E \times E$  から  $E$  への確率核となるための必要十分条件は、

$$\eta(x, y; \{x\}) + F(x) - F(y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E.$$

特に、 $E$  上の確率核  $\xi(x; dz)$  が与えられたとき、

$$\frac{1}{2}(\xi(x; dz) + \xi(y; dz)) + (F(x) - F(y))(\delta_x(dz) - \delta_y(dz))$$

が  $E \times E$  から  $E$  への確率核となるための一つの十分条件として、次が挙げられる。

$$\inf_{x \in E} \xi(x, \{x\}) \geq 2 \sup_{x, y \in E} (F(x) - F(y)).$$

**注意 3** いわゆる two-locus モデル (cf. [6]) における元来の recombination kernel は、(4) を満たさない。すなわち、 $E = E_1 \times E_2$  ( $E_1$  も  $E_2$  も 1 点集合でないとする) の場合に、次で定義される確率核

$$\eta((x_1, x_2), (y_1, y_2); dz) = \frac{1}{2} (\delta_{(x_1, y_2)}(dz) + \delta_{(y_1, x_2)}(dz))$$

を考える。このとき、 $\eta$  による積分は、 $x = (x_1, x_2)$  のみの関数と  $y = (y_1, y_2)$  のみの関数との和で一般に表されない。

## 2 定理 1 の証明のアイデア

定理 1 の前半部 (3), (4) の導出は、次の 2 つのステップに大きく分けられる：

1. 有限次元の場合 (cf. [11]) の類似として「可逆となるためには、ドリフト項が "勾配型" でなければならない」事を何らかの形で正当化する。
2. ドリフト項が "勾配型" となるための条件を、具体的に求める。

ドリフト項が重要な役割を果たすので、これを  $D(A)$  上の線形汎関数として次式で定義する。

$$\langle b(\mu), f \rangle = \langle \mu, Af \rangle + \langle W(\mu), f \rangle + \rho \langle R(\mu), f \rangle, \quad f \in D(A) \quad (6)$$

### 2.1 可逆性 $\iff$ 準不変性

第 1 段は、可逆分布である事を次の準不変性の条件で言い換えることによりなされる。すなわち、 $E$  上の有界 Borel 関数  $f$  に対し、 $\mathcal{M}_1(E)$  上の "シフト"  $S_f$  を

$$d(S_f \mu) = \langle \mu, e^f \rangle^{-1} e^f d\mu$$

で定義すれば、

**命題 1**  $\Pi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$  が  $\mathcal{L}$ -過程の可逆分布であることと次は同値：

$$\frac{d(\Pi \circ S_f)}{d\Pi}(\mu) = \exp \Lambda(f, \mu) \quad \Pi\text{-a.s.}, \quad \forall f \in D(A) \quad (7)$$

$$\text{ただし} \quad \Lambda(f, \mu) = 2 \int_0^1 \langle b(S_{uf} \mu), f \rangle du. \quad (8)$$

このような可逆性と準不変性との同値性は、勾配型の無限次元拡散過程の研究において用いられてきた ([4], [7], [15] 等)。そこではさらに可逆分布は Gibbs 分布として特徴づけられている。命題 1 は [7] におけるのと同様の議論・計算により示されるので、ここでは「コサイクル」 $\Lambda$  の式 (8) を、全く発見的に導いて見よう。まず、可逆分布  $\Pi$  は次の形式的表示を持つとする。

$$\Pi(d\mu) = Z^{-1} e^{-U(\mu)} \mathcal{D}\mu \quad (9)$$

ここに、 $U$  はある”ポテンシャル”関数、 $\mathcal{D}\mu$  は  $\mathcal{M}_1(E)$  上の (ときに仮想的な、何らかの意味での) 一様測度、 $Z$  はそれに関する正規化定数である。このとき  $\Pi$  は、形式的にコサイクル  $\Lambda(f, \mu) = U(\mu) - U(S_f \mu)$  を持つ準不変分布であると考えられる。一方、有限次元の場合の形式的な類似として、 $\mathcal{L}$  が  $L^2(\Pi)$  で対称となるための必要十分条件は、ドリフト項が  $U$  のしかるべき”勾配”の  $-\frac{1}{2}$  倍と一致する事であろう。勾配として  $\{S_f\}$  の無限小変換を用いれば、この条件は

$$\langle b(\mu), f \rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{du} U(S_{uf} \mu) \Big|_{u=0} =: -\frac{1}{2} \langle \nabla U(\mu), f \rangle \quad (10)$$

となる。したがって

$$\Lambda(f, \mu) = U(\mu) - U(S_f \mu) = -\int_0^1 \frac{d}{du} U(S_{uf} \mu) du = 2 \int_0^1 \langle b(S_{uf} \mu), f \rangle du \quad (11)$$

となり、(8) を得た。むしろ逆に、命題 1 を証明する事によって上記のアイデアの正当性を見たと言うべきであろう。

## 2.2 コサイクル恒等式

第 2 段における最大の道具は、次の「コサイクル恒等式」である。

$$\Lambda(f + g, \mu) = \Lambda(f, S_g \mu) + \Lambda(g, \mu), \quad \Pi\text{-a.s.}, \quad \forall f, g \in D(A) \quad (12)$$

これは、 $S_{f+g} \mu = S_f(S_g \mu)$ , (7) と連鎖律から直ちに導かれるが、ドリフト項  $b(\mu)$  の構造に決定的な制限を与えることは明らかであろう。形式的レベルでは、第 1 段で示したかった (a) ドリフト項が  $U(\mu) := \sup_f \Lambda(f, \mu)$  の勾配 (の  $-\frac{1}{2}$  倍) で与えられる

事を意味するだけでなく、

(b)  $U$  の Hessian の対称性

という全く自然な言い換えを持つ事がわかる。実際、(12) の両辺で  $f$  について上限を取れば  $U(\mu) = U(S_g \mu) + \Lambda(g, \mu)$  となるが、公式 (8) により、これは (a) の積分形に他ならない。(b) の意味を述べるために、ドリフトの勾配  $\nabla b(\mu)$  を定義しよう。

$$\nabla b(\mu)[f, g] = \frac{d}{du} \langle b(S_{ug} \mu), f \rangle \Big|_{u=0} \quad (13)$$

このとき、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Lambda(f+g, \mu) - \Lambda(f, S_g \mu) - \Lambda(g, \mu) \\ = - \int_0^1 dv \int_0^v du (\nabla b(S_{uf+vg} \mu)[f, g] - \nabla b(S_{uf+vg} \mu)[g, f]). \end{aligned}$$

$f, g$  の任意性から、結局コサイクル恒等式は双線形形式  $\nabla b(\mu)$  の対称性の条件

$$\nabla b(\mu)[f, g] = \nabla b(\mu)[g, f], \quad \forall f, g \in D(A) \quad (14)$$

と同値である。さらに (a) の関係式  $b(\mu) = -\frac{1}{2} \nabla U(\mu)$  に注意すれば、上記は Hessian  $\nabla^2 U(\mu)$  の対称性に相当すると言えるのである。

なお、可逆性の条件 (3), (4) において  $V$  の寄与が全く無い理由は、 $V$  を含むドリフト項  $W(\mu)$  が常に“勾配型” (i.e.,  $\{S_f\}$  の無限小変換により与えられるもの) となっているからである。実際、 $\tilde{V}(\mu) = \langle \mu \otimes \mu, V \rangle$  とおくと次が成り立つ。

$$W(\mu) = \frac{1}{2} \nabla \tilde{V}(\mu). \quad (15)$$

したがって、既に (12), (14) の時点で、 $W(\mu)$  は姿を消している。また (15) は可逆分布に関する様々な問題を、 $W \equiv 0$  の場合 (自然淘汰を考慮しない場合) に帰着させてくれる。例えば、命題 1 と (15) を組み合わせれば、容易に次が得られる。

**補題 1**  $W \equiv 0$  の場合の形式的生成作用素 (1) を  $\mathcal{L}_0$  で表す。このとき、 $\Pi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$  が  $\mathcal{L}$ -過程の可逆分布であることと、 $\exp[-\tilde{V}(\mu)]\Pi(d\mu)/\text{normalization}$  が  $\mathcal{L}_0$ -過程の可逆分布であることは同値。逆に、 $\Pi_0 \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$  が  $\mathcal{L}_0$ -過程の可逆分布であることと、 $\exp[\tilde{V}(\mu)]\Pi_0(d\mu)/\text{normalization}$  が  $\mathcal{L}$ -過程の可逆分布であることは同値。

これにより、以下では  $W \equiv 0$  とする。

## 2.3 「 $\nabla b(\mu)$ の対称性の条件」を紐解く

ここまでの議論はかなり汎用性を持つと思われる物であるが、一方これから先、(3), (4) を導き出すまでの過程は、 $f, g$  だけでなく  $\mu$  も広く動かして等式 (14) を紐解いていくという具体的で地道な作業であり、そこではモデル固有の議論と計算が必要となる。 $\mu$  も広く動かすことができるのは  $\Pi$  の台が大きいからであり、それは  $\Pi$  の準不変性と  $\{T_t\}$  の既約性からの帰結である。技術的に重要なこの事実は、次の命題として述べられる。

**命題 2**  $\{T_t\}$  は既約であるとする。 $\Pi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$  は、(7), (8) を満たすとする。このとき、 $\Pi(\text{supp } \mu = E) = 1$ 。

では、(14) で「 $\mu$  も広く動かして」とはどういう事なのか？この説明のために、準不変性等を用いて (14) を次のように強める。 $\Pi$  に関して確率 1 で、

$$\nabla b(S_h \mu)[f, g] = \nabla b(S_h \mu)[g, f], \quad \forall f, g \in D(A), h \in B(E) \quad (16)$$

ただし、 $B(E)$  は  $E$  上の有界 Borel 可測関数の全体である。命題 2 で示されたように  $\Pi$  の下では確率 1 で  $\text{supp}\mu = E$  であるから、各  $x \in E$  に対し  $B(E)$  の適当な列  $\{h_n\}$  を取って  $\{S_{h_n}\mu\}$  をデルタ分布  $\delta_x$  に弱収束させる事ができる。この操作により (16) から各点毎の恒等式が導けるのである。

組み替えのある場合の計算は複雑なので、以下ではこれを考慮しない場合 (i.e.,  $\rho = 0$  のとき) に残りの計算の概略を説明したい。これは、Li-Shiga-Yao [12] の結果に対する別証明のあらすじを、これまで述べてきたアイデアに沿って与えることにもなる。まずは対称性 (14) を具体的に書き下してみる。

$$\langle \mu, Af \cdot g \rangle - \langle \mu, Af \rangle \langle \mu, g \rangle = \langle \mu, f \cdot Ag \rangle - \langle \mu, f \rangle \langle \mu, Ag \rangle$$

これを満たす Markov 生成作用素  $A$  は (3) の右辺の型のものに限る事を示そう。まず、 $\mu$  を凸結合  $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$  ( $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E), \lambda \in [0, 1]$ ) で置き換えると、 $\lambda$  に関する 2 次の恒等式が得られる。そこでの  $\lambda^2$  の係数に着目して、

$$\langle \mu - \nu, Af \rangle \langle \mu - \nu, g \rangle = \langle \mu - \nu, f \rangle \langle \mu - \nu, Ag \rangle.$$

ここで先に述べたような操作により、 $\mu, \nu$  をそれぞれ  $\delta_x, \delta_y$  で置き換えると、

$$(Af(x) - Af(y))(g(x) - g(y)) = (f(x) - f(y))(Ag(x) - Ag(y)).$$

これより

$$Af(x) - Af(y) = \alpha(f(x) - f(y))$$

を満たす、 $f, x, y$  によらない定数  $\alpha \neq 0$  の存在が示される。両辺を  $A$  の定常分布 ( $m$  と書く) で  $y$  について積分して

$$Af(x) = \alpha(f(x) - \langle m, f \rangle)$$

となるが、最大値の原理より  $\alpha < 0$  でなければならないので、 $\theta = -2\alpha > 0$  と置くと (3) の右辺を得る。

## 2.4 可逆分布の決定

条件 (3), (4) が導けた以上は、今度はこれらを仮定して可逆分布を決定すればよい。そのために再び命題 1 のお世話になる。

$$\Xi f(x) = \int_E f(z) \eta(x, x; dz) - f(x)$$

とおくと、(3), (4) の下でコサイクルは

$$2 \int_0^1 \langle S_{uf}\mu, (A + \rho\Xi)f \rangle du + 4\rho(\langle S_f\mu, F \rangle - \langle \mu, F \rangle) \quad (17)$$

と書ける。 $(W \equiv 0$  としている事に注意。) このことから、補題 1 と同様に

$$\tilde{\Pi}(d\mu) := e^{-4\rho\langle \mu, F \rangle} \Pi(d\mu) / \text{normalization} \quad (18)$$

が、mutation operator  $A + \rho\Xi$ ,  $W \equiv 0$ ,  $\rho = 0$  の Fleming-Viot 過程の可逆分布であることが従う。ここで  $A + \rho\Xi$  は (3) で与えられるとしているため、 $\tilde{\Pi}$  は  $\Pi_{\theta,m}$  として一意に与えられる [6]。すなわち  $\tilde{\Pi} = \Pi_{\theta,m}$ , したがって (5) が得られた。

実はこの部分の直接的な証明が存在する。それには (17) と (3) より  $\tilde{\Pi}$  がコサイクル

$$2 \int_0^1 \langle S_{uf}\mu, (A + \rho\Xi)f \rangle du = \theta(\langle m, f \rangle - \log\langle \mu, e^f \rangle) \quad (19)$$

を持つ準不変測度である事を用いる。このような分布が  $\Pi_{\theta,m}$  に限る事は、[14] で得られたガンマ過程の準不変性を用いても示すことができるが、(19) の型のみを用いた計算でも示す事が可能である [10]。また、コサイクル (19) から 2.2 の (a) における "ポテンシャル"  $U$  を計算すると

$$U(\mu) = \theta \sup_f (\langle m, f \rangle - \log\langle \mu, e^f \rangle) = \theta H(m|\mu)$$

を得る。ここで、 $H(m|\mu)$  は  $\mu$  に関する  $m$  の相対エントロピーである。したがって、(9) に戻ると  $\Pi_{\theta,m}$  に対する次の形式的表示が得られる。

$$\Pi(d\mu) = Z^{-1} e^{-\theta H(m|\mu)} \mathcal{D}\mu \quad (20)$$

実際、 $H(m|\mu) < \infty$  のとき

$$\theta H(m|\mu) - \theta H(m|S_f\mu) = \theta(\langle m, f \rangle - \log\langle \mu, e^f \rangle) \quad (21)$$

が成り立つから、(19) の後で述べた  $\Pi_{\theta,m}$  の準不変性は (20) の一つの意味づけと見る事ができる。条件付き分布を用いた別の型の (しかし準不変性と同値な) 意味づけも存在する [10]。(有限次元 Dirichlet 分布に対しては、直接的な意味づけが可能である。後の補足 3 の最後を参照。) また、Wiener 測度に関するいわゆる Shilder 型の大偏差原理の類似として、 $\Pi_{\theta,m}$  に関して次の結果が知られている [3] :

$$\Pi_{\theta,m}(\{\mu\}) \approx \exp(-\theta H(m|\mu)) \quad (\theta \rightarrow \infty) \quad (22)$$

これは雑な書き方だが、詳しくは「分布の族  $\{\Pi_{\theta,m}\}_{\theta>0}$  は  $\theta \rightarrow \infty$  のとき、スピード  $\theta$ , rate function  $I(\mu) := H(m|\mu)$  の大偏差原理を満たす」という事である。これも (20) と符合する結果である。

最後に注意したいのは、「ポテンシャル  $U(\mu)$  は全く形式的なものでも、その形式的差分や勾配  $\nabla U(\mu)$  は厳密に定義されうる」という事である。例えば上の  $U(\mu) = \theta H(m|\mu)$  の場合、よく知られた事実として  $\Pi_{\theta,m}$  の下で  $\mu$  は a.s. に離散分布であるから、 $m$  が連続分布なら  $\Pi_{\theta,m}(U(\mu) = \infty) = 1$  となる。しかし、形式的差分は (21) の右辺のように常に有限な値であり、勾配  $\nabla U(\mu)$  もそれから

$$\langle \nabla U(\mu), f \rangle = -\theta(\langle m, f \rangle - \langle \mu, f \rangle)$$

と計算される。これは、(3) の右辺で与えられる mutation operator を持ち自然淘汰も組み替えも考慮しないという典型的な可逆 Fleming-Viot 過程のドリフトの定数倍に他ならない。この意味で、そのドリフト項は”勾配型”であると言える。

## 補足

### 1. 他の無限次元拡散過程について

前節のうち 2.1, 2.2 で述べたような議論は、他の無限次元拡散過程に対しても通用し得ると考えられる。それには、いわゆる superprocess (cf. e.g. [2]) の他、stepping stone model など相互作用のある測度値拡散系 (e.g. [8])、[13], [1] で議論された相互作用のある拡散系、などが該当すると思われる。残念ながら、ラフな計算を眺める限りにおいては、自明でない可逆分布が見つかる感触は得られていない。

### 2. 不可逆定常分布について

可逆性の条件 (3) (4) を満たさない  $\mathcal{L}$ -過程の不可逆定常分布はいかなるものか？有限次元の場合でも、ドリフト項の分解から定められるとしているものの、それを陽に与えるのは一般に困難のようである。また、そのような分解の類似についてさえ、”一様”な reference measure の無い無限次元においては困難な事と思える。それとも、それを意味づける厳密な”変型”は存在するのだろうか？(例えば、 $\nabla b(\mu)$  を対称な部分と非対称な部分に分けるなど。) 興味深い問題ではあるのだが、今のところ見当が付かない。

### 3. 有限次元拡散過程に対する”詳細釣り合い条件”について

この研究集会での講演直後に飯塚先生（九州歯科大学）より頂いた下記のご指摘に関して考察したことを、この場を借りて報告させて頂く。生物等の応用分野においては、拡散過程の定常分布を次のようなやりかたで求めることがあるそうである。適当な仮定を満たす係数を持つ生成作用素

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (23)$$

を考える。これの生成する拡散過程（「 $L$ -過程」と呼ぶ）に対して 定常分布が存在し、(ルベーク測度に関して) 密度関数  $\phi$  をもつと仮定すれば、 $\phi$  に関する次の方程式を得る。

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a^{ij} \phi) - b^i \right\} = 0 \quad (24)$$

これをずっと強めた次の方程式

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a^{ij} \phi) - b^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (25)$$

は detailed balance condition（詳細釣り合い条件）と呼ばれ、定常分布の計算に用いられるというご指摘である。以下では、(25) が  $L$ -過程の可逆性の条件と（少なくとも形式的に）

同値である事を示す。まず、[11] (Chap. V, §4) にあるように  $(g_{ij}) := (a^{ij})^{-1}$  が定義する Riemannian metric の言葉で書き直す：

$$L = \frac{1}{2}\Delta + \bar{b} \quad (26)$$

ただし、 $G = \det(g_{ij})$ ,  $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1} = (a^{ij})$ ,  $\bar{b} = \sum_i \bar{b}^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  として

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \quad (27)$$

$$\bar{b}^i = b^i - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_j g^{ij} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial x_j} \quad (28)$$

ここで、(28) の最後の項が  $\log \sqrt{G}$  の勾配となっていることに注意すれば、 $L$  が可逆分布を持つための条件は、「 $\bar{b}$  の残りの部分も勾配型」すなわち

$$\exists V \quad \text{s.t.} \quad b^i - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \sum_j g^{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (29)$$

と述べられる。ところがこの条件は、(25) で置換  $\phi = \exp(-V)$  を施して得られる式と一致することが容易に確かめられる。

例：突然変異のみを考慮した Wright-Fisher モデルの拡散近似 (cf. e.g. [5], Chap. 10)  $K$  は 2 以上の整数とする。  $E$  が  $K$  個の異なる点から成る場合の Fleming-Viot 過程は、

$$X_K := \{(x_1, \dots, x_{K-1}) \mid x_1 \geq 0, \dots, x_{K-1} \geq 0, x_K := 1 - x_1 - \dots - x_{K-1} \geq 0\}$$

上の拡散過程（したがって  $n = K - 1$ ）と本質的に同じであり、拡散係数

$$a^{ij}(x) = x_i(\delta_{ij} - x_j)$$

および線形なドリフト項  $b^i(x)$  を持つ。このうち可逆分布を持つ場合は、

$$b^i(x) = \frac{\theta}{2}(m_i - x_i) \quad (30)$$

の型の場合に限る。ここに含まれる定数については次を仮定する。

$$\theta > 0, \quad m_1 > 0, \dots, m_{K-1} > 0, \quad m_K := 1 - m_1 - \dots - m_{K-1} > 0$$

拡散係数は  $X_K$  の境界上で退化してしまうが、そこに目をつむって上の計算をなぞって見る。[3] には  $G(x)^{-1} = \det(a^{ij}(x)) = x_1 \cdots x_K$  のみならず  $(g_{ij}) = (a^{ij})^{-1}$  の具体的な式がある。直接の計算から、

$$\sum_{j=1}^{K-1} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j} = 1 - Kx_i = -\sum_{j=1}^{K-1} g^{ij} \frac{\partial \log G}{\partial x_j} \quad (i = 1, \dots, K-1)$$

したがって、 $\phi = G \exp(-U)$  (i.e.,  $V = U - \log G$ ) とおくと (29) はよりすっきりした形をとる。

$$b^i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (i = 1, \dots, K-1) \quad (31)$$

(30) の  $b^i$  に対しては、(31) が次の  $U$  によって満たされることが確かめられる。

$$U(x) = \theta \sum_{i=1}^K m_i \log \frac{m_i}{x_i} + \text{const.} \quad (32)$$

これは離散の場合の相対エントロピーである。結局、可逆分布  $\phi dx_1 \cdots dx_{K-1}$  は

$$G \exp(-U) dx_1 \cdots dx_{K-1} = \text{const.} \left( \prod_{i=1}^K x_i^{\theta m_i} \right) x_1^{-1} \cdots x_K^{-1} dx_1 \cdots dx_{K-1} \quad (33)$$

となり、Dirichlet 分布を得た。

最後に、(33) で現れた測度  $x_1^{-1} \cdots x_K^{-1} dx_1 \cdots dx_{K-1}$  の重要性について指摘しておく。これが導く

$$\Sigma_K^+ := \{(x_1, \dots, x_K) \mid x_1 > 0, \dots, x_K > 0, x_1 + \cdots + x_K = 1\}$$

上の測度

$$D_K(dx_1 \cdots dx_K) := x_1^{-1} \cdots x_K^{-1} \delta_{1-x_1-\cdots-x_{K-1}}(dx_K) dx_1 \cdots dx_{K-1}$$

は、Fleming-Viot 過程の可逆性の議論で用いた変換群の不変測度である。ちなみに、今の離散的な状況において変換群  $\{S_f\}$  は

$$S_f x = \left( \frac{e^{f_1} x_1}{\sum_{j=1}^K e^{f_j} x_j}, \dots, \frac{e^{f_K} x_K}{\sum_{j=1}^K e^{f_j} x_j} \right), \quad f \in \mathbf{R}^K, x = (x_1, \dots, x_K) \in \Sigma_K^+$$

なる形を取っている。したがって、 $\Sigma_K^+$  の 2 元  $x = (x_i), y = (y_i)$  に対して

$$x \cdot y = \left( \frac{x_1 y_1}{\sum_{j=1}^K x_j y_j}, \dots, \frac{x_K y_K}{\sum_{j=1}^K x_j y_j} \right)$$

として積を定義したときの Haar 測度が  $D_K$  であるということもできる。このように、Dirichlet ランダム測度の表示 (20) は、有限次元の場合には直接的な意味づけができる。

## 参考文献

- [1] Cox, J. T. and Greven, A. (1994) Ergodic theorems for infinite systems of interacting diffusions, *Ann. Probab.*, **22**, 833-853
- [2] Dawson, D. (1993) Measure-valued Markov processes, in *École d'Été de Probabilités de Saint Flour*, *Lecture Notes in Math.* **1541**, pp. 1-260, Springer-Verlag, Berlin

- [3] Dawson, D. and Feng S. (1998) Large deviations for the Fleming-Viot process with neutral mutation and selection. *Stoch. Proc. Appl.* **77**, 207-232.
- [4] Doss, H. and Royer, G. (1978) Processus de diffusion associe aux mesures de Gibbs sur  $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ , *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **46**, 107-124
- [5] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G. (1986) *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley, New York
- [6] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G. (1993) Fleming-Viot processes in population genetics, *SIAM J. Contr. Opt.* **31**, 345-386
- [7] Funaki, T. (1991) The reversible measures of multi-dimensional Ginzburg-Landau type continuum model, *Osaka J. Math.* **28**, 463-494
- [8] Handa, K. (1990) A measure-valued diffusion process describing the stepping stone model with infinitely many alleles, *Stochastic Process. Appl.* **36**, 269-296
- [9] Handa, K. (2001) Quasi-invariance and reversibility in the Fleming-Viot process, submitted
- [10] Handa, K. : Quasi-invariant measures and their characterization by conditional probabilities, in preparation
- [11] Ikeda, N. and Watanabe S. (1981) *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo
- [12] Li, Z., Shiga, T. and Yao, L. (1999) A reversibility problem for Fleming-Viot processes, *Elect. Comm. in Probab.* **4**, 71-82
- [13] Shiga, T. (1992) Ergodic theorems and exponential decay of sample paths for certain interacting diffusion systems, *Osaka J. Math.*, **29**, 789-807
- [14] Tsilevich, N., Vershik, A. and Yor, M. (2000) Distinguished properties of the gamma process, and related topics, preprint
- [15] Zhu, M. (1996) The reversible measure of a conservative system with finite range interactions, in "Nonlinear Stochastic PDE's: Hydrodynamic Limit and Burgers' Turbulence", eds. T. Funaki and W. A. Woyczynski, IMA volumes in Mathematics and its Applications, Vol. **77**, Springer-Verlag, pp. 147-156, New York