

複素空間形への helical geodesic immersion について

東北大 理学研究科 大仁田義裕

(Yoshihiro Ohnita)

$M^n, \tilde{M}^N$ を connected Riemannian manifold とする.

isometric immersion $\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N$ が次の条件を満たすとき、 φ は "helical geodesic immersion of order p " と呼ばれている :

(1) M^n の任意の geodesic γ に対して、 $\varphi \circ \gamma$ は $\tilde{M}^N$ 内の order p の Frenet curve で、その曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{p-1} > 0$ が定数になる.

(2) $p, \kappa_1, \dots, \kappa_{p-1}$ は γ に独立である.

(cf. Sakamoto [7]).

ambient space から見てその上の geodesic が単純な曲線になっているような部分多様体を研究することは、興味あることである. helical geodesic immersion は、 $\tilde{M}^N$ が実空間形特に球面の場合 Harmonic manifold とも深く関連し、Sakamoto, Nakagawa, Tsukada により研究されている.

ここでは、 $\tilde{M}^N$ が複素空間形の場合、helical geodesic

immersion を分類するという問題を考えたい。

今、

$\tilde{M}^N[c]$: complex space form of constant holomorphic sectional curvature c of complex dimension N .

ここで、 $c = -1, 0$ or 1 .

$\bar{M}^N(c)$: real space form of constant sectional curvature c of real dimension N

とする。

$\tilde{M}^N[c]$ 内の典型的な部分多様体は、Kähler部分多様体と totally real 部分多様体である。

$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ helical geodesic immersion of order p が Kähler immersion である場合と totally real である場合についてこの問題を考察し、得られている結果を報告する。

1. helical Kähler immersion

M^n を complex dimension n の Kähler manifold とし、

$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ が helical geodesic かつ Kähler immersion であるとき、helical Kähler immersion と呼ぶことにする。

まず、helical Kähler immersion の例をあげる。

Example. $p \geq 1$ integer とする.

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathbb{CP}^n\left(\frac{1}{p}\right) &\longrightarrow \mathbb{CP}^{N(p)}(1) & N(p) &:= \binom{n+p}{p} - 1. \\ (z_0, z_1, \dots, z_n) &\longrightarrow \left(\sqrt{\frac{p!}{p_0! \dots p_n!}} \cdot (z_0)^{p_0} \dots (z_n)^{p_n} \right) \\ && p_0 + \dots + p_n = p \\ && p_i \geq 0 \text{ integer} \end{aligned}$$

(cf. Calabi [1]).

φ_p による geodesic の等動を調べると次のことがわかる.

Thm 1.1.

- (1) φ_p は helical Kähler immersion of order p .
- (2) $\mathbb{CP}^n(\frac{1}{p})$ の任意の geodesic γ に対して, $\varphi \circ \gamma$ は $\mathbb{CP}^{N(p)}(1)$ の p -dim. totally real totally geodesic submanifold に含まれる.
- (3) $\mathbb{CP}^n(\frac{1}{p})$ の任意の 2つの geodesic γ_1, γ_2 に対して, $\varphi \circ \gamma_1$ と $\varphi \circ \gamma_2$ は $\mathbb{CP}^{N(p)}(1)$ のある holomorphic isometric で写り合う.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ を helical Kähler immersion of order p としよう.

次の性質は、容易にわかる.

Prop. 1.2.

- (1) φ は constant isotropic.

$$\text{i.e. } \|\alpha(X, X)\| = \kappa_1 \quad (\forall X \in T_x M, \forall x \in M)$$

ここで, α は φ の第 2 基本形式.

(2) M^n は constant holomorphic sectional curvature c を持つ.

今、次の定理を引用する.

Thm. 3. (Nakagawa and Ogiue [5])

$$\phi : \tilde{M}^n[c] \longrightarrow \tilde{M}^N[c] \quad \text{Kähler immersion}$$

$$c = 0 \text{ or } -1 \quad \Rightarrow \quad \phi \text{ totally geodesic.}$$

$$c = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{integer } r \geq 1 \text{ が存在して 次のようになる.}$$

$$(i) \quad c' = \frac{c}{r}.$$

$$(ii) \quad N(r) \leq N, \quad \phi(\tilde{M}^n[c]) \text{ は } \tilde{M}^N[c] \text{ の} \\ \text{totally geodesic Kähler submanifold } \tilde{M}^{N(p)}[c] \\ \text{に含まれる.}$$

よって、 $c = 1$ の場合は、Calabi の local rigidity theorem により、 ϕ は ϕ_r と同値になる。Thm. 1. により、 $p = r$ でなければならない。従って、次の定理を得る。

Thm. 4.

$$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c] \quad \text{helical Kähler immersion} \\ \text{of order } p$$

$$c = 0 \text{ or } -1 \quad \Rightarrow \quad \phi \text{ totally geodesic. } (p=1)$$

$$c = 1 \quad \Rightarrow \quad M^n = \tilde{M}^n[\frac{1}{p}], \quad N(p) \leq N.$$

$$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{N(p)}[c] \subset \tilde{M}^N[c].$$

は ϕ_p と同値.

2. totally real helical geodesic immersion について

まず, complex space form の totally real submanifold の normal bundle の構造を調べる. この結果から, total real submanifold を 2つのタイプに分けることができる.

M^n を n -dimensional connected Riemannian manifold とする.

$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ を totally real isometric immersion とする. ϕ の degree, osculating space の概念を述べる.

Def. α を ϕ の第 2 基本形式とする. ϕ の osculating space は次のように定義される. $x \in M$ とする.

$$O_x^0 M := T_x M.$$

$$O_x^1 M := \text{span} \{ X, \alpha(X_1, X_2); X, X_1, X_2 \in T_x M \}$$

$$\vdots$$

$$O_x^i M := \text{span} \{ X, (\nabla^{*k_2} \alpha)(X_1, \dots, X_k); X, X_1, \dots, X_k \in T_x M$$

$$\vdots \quad \quad \quad k=2, \dots, i+1 \}.$$

$$O_x^i M = O_x^{i-1} M \oplus N_x^i M \quad (\text{直交直和分解}) \quad i=1, 2, \dots$$

とおく. $R_j \subset M$ ($j \geq 0$) を帰納的に次のように定める.

$$R_0 := M, \quad R_j := \{ x \in R_{j-1}; \dim O_x^j M \text{ maximal in } R_{j-1} \}.$$

$$O_x^{d+2} M \subsetneq O_x^{d+1} M = O_x^d M = \dots \quad (x \in R_d) \quad \text{となる integer } d \geq 1$$

が存在する. ここで, $O_x^1 M = \{0\}$ とする. この d を f の

"degree" と呼ぶ.

$c \neq 0$ と仮定する.

Prop. 2.1. $x \in R_d$ に対し

$$N_x M = N_x^1 M \oplus \cdots \oplus N_x^{d-1} M \oplus T_x M \quad (\text{直交直和分解})$$

とあるとき、次のいずれかが成立する。

$$R) \quad J(T_x M) \subset T_x M \quad (\forall x \in R_d).$$

$$C) \quad J(T_x M) \subset N_x^1 M \oplus \cdots \oplus N_x^{d-1} M \quad (\forall x \in M).$$

Def.

R) が成立するとき、 ϕ は " $\mathbb{R}$ -totally real"、C) が成立するとき、 ϕ は " $\mathbb{C}$ -totally real" と呼ぶことにする。

Lem. 2.2.

$$(1) \quad \phi \text{ } \mathbb{R}\text{-totally real} \Rightarrow J(O_x^d M) \subset T_x M \quad (\forall x \in R_d).$$

$$(2) \quad \phi \text{ } \mathbb{C}\text{-totally real} \Rightarrow J(O_x^d M) \subset O_x^d M \quad (\forall x \in R_d).$$

この Lemma より、 $O_x^d M$ は Lie triple system になることがわかる。従って、次を得る。

Prop. 2.3.

$\phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c]$ を totally real helical geodesic immersion, $d = \text{degree } \phi$ とする。

$$(1) \quad \phi : \mathbb{R}\text{-totally real}$$

$\Rightarrow$ 次を満たす $\tilde{M}^n[c]$ の totally real totally geodesic submanifold $\bar{M}^m(\frac{c}{d})$ が唯一存在する：

$$\phi(M) \subset \bar{M}^m(\frac{c}{d})$$

$$O_x^d M = T_x \bar{M}^m(\frac{c}{d}) \quad (\forall x \in R_d).$$

(2) $\varphi : \mathbb{C}$ -totally real

$\Rightarrow$ 次に示す $\tilde{M}^n[c]$ の totally geodesic Kaehler submanifold $\tilde{M}^n[c]$ が唯一存在する:

$$\varphi(M) \subset \tilde{M}^n[c]$$

$$O_x^d M = T_x \tilde{M}^n[c] \quad (\forall x \in \mathbb{R}_d).$$

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c]$ totally real helical geodesic immersion of order p を分類するという問題を扱う場合、 $\mathbb{R}$ -totally real と $\mathbb{C}$ -totally real とに分けて考えていくことが都合の良いことである。 $\mathbb{R}$ -totally real の時には、上の Prop. から real space form における問題に帰着される。

まず、 $p=1$ のときは totally geodesic である。

$p=2$ のときは、第2基本形式が parallel か $\rightarrow$ isotropic という性質を持つことと同値である。 $\mathbb{R}$ -totally real の場合は、Sakamoto の定理 [6] に帰着される。 $\mathbb{C}$ -totally real の場合は Naitoh によって完全に分類されている。(cf. Naitoh [3])

Naitoh [2] は、次の対称空間 M^n の $\mathbb{CP}^n$ への order 2 の $\mathbb{C}$ -totally real minimal helical geodesic immersion の例を構成した:

$$S^1 \times S^{n-1}, \quad SU(3)/SO(3), \quad SU(3), \quad SU(6)/Sp(3), \quad E_6/F_4.$$

$p=3$ の場合は、 φ が $\mathbb{R}$ -totally real ならば Nakagawa [4] の定理が complete simply connected の仮定なしにその local version

も成り立つことに注意すれば、次を得る.

TRm. 2.4.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c] \quad \mathbb{R}\text{-totally real minimal helical geodesic immersion of order 3}$

$\Rightarrow c > 0$ とき、 $\varphi(M^n)$ は $\tilde{M}^n[c]$ のある totally real totally geodesic submanifold $\bar{M}^m(\frac{n}{2})$ に含まれて、 φ は sphere $S^n(\frac{nc}{12(n+2)})$ から sphere への 3rd standard minimal isometric immersion と同値である.

$\mathbb{C}$ -totally real の場合については まだ何もわか、ていないようである. $\mathbb{C}$ -totally real helical geodesic immersion of order $p \geq 3$ の例すらも、知られていないようである.

しかし、 $\tilde{M}^n[c]$ の totally real submanifold で特別な場合、次の結果を得た.

TRm. 2.5.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c] \quad \text{totally real minimal helical geodesic immersion of order } p$

$\Rightarrow p = 1$ 或 2 . さらに、 $c \leq 0$ ならば $p = 1$ なければならない.

normal bundle の "f-structure" の概念を用いて、TRm. 2.5. のわずかな一般化を得ることが出来る.

$x \in M$ とする. $X \in N_x M$ に対して、 $JX = \rho X + fX$

$pX \in T_x M$, $fX \in N_x M$ とおく. $f \in \text{End}(NM)$ は
 $f^3 + f = 0$ を満たす. すなわち, f は totally real submanifold
 M の normal bundle NM の "f-structure" を定める. (cf.
 Yano and Kon [8])

Thm. 2.6.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c]$ minimal totally real helical geodesic
 immersion of order p .

$\nabla f = 0 \Rightarrow p = 1$ or 2 . さらに, $c \leq 0$ ならば,
 $p = 1$.

3. 対称空間の球面への minimal かつ isotropic immersion について

今までの問題とは直接関係はないが, 最後に 対称空間の
 球面への minimal immersion の問題について述べたい.

isotropic immersion という概念はいかにも "等方的" という
 感じを表わしているが, その最も良く知られている例は,
 compact rank 1 対称空間の球面への standard minimal
 isometric immersion である. 先ほどの Naitoh の例は, すべて
 rank 2 の対称空間であり, 実は この例から rank 2 の
 対称空間の球面への minimal かつ isotropic immersion が存在す
 ることが容易にわかる.

そこで、球面への minimal か $\rightarrow$ isotropic な isometric immersion を許す対称空間を分類するというのはおもしろい問題である。

こういう方向で、例えば 次の結果を得た。

Thm. 3.1.

M : compact irreducible symmetric space.

$\phi : M \longrightarrow S^l$ equivariant minimal isotropic
isometric immersion

$\Rightarrow \text{rank } M \leq 8.$

この評価は、もっと良くできると思われる。この問題について、著者は さらに研究中である。

参考文献

- [1] E. Calabi, Isometric imbedding of complex manifolds, Ann. of Math. 58 No.1. (1953) 1 - 23.
- [2] H. Naitoh, Isotropic submanifolds with parallel second fundamental form in $P^m(c)$, Osaka J. Math. 18 (1981), 427 - 464.
- [3] H. Naitoh, Parallel submanifolds of complex space forms I, II. preprint.
- [4] H. Nakagawa, A characterization of the 3rd standard

immersions of spheres into a sphere, *J. Diff. Geom.* 16 (1981) 511 - 527.

[5] H. Nakagawa and K. Ogino, Complex space forms immersed in complex space forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 219 (1976) 289 - 297.

[6] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, *Tohoku Math. J.* 29 (1977) 25 - 56.

[7] K. Sakamoto, Helical immersions into a unit sphere, *Math. Ann.* 261 (1982) 63 - 80.

[8] K. Yano and M. Kon, Anti-invariant submanifolds, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel.